

Torniamo alla NOTA a pag AL77: se $f: V \rightarrow W$ è appl. lineare

$$f \text{ suriettiva} \iff \text{Im } f = W$$

$$f \text{ iniettiva} \iff \ker f = \{0_V\}$$

Ricordando che un sottospazio di uno spazio vettoriale di dimensione finita d ha dimensione $\leq d$ e che se la dimensione del sottospazio è d allora esso coincide con l'intero sp. vett. si ha

Osservazione. Siano V e W due sp. vett. di dimensione finita e $f: V \rightarrow W$ una appl. lineare. Allora

$$f \text{ suriettiva} \iff \dim \text{Im } f = \dim W$$

$$f \text{ iniettiva} \iff \dim \ker f = 0$$

$$\dim \text{Im } f = N+R$$

$$\dim \text{Im } f = \dim V$$

entrambe le formule riguardano $\text{Im } f$ ma sono f!

In particolare:

Se V e W hanno la stessa dimensione finita n , l'appl. lineare $f: V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

DIM. Per il teor. di nullità + range

$$n = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f)$$

Allora

$$f \text{ su} \iff n = \dim W = \dim(\text{Im } f) \iff \dim(\ker f) = 0 \iff f \text{ in.}$$

Esercizi. Esistono appl. lineari:

1) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

INIETTIVE? No, poiché $\dim \text{Im } f = 4 > \dim W = 3$

2) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

SURIETTIVE? Sì: $f(e_1) = e'_1; f(e_2) = e'_2; f(e_3) = e'_3; f(e_4) = 0$

3) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

NON SURIETTIVE? Sì: $f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$

4) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

SURIETTIVE? No: $\dim \text{Im } f \leq 3 < 4 = \dim W$

5) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

INIETTIVE? $f(e'_1) = e_1, f(e'_2) = e_2, f(e'_3) = e_3$

6) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

NON INIETTIVE? $f(v) = 0_{\mathbb{R}^4}$