

6. APPLICAZIONI LINEARI

AL 71

Siano V e W due spazi vettoriali su \mathbb{R} .

DEF. Un'applicazione

$f: V \rightarrow W$
 è detta applicazione lineare se valgono entrambe:

- i) $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V : f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$
ii) $\forall \underline{v} \in V \wedge \forall k \in \mathbb{R} : f(k\underline{v}) = kf(\underline{v})$

ESEMPI "BANALI"

- ① $f: V \rightarrow W$ definita da: $\forall \underline{v} \in V, f(\underline{v}) = \underline{0}_W$
 è applicazione lineare (nulla)

② $f: V \rightarrow V$ definita da: $\forall \underline{v} \in V, f(\underline{v}) = \underline{v}$
 è applicazione lineare (identica).

③ sia $\underline{u} \neq \underline{0}$ un vettore fixed di V . $f: V \rightarrow V$
 definita da: $\forall \underline{v} \in V, f(\underline{v}) = \underline{u} + \underline{v}$
 NON È un'applicazione lineare, ad es. perché

$$f(0 \cdot \underline{v}) = \underline{u} + 0 \cdot \underline{v} = \underline{u} + \underline{0} = \underline{u}$$
 $\left\{ \text{e } \underline{u} \neq \underline{0}$
 mentre $0 \cdot f(\underline{v}) = 0(\underline{u} + \underline{v}) = \underline{0}$

PERESERCIZIO: mostrare che f è un'applicazione di V in V , suriettiva e iniettiva.

Prima di fornire le proprietà delle app. lineari
 Svolgiamo qualche esercizio di verifica di linearità.
 Per comodità "visiva" identificheremo le n-uple ordinate
 $\in \mathbb{R}^n$ con le matrici colonne $\in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

1) Sia $f_h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f_h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ h \end{pmatrix}$.

Verificare che

- f_h è un'applicazione di \mathbb{R}^3 in sé (per compito)
- f_h è lineare se e solo se $h=0$

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} f_h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = f_h\left(\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ y+y'-z-z' \\ h \end{pmatrix} \\ f_h\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) + f_h\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ y'-z' \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x'+y+y' \\ y+y'-z-z' \\ 2h \end{pmatrix} \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{h=2h} \\ \xleftarrow{h=0} \end{array}$$

\Rightarrow se $h \neq 0$, f_h non è una appl. lin. Quando per $h=0$

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} f_0\left(k\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f_0\left(\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} kx+kx \\ ky-kz \\ 0 \end{pmatrix} \\ k f_0\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = k \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(x+y) \\ k(y-z) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx+kx \\ ky-kz \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{sempre}} \\ \downarrow \\ \text{per } h=0 \\ f_0 \text{ è applic.} \end{array}$$

2) Sia $f: M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix}$

Verificare che f è un'app. lineare suriettiva e non iniettiva.

- Linearità: $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) :$

$$\begin{aligned} (i) \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+a'+b+b' \\ b+b'-c-c' \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+b' \\ b'-c' \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \quad \text{OK.} \\ (ii) \quad f\left(k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ka+kb \\ kb-kc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k(a+b) \\ k(b-c) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix} = \\ &= kf\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \quad \text{OK.} \end{aligned}$$

- Suriettività: \forall vettore $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ esiste $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$? *Incognite: a, b, c, d*

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=r \\ b-c=s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=r-b \\ c=b-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-b & b \\ b-s & d \end{pmatrix}$$

∞^2 soluzioni, dipendenti dai parametri $b, d \Rightarrow$ non iniettiva!

3) Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

(AL73)

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(prodotto righe per colonne). Verificare che f è app. lineare iniettiva e non suriettiva.

Sol. Si può sviluppare il prodotto: $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+4 \\ x+2y \\ x-y \end{pmatrix}$ e procedere come sopra, ma è più comodo usare le proprie del prodotto di matrici:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right] = \text{PR. DISTRIBUTIVA} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$f\left(k\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} [k\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)] = k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

COMMUTATIVITÀ del pr. per scalare rispetto a prod. di matrici

Iniettività: anche in questo caso meglio usare la rappresentazione con le matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ora pensiamo come ricogliere $x-x'=s$ e $y-y'=t$ cioè scriviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo sistema lineare si risolve immediatamente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ dà } \left\{ \begin{array}{l} s=0 \\ t=0 \end{array} \right.$$

cioè deve essere $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Non suriettività: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 1 & -1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{\text{GAUSS}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & c+2b-2a \end{array} \right)$ non risolvibile se $c+2b-2a \neq 0$

Che indicazioni generali possiamo sperare da questo esempio?

1) Per ogni matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ si può definire un'applicazione lineare

$$f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

ponendo

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{fond. righe per colonne})$$

La verifica è identica a quella dell'esempio.

2) Stabilire se questa applicazione è iniettiva equivale a chiedersi se il sistema lineare omogeneo

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

ha come SOLA SOLUZIONE il vettore nullo di \mathbb{R}^n ...

3) Stabilire se questa applicazione è suriettiva equivale a chiedersi se il sistema lineare

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ha soluzione per ogni scelta di b_1, \dots, b_m

Tanto nel caso 2) che nel caso 3) il metodo di eliminazione di Gauss consente di dare risposte inequivocabili:

- perché f_A sia iniettiva la riduzione a gradini non deve lasciare nella matrice ridotta di A un numero di colonne maggiore del numero di righe non nulle. (altri ^{plurimi} _{menti} incognita funziona da ^{se ci sono,} parametro \Rightarrow ^{se ci sono,} no soluz.)
- perché f_A sia suriettiva le riduz. a gradini non deve lasciare nella matrice ridotta di A delle righe di zero (che per opportuni termini noti danno "sistema imposs.")

Proprietà delle applicazioni lineari

(AL 75)

OSS. 1. Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$(i) f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$$

$$(ii) \forall \underline{v} \in V, f(-\underline{v}) = -f(\underline{v})$$

(iii) $\forall \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ e $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ si ha

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(\underline{v}_i)$$

cioè, se f è un'appl. lin., l'immagine del vettore nullo è il vett. nullo (di W), l'immagine dell'opposto è l'opposto dell'immagine, l'immagine di una comb. linare è la comb. linare delle immagini con gli stessi coefficienti.

DIM. (i) Sia $\underline{v} \in V$

$$f(\underline{v}) = f(\underline{v} + \underline{0}_V) = f(\underline{v}) + f(\underline{0}_V) \quad \downarrow$$

$$\begin{aligned} -f(\underline{v}) + f(\underline{v}) &= -f(\underline{v}) + (f(\underline{v}) + f(\underline{0}_V)) \\ \text{def. di} \quad \downarrow & \quad \downarrow \text{pr. assoc. di } + \text{ in } W \\ \underline{0}_W &= (-f(\underline{v}) + f(\underline{v})) + f(\underline{0}_V) \\ \underline{0}_W &= \underline{0}_W + f(\underline{0}_V) \\ \underline{0}_W &= f(\underline{0}_V) \end{aligned}$$

$$(ii) \underline{0}_W = f(\underline{0}_V) = f(\underline{v} + (-\underline{v})) = f(\underline{v}) + f(-\underline{v}) \quad \downarrow$$

$$\begin{aligned} -f(\underline{v}) + \underline{0}_W &= -f(\underline{v}) + (f(\underline{v}) + f(-\underline{v})) \quad \downarrow \\ \text{df } \underline{0}_W \quad \downarrow & \quad \downarrow \text{pr. ass. di } + \text{ in } W \text{ e def opposto in } W \\ -f(\underline{v}) &= \underline{0}_W + f(-\underline{v}) \quad \downarrow \\ -f(\underline{v}) &= f(-\underline{v}) \quad \text{def } \underline{0}_W \quad \downarrow \end{aligned}$$

$$(iii) f\left(\sum a_i \underline{v}_i\right) = \sum f(a_i \underline{v}_i) = \sum a_i f(\underline{v}_i) \cdot \text{evd.}$$

PROP. Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

i) se V' è un sottospazio vettoriale di V
anche $f(V')$ è un sottosp. vett. di W

ii) se W' è un sottospazio vettoriale di W
anche l'insieme delle sue preimmagini

$f^{-1}(W')$ (comunemente chiamato $\text{conf}^{f^{-1}}(W')$
MA f^{-1} non sta per INVERSA)

è un sottospazio.

DIM. i) Siano $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in f(V')$ cioè esistono $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V'$:

$$\underline{w}_1 = f(\underline{v}_1) \quad \underline{w}_2 = f(\underline{v}_2)$$

Allora

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) = f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \in f(V') \quad \begin{matrix} \in V' \text{ ssp. di } V \\ f \text{ LIN.} \end{matrix}$$

Inoltre se $k \in \mathbb{R}$

$$k \underline{w}_1 = k f(\underline{v}_1) = f(k \underline{v}_1) \in f(V') \quad \begin{matrix} \in V' \text{ ssp. di } V \\ f \text{ LIN.} \end{matrix}$$

Dunque l'IMMAGINE del ssp. V' è un ssp. vett. di W .

ii) Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in f^{-1}(W')$; ciò significa
 $f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2) \in W'$.

Allora $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in f^{-1}(W')$ poiché

$$f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) \in W' \quad \begin{matrix} \text{in quanto } W' \\ \text{è ssp. di } W \end{matrix}$$

E se $k \in \mathbb{R}$, $k \underline{v}_1 \in f^{-1}(W')$ poiché

$$f(k \underline{v}_1) = k f(\underline{v}_1) \in W' \quad \begin{matrix} \text{in quanto } W' \text{ è} \\ \text{ssp. di } W \end{matrix}$$

c.v.d.

CASI PARTICOLARI FONDAMENTALI:

$V' = V$: il sottospazio $f(V)$ di W è detto immagine di f e denotato con $\text{Im } f$.

$W' = \{\underline{0}_W\}$: il sottospazio $f^{-1}(\{\underline{0}_W\})$ di V è detto ucleo di f e denotato con $\text{Ker } f$.

(AL77)

NOTA. L'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$ è suriettiva se e solo se
 $\text{Im } f = W$

(e questa è sostanzialmente la definizione); è iniettiva se e solo se

$$\text{ker } f = \{\underline{0}_V\}$$

e questa è una unità! (ma vedere quanto detto a pag AL74, ②)

DIM. Se f è iniettiva $\text{ker } f = f^T(\{\underline{0}_W\})$ deve contenere "al più un elemento"; d'altra parte $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ e quindi $\text{ker } f = \{\underline{0}_V\}$.

Viceversa se $\text{ker } f = \{\underline{0}_V\}$ e due elementi $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

siano tali che $f(\underline{v}_1) = f(\underline{v}_2)$ si ha

$$f(\underline{v}_1) - f(\underline{v}_2) = \underline{0}_W$$

$$f(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) \Rightarrow \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \text{ker } f = \{\underline{0}_V\}$$

Cioè $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$.

c.v.d.

Li poniamo ora questo problema: data un'applicazione lineare $f: V \rightarrow W$, come posso determinarne nucleo e immagine (o una base dell'uno e una base dell'altro)? Se l'applicazione può essere rappresentata con una matrice la cosa è abbastanza facile.

Esempio. $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+z-t \\ 2x+y+3z+t \\ y+z+t \end{pmatrix}$
 E' lineare? Si perché - ricordando come ho costruito la matrice dei coefficienti nel caso dei sistemi - vedo che posso scrivere $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ e ho già

osservato che applicazioni di questo tipo sono lineari.

Cercare il nucleo significa risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow METODI di
eliminaz.d.
GAUSS

(AL78)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

\Rightarrow 2 equazioni significative in 4 incognite \Rightarrow 2 parametri

$$\begin{cases} x = -z + t \\ y = -z - t \end{cases} \quad \text{quindi i vettori del nucleo hanno la forma:}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z+t \\ -z-t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e abbiano anche determinato una base di $\ker f$:

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \begin{matrix} \text{e i 2 generatori sono lin.} \\ \text{indipendenti} \\ \dim(\ker f) = 2 \end{matrix}$$

Cercare l' $\operatorname{Im} f$ invece significa chiedersi quali sono i vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ t.c. esista $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ per cui

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

cioè chiedersi quali legami devono sussistere tra a, b, c perché il sistema sia risolubile (A meno dei termini noti il sistema è lo stesso visto per $\ker f$). M. EL GAUSS:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3 & -1 & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b-2a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & c \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-b+2a \end{array} \right)$$

Il sistema è risolubile se e solo se $c-b+2a=0$
cioè se i vettori di \mathbb{R}^3 hanno la forma $(b=2a+c)$: NOTARE:

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a+c \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e i due vettori sono lin. indip.

quindi abbiamo trovato una base dell'immagine. $\Rightarrow \dim_{\operatorname{Im} f} = 2$

Notiamo che prendendo $c=b-2a$ avrei rappresentato i vettori di $\operatorname{Im} f$ come $\begin{pmatrix} a \\ b \\ b-2a \end{pmatrix}$ cioè come vettori di $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$: base diversa, stessa SSp!.

E' possibile determinare una base di Ymf anche senza risolvere materialmente il sistema?

Considero la base "canonica" di \mathbb{R}^4 (pensato come matrice colonna)

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si ha } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \underline{e}_1 + y \underline{e}_2 + z \underline{e}_3 + t \underline{e}_4$$

$$\text{e quindi } f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = f(x \underline{e}_1 + y \underline{e}_2 + z \underline{e}_3 + t \underline{e}_4) = \\ = x f(\underline{e}_1) + y f(\underline{e}_2) + z f(\underline{e}_3) + t f(\underline{e}_4)$$

Cioè l'immagine di una base di Ymf è un sistema di generatori dell' Ymf : da questo, mediante l'algoritmo degli scarti successivi, si può estrarre una base di Ymf . Chi sono gli $f(\underline{e}_i)$?

$$f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ prima colonna della matrice}$$

$$\text{Analogamente } f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\underline{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi basta applicare l'algor. degli scarti succ. alle colonne della matrice:

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ è indip. poiché $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ è indip. poiché $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ è dipendente poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: scarto
successivo.

$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ è dipendente poiché $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: scarto
anche l'ultimo vettore.

Questo approccio permette una generalizzazione ricca di implicazioni:

OSS. Sia $f: V \rightarrow W$ un'app. lineare e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Allora $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono un sistema di generatori di $\text{Im } f$ e quindi $\dim(\text{Im } f) \leq \dim V = n$

Conviamente, essendo $\gamma_m f$ sottospazio di W è anche
 $\dim(\gamma_m f) \leq \dim W = m$, cioè $\dim(\gamma_m f) \leq \min(n, m)$)

Talora dim Ynf viene detta rengo dif, mentre dim kerf viene detta nullità dif. Vale il

TEOR. (di nullità + rengō). Sia $f: V \rightarrow W$ un'appl. lin.
e sia $\dim V = n$. Allora

$$\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = n.$$

La dimensione di W non entra in gioco! Ma quella di V deve essere finita.

DIM. Perché Ref è ssp. ret. di V

$$\dim(\ker f) \leq \dim V = n$$

Sia $\{v_1, \dots, v_s\}$ una base di $\ker f$ (con $s \leq n$). La
completo a una base di V

$$\left\{ \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_s, \underline{w}_{s+1}, \dots, \underline{w}_n \right\}.$$

I vettori $\{f(v_1), \dots, f(v_s), f(v_{s+1}), \dots, f(v_n)\}$ generano $\text{Im } f$: ma i primi s sono $= \Omega_W$ e quindi possono essere scartati dal sistema di generatori:

$$\text{Im } f = \langle f(v_{-s+1}), \dots, f(v_n) \rangle.$$

Mostro che questi vettori sono liev. indip. (e con ciò la tesi).

$$\text{Sia } a_{s+1} f(v_{s+1}) + \dots + a_n f(v_n) = \Omega_w$$

$$f(a_{s+1} \underline{v}_{s+1} + \dots + a_n \underline{v}_n) = \underline{0}_W$$

$$\Rightarrow a_{s+1}v_{s+1} + \dots + a_nv_n \in \ker f \Rightarrow \exists a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R} \text{ solche}$$

$$a_{s+1} \underline{v}_{s+1} + \dots + a_n \underline{v}_n = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_s \underline{v}_s \quad : \text{una }\{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$$

ist eine base $\Rightarrow a_1 = \dots = a_s = a_{s+1} = \dots = a_n = 0 \Rightarrow$ vektor. mit d

Nell'esempio a pag AL 77 e seguenti ad esempio
dopo aver trovato

$$\ker f = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$$

posso completare $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ a una base di \mathbb{R}^4 andando
ad aggiungere via via i vettori della base canonica
 $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 1 \\ -1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(matrice completa del sistema } x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 = \underline{e}_1) \\ \text{dà un sistema palesemente impossibile: tempo } e_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(matrice completa del sist. } x\underline{v}_1 + y\underline{v}_2 + z\underline{e}_1 = \underline{e}_2) \\ \text{dà ancora luogo a un sist. impossibile} \\ \text{come si vede bene scambiando } R_3 \text{ con } R_2 \text{ o } R_3 \text{ o } R_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & -1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 + R_1 - R_2 \\ R_4 + R_1 + R_2 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{IMPOSSIBILE}$$

Quindi tengo anche \underline{e}_2 e ho così trovato una base per
 \mathbb{R}^4 : $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{e}_1, \underline{e}_2\}$

(Ovviamente $\underline{e}_3, \underline{e}_4$ sono dipendenti da questi dato che
tutte le basi di \mathbb{R}^4 sono formate di 4 vettori indip.)

Allora g_{mf} ha per base

$$\{f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2)\}$$

Come avevamo già osservato.

Se teor. di nullità + rango viene ovviamente usato per
determinare la dimensione dell'immagine, nota
quella del nucleo (ov'èversa) senza dover material-
mente determinare una base per entrambi i setti spazi,

Torniamo alla NOTA a pag AL77: se $f: V \rightarrow W$ è appl. lineare

$$f \text{ suriettiva} \Leftrightarrow \text{Im } f = W$$

$$f \text{ iniettiva} \Leftrightarrow \ker f = \{0_V\}$$

Ricordando che un sottospazio di uno spazio vettoriale di dimensione finita d ha dimensione $\leq d$ e che se la dimensione del sottospazio è d allora esso coincide con l'intero sp. vett. si ha

Osservazione. Siano V e W due sp. vett. di dimensione finita e $f: V \rightarrow W$ un'appl. lineare. Allora

$$f \text{ suriettiva} \Leftrightarrow \dim \text{Im } f = \dim W$$

$$f \text{ iniettiva} \Leftrightarrow \dim \ker f = 0$$

$$\Updownarrow N+R$$

$$\dim \text{Im } f = \dim V$$

entrambe le formule riguardano $\text{Im } f$ ma sono f!

In particolare:

Se V e W hanno la stessa dimensione finita n , l'appl. lineare $f: V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

DIM. Per il teor. di nullità + range

$$\underline{n = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f)}$$

Allora

$$f \text{ su} \Leftrightarrow n = \dim W = \dim(\text{Im } f) \Leftrightarrow \dim(\ker f) = 0 \Leftrightarrow f \text{ in.}$$

Esercizi. Esistono appl. lineari:

$$1) f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{INIETTIVE?}$$

$$2) f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{SURIETTIVE?}$$

$$3) f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{NON SURIETTIVE?}$$

$$4) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{SURIETTIVE?}$$

$$5) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{INIETTIVE?}$$

$$6) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{NON INIETTIVE?}$$