

1.9. DIAGONALIZZABILITÀ di UN ENDOMORFISMO di V .

Premessa: ogni appl. lin. $f: V \rightarrow W$ tra due spazi di dimensione rispettivamente n e m rispetto a 2 basi opportune di V e W può essere rappresentata da una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} I_r & O_{r,k} \\ O_{h,r} & O_{h,k} \end{pmatrix}$$

Ove $r = \dim(\ker f)$, $h = m - r$, $k = n - r$ e I_r denota la matrice identica di ordine r , e $O_{r,k}$ denota la matrice nulla con r righe e k colonne ecc.

Ovviamente se $h \geq k$ sono $=0$ le corrispondenti righe/colonne di zeri non ci saranno.

Basta

- 1) trovare una base $\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ di $\ker f$; se $k < n$:
- 2) completare tale base a una base $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k$ di V
- 3) le immagini $\underline{w}_1 = f(\underline{a}_1), \dots, \underline{w}_r = f(\underline{a}_r)$ sono indipendenti; se $r < m$ si completa tale insieme a una base di W : $(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \underbrace{\underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m}_{h \text{ vettori}})$

A questo punto:

$$(f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_r), f(\underline{b}_1), \dots, f(\underline{b}_k)) = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_r, \underbrace{\underline{w}_{r+1}, \dots, \underline{w}_m}_{h \text{ vettori}}) \begin{pmatrix} I_r & O_{r,k} \\ O_{h,r} & O_{h,k} \end{pmatrix}$$

In particolare se $m = n$, e ancora più in particolare se $W = V$, la matrice che risulta da questa operazione è diagonale della forma $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$.

BENE! NON SIA MO INTERESSATI A QUESTO TIPO DI DIAGONALIZZAZIONE!

(useremo talora nel seguito l'espressione

(AL113)

ENDOMORFISMO dello sp. vett. V invece di

app. lin. dello sp. vett. V su se stesso)

dim $V = n$

DEF. Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo. Dico che f è diagonalizzabile se esiste una base $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ di V rispetto alla quale V è rappresentata da una matrice diagonale:

$$(f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n)) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Notare che

- 1) lo spazio vettoriale nel dominio e nel codominio è lo stesso
- 2) la base ordinata " " " " " è la stessa.

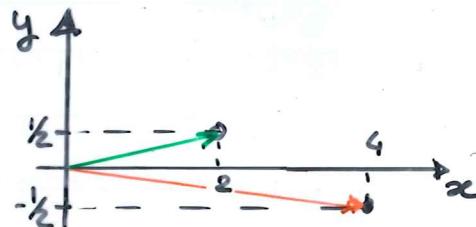
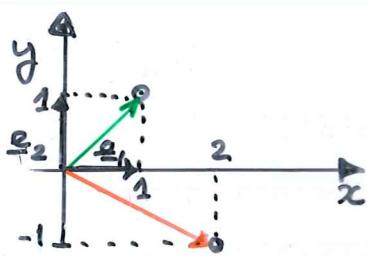
Una parte (o tutta) dei d_i può essere = 0.

Il comportamento di un endomorfismo diagonalizzabile è prevedibile facilmente.

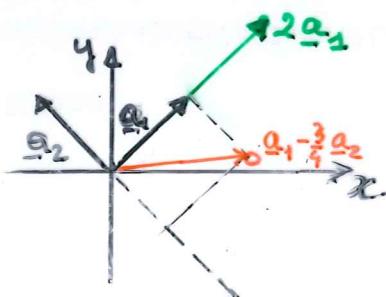
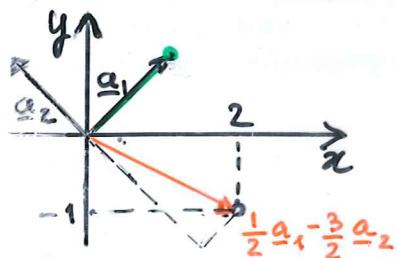
ESEMPIO 1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, base canonica

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2)) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dilata di un fattore 2 in direz. di \underline{e}_1 ,
contrae " " 2 " " di \underline{e}_2



ESEMPIO 2. $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, base $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, stessa matrice



- dilat di un fattore 2 in direz. di \underline{a}_1
 - contrae di un fattore 2 in direz. di \underline{a}_2
- ad es. $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

Vedi AL 113 BIS

Capiamo il risultato relativo all'ultimo esempio.

Se $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $(g(\underline{a}_1), g(\underline{a}_2)) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

è chiaro che $g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g(\underline{a}_1) = 2\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Se invece voglio $g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ devo prima trovare le componenti di $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$

Osservo che $(\underline{a}_1, \underline{a}_2) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ * semplifica

$$(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

ho moltiplicato entrambi i membri di * per $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$!

Allora $(\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2) \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

cioè, come scritto sul 1° disegno, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underline{a}_1 - \frac{3}{2} \underline{a}_2$.

Quindi $g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} g(\underline{a}_1) - \frac{3}{2} g(\underline{a}_2) = \underline{a}_1 - \frac{3}{4} \underline{a}_2$ per come è definita g .

Ora sostituendo $\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\underline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ottengo $g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$.

Tutto ciò si può fare in modo quasi meccanico ricordando che, detta P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ha

$$(\underline{a}_1, \underline{a}_2) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) P \quad \text{e} \quad (\underline{e}_1, \underline{e}_2) = (\underline{a}_1, \underline{a}_2) P^{-1} :$$

$$g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = (g(\underline{e}_1), g(\underline{e}_2)) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (g(\underline{a}_1), g(\underline{a}_2)) \overset{\substack{\text{coeff. di } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{risp.} \\ (\underline{a}_1, \underline{a}_2)}}{P^{-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\underline{a}_1, \underline{a}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \overset{\substack{\text{coeff. di } g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ \text{risp.} \\ (\underline{a}_1, \underline{a}_2)}}{P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} P^{-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\overset{\substack{\text{coeff. di } g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ \text{risp.} \\ (\underline{a}_1, \underline{a}_2)}}$

$\overset{\substack{\text{coeff. di } g\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \\ \text{risp.} \\ (\underline{e}_1, \underline{e}_2)}}$

ATTENZIONE: $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ è una base \Rightarrow l'applic. lin. che trasforma $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ in $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ (rappresenta risp. base canonica da P) è invertibile $\Rightarrow \exists P^{-1}$!

(Ad 114)

Come faccio a stabilire se l'endomorfismo
 $f: V \rightarrow V$ è diagonalizzabile?

- 1°) devo vedere se c'è qualche vettore candidato a far parte di una base rispetto alle quale f si rappresenti con una matrice diagonale: ricordo che deve essere $f(\underline{a}_i) = d_i \underline{a}_i$;
- 2°) devo vedere se ce ne sono n indipendenti.

DEF. Se \underline{v} è un vettore non nullo di V tale che esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ per il quale

$$f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$$

dico che \underline{v} è un autovettore di f relativo all'autovaleore λ .

Non è detto che ci siano.

ESEMPIO 3. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ è un endomorfismo di \mathbb{R}^2 (che rappresenta la rotazione di $\pi/2$ intorno all'origine).

Ora $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \lambda \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ significa $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$ cioè

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda y \\ \lambda^2 y + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda y \\ (\lambda^2 + 1)y = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha sol. $y=0$ (poiché $\lambda^2 + 1 \geq 1 \neq 0$) e quindi l'unica sol. possibile è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che NON è un autovettore \Rightarrow non ci sono autovettori.

(Se pensassi f come endomorfismo dello sp. vett. \mathbb{C}^2 su \mathbb{C} invece troverei 2 autovalori $\lambda = \pm i$ e autovettori in corrispondenza a ognuno di essi).

Ma se v è un autovettore di $f: V \rightarrow V$ relativo a λ
 ci sono infiniti autovettori di f relativi a λ .

Sufatti

$$f(kv) = k f(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv) \quad \forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Quindi non ha senso dire l'autovettore relativo a λ .

Invece un autovettore può essere relativo a un solo autovalore. Sufatti se

$$\begin{aligned} v \neq 0 \quad \text{e} \quad f(v) &= \lambda v \quad \text{si ha } (\lambda - \mu)v = 0 \\ f(v) &= \mu v \end{aligned}$$

e quindi $\lambda - \mu = 0$ (poiché $v \neq 0$).

PROP.1 Sia $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo di sp. vett. con almeno un autovettore relativo a un autovalore λ .

L'insieme di tutti gli autovettori relativi a λ , unito al vettore nullo di V , è un sottospazio vettoriale V_λ di V che prende il nome di autoSpazio relativo a λ .

Dice. V_λ non è \emptyset per ipotesi. Soltre $\forall v_1, v_2 \in V_\lambda$
 e $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} f(k_1 v_1 + k_2 v_2) &= k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) = k_1(\lambda v_1) + k_2(\lambda v_2) = \\ &= \lambda(k_1 v_1 + k_2 v_2) \end{aligned}$$

$$\text{cioè } k_1 v_1 + k_2 v_2 \in V_\lambda$$

c.u.d.

ATTENZIONE. V_λ ha dimensione ≥ 1 . Nulla esclude, a priori che $\dim V_\lambda > 1$.

ESEMPIO 4. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Si vede a occhio che $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

quindi $\lambda = 2$ è un autovalore. Ma se cerco gli $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ t.c.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ trovo } \begin{cases} 2x = 2x \\ z = 2y \\ 4y = 2z \end{cases} \text{ che ha sol. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}: \dim V_\lambda \geq 2$$

(AL 115 bis)

Domande in calce all'es. 4

Ho visto che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono 2 autovettori indip.
che formano base di V_2 .

Potrei dire che anche

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

è una base di autovettori di V_2 ? Ovviamente sempre per l'app. lin.

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x \\ z \\ 4y \end{pmatrix}$$

Risposta teorica

Sì perché $v_1 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sono autovett. rel. a 2 (per la PROP. 1, esistono comb. lin. di 2 autovett. rel. a 2) e sono palesemente indipendenti: visto che V_2 ha dimens. 2 sono lecc base di V_2 .

Alla prima parte (sono autovettori rel. a 2) si poteva anche rispondere direttamente:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{autovett. rel. a 2}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{" " " 2}$$

PROP. 2 Sia $f: V \rightarrow V$ un endom. e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ i autovalori distinti di f . Se v_1, \dots, v_p sono autovettori relativi risp. a $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ allora $\{v_1, \dots, v_p\}$ sono indipendenti.

Dim. Ricorsiva sull' indice degli autovalori.

- 1) $\{v_1\}$ è linearmente indipendente in quanto $v_1 \neq 0$
- 2) $\forall i \geq 1$ se l' insieme di autovettori

se $i=1$

dovuta:

$\{v_1\}$ indip.
relativo a λ_1 , è lin. indipendente e v_1 è un autovettore
autovett. di f relativo a un autovalore λ che dipende
rel. ad
dipendente di v_1, \dots, v_i , esistono $k_1, \dots, k_i \in \mathbb{R}$ t.c.
da v_1 :
 $v_1 = k_1 v_1$

$$\{v_1, \dots, v_i\}$$

Quindi

$$f(v) = \begin{cases} k_i f(v_i) = k_i \lambda_i v_i \\ \lambda v = \lambda(k_i v_i) \end{cases} \quad f(v) = \begin{cases} k_1 f(v_1) + \dots + k_i f(v_i) = k_1 \lambda_1 v_1 + \dots + k_i \lambda_i v_i \\ \lambda v = \lambda(k_1 v_1 + \dots + k_i v_i) = k_1 \lambda v_1 + \dots + k_i \lambda v_i \end{cases}$$

\downarrow leguagliando e raccogliendo i coefficienti dei vettori:
 $k_1 \lambda_1 v_1 = k_1 \lambda v_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(\lambda_1 - \lambda)v_1 = 0 \\ k_1 \neq 0 \end{array} \right. \quad k_1(\lambda_1 - \lambda)v_1 + \dots + k_i(\lambda_i - \lambda)v_i = 0$$

e poiché $\{v_1, \dots, v_i\}$ sono indipendenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(\lambda_1 - \lambda) = 0 \\ k_1 \neq 0 \text{ poiché } v_1 \text{ è autovett.} \\ \vdots \\ k_i(\lambda_i - \lambda) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lambda_1 - \lambda = 0$$

Non tutti i k_1, \dots, k_i sono = 0 poiché altrimenti

Nota: se $\left\{ \begin{array}{l} k_j \neq 0, \\ k_1 = \dots = k_{j-1} = k_{j+1} = \dots = k_i = 0 \end{array} \right.$
poiché gli altri val. sono 0.

$v = 0$ non sarebbe un autovettore. Se $k_j \neq 0$ si deve avere $\lambda_j - \lambda = 0$, cioè v non è relativo a un autovalore distinto dai precedenti; quindi

se v_{i+1} è un autovettore rel. ad un autovalore

$\lambda_{j+1} \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_i\}$ è certo indipendente da $\{v_1, \dots, v_i\}$

COROLL. Sia $f: V \rightarrow V$ un endone di V e sia $\dim V = n$.

Se f ha n autovalori distinti è certamente diagonalizzabile.

In fatti corrispondentemente si trovano n autovettori indipendenti che formano una base di autovettori.

Se f non ha n autovalori distinti dipenderà dalla dimensione degli autospazi. Se gli autovalori sono $k: \lambda_1, \dots, \lambda_k$ e

$$\dim V_{\lambda_1} + \dots + \dim V_{\lambda_k} = n$$

allora f è diagonalizzabile. Altrimenti no.

Concretamente, come trovi gli autovalori e gli autovettori?

Osservo che se rispetto a una base $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ l'endomorfismo è rappresentato da una matrice A , trovare gli autovettori significa trovare

$$\underline{v} = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \neq 0$$

t.c.

$$f(\underline{v}) = (a_1, \dots, a_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \underline{v} = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

cioè, dato che $\{a_1, \dots, a_n\}$ è una base e quindi i vettori si rappresentano in modo unico come loro comb. lin.:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

esempio
 $\lambda I_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \dots$

che posso riscrivere $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ cioè

$$(A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voglio NON avere solo le sol. $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$; quindi devo

chiedere

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

(AL-118)

NOTA . Se cambio base : $B = (b_1, \dots, b_n)$ si avrà

$$(b_1, \dots, b_n) = (a_1, \dots, a_m) P$$

e

$$(a_1, \dots, a_m) = (b_1, \dots, b_n) P^{-1}$$

da cui

$$\begin{aligned} (f(b_1), \dots, f(b_n)) &= (f(a_1), \dots, f(a_m)) P = \\ &= (a_1, \dots, a_m) AP = \\ &= (b_1, \dots, b_n) P^{-1}AP \end{aligned}$$

Quindi cambiando base e procedendo come sopra, con $v = b_1 y_1 + \dots + b_n y_n$ dovrò risolvere un sistema del tipo

$$(P^{-1}AP - \lambda I_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con la condizione che non ci sia solo la sol. nulla, cioè

$$(\star) \quad \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = 0$$

Poiché $I_n = P^{-1}I_n P$ posso riscrivere

$$\det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = 0$$

e per il teor. di Biinet

$$(\det P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det P = 0$$

Ma $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$ quindi si vede che la condizione (\star) equivale a quelle date a inizio pagina . Cioè :

L'equazione che serve per determinare gli autovalori di f non dipende dalla base rispetto a cui (nel dominio e nel codom.) si rappresenta f .

L'eq. $\det(A - \lambda I_n) = 0$ è detta equazione caratteristica di f (o di A indifferentemente). AL 119

È un'equazione polinomiale di grado n e quindi ha al più n radici reali (eventualmente coincidenti del tutto o in parte).

Una volta risolta l'eq. caratteristica (cioè determinati TUTTI gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ di f) per ciascun autovalore si deve determinare il corrispondente autospazio, risolvendo il sistema

$$(A - \lambda_i I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, p \\ n \leq m \end{matrix}$$

e poi si deciderà della dimensione dei V_{λ_i} .

ATTENZIONE 1: se la sol. del sistema fornisce come sol. solo il vettore nullo, o si è sbagliata la sol. del sistema o si è sbagliato a determinare l'autovalore.

ATTENZIONE 2: Se il numero di autovalori trovati è $> n$ si è commesso qualche errore nella sol. dell'eq. caratteristica.

DEF. Il numero di volte in cui il fattore $(\lambda - \lambda_i)$ compare nella scomposizione del polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I_n)$ è detto multiplicità algebrica di λ_i ; La dimensione dell'autospazio di λ_i , $\dim V_{\lambda_i}$, è detta multiplicità geometrica di λ_i .

In generale la mult. geom. di λ_i è \leq della mult. algebrica di λ_i . Lo spieghiamo su un es.

Considero un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V di dimensione 4 che abbia un autovalore λ_1 con molteplicità geometrica 2.

Ciò significa che $\dim V_{\lambda_1} = 2$ cioè che V_{λ_1} ha una base formata da due autovettori v_1 e v_1' .

Completo la base $\{v_1, v_1'\}$ a una base di V :

$$\{v_1, v_1', v_3, v_4\}$$

e rappresento f rispetto a tale base; si avrà

$$(f(v_1), f(v_1'), f(v_3), f(v_4)) = (v_1, v_1', v_3, v_4) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico della matrice così trovata è

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \lambda_1 - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)^2 \cdot [(a_{33} - \lambda)(a_{44} - \lambda) - a_{34}a_{43}]$$

e quindi la molteplicità algebrica di λ_1 è ALMENO 2, ma non posso escludere che sia superiore (anche = 4).

Esempio con $\lambda_1 = 5$, $\dim V_5 = 2$ e molt. alg. di 5 uguale a 3:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 5I_4) = (5-\lambda)^3(2-\lambda)$$

$$\text{ma } (A - 5I_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

cioè l'autospazio V_5 è dato dai vettori della forma

$$\begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim V_5 = 2.$$

Esempio con $\lambda_1 = 5$, $\dim V_5 = 2$ e molt. alg. di 5 uguale a 4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - 5I_4) = (5-\lambda)^4$$

$$\text{ma } (A - 5I_4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(AL 121)

Perché $f: V \rightarrow V$ sia diagonalizzabile è NECESSARIO
che ogni suo autovalore abbia molteplicità geometrica
UGUALE alle molteplicità algebrica: infatti come
mostra l'esempio precedente se $\lambda < n$ il numero di
autovettori indipendenti è $< n$ e quindi non può essere
una base di V .

Ma NON È SUFFICIENTE

Esempio. L'endomorfismo di \mathbb{R}^3 rappresentato rispetto
alle basi standard da

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ha pol. caratteristico $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2 + 4)$

Questo ha la sola radice reale $\lambda=5$, che è quindi
l'unica autovalore di A , con molteplicità algebrica
1 e quindi con mult. geometrica uguale alla mult.
algebrica (infatti la dimensione di un autospazio
non può essere < 1 , dato che deve contenere rettori $\neq 0$)
Quindi ogni autovalore di questo endomorfismo ha
molteplicità geometrica uguale a quella algebrica
MA f non è diagonalizzabile poiché c'è un solo
autovettore indipendente e non 3 come servirebbe in
questo caso.

Quindi il check: $\forall i \text{ m.g.}(d_i) = \text{m.a.}(d_i)$ è solo
un diagnostico, cioè se per un i è falso allora
 f non è diagonalizzabile. Per poter concludere
che f è diagonalizzabile questo check deve sempre dare
esito VERO e inoltre la somma di tutte le m.g. deve essere n.

Esercizi

1a) Determinare autovalori e autovettori dell'endom.

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentato rispetto alla base canonica

$$\text{da } A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

b) f è diagonalizzabile?

2) Idem con la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3a) Determinare autovalori e autovettori dell'endom.

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato risp. alla base canonica da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

b) f è diagonalizzabile?

c) se sì, si denoti con P la matrice ottenuta accostando le colonne formate con i tre autovettori. Che legame c'è tra A , P e la matrice d'agonale degli autovalori? (*)

4) Determinare per quali valori del parametro reale k è diagonalizzabile la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -9 & 3 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(*) Ripetere quanto visto a pag AL118, con \mathcal{Q} base canonica e \mathcal{B} base degli autovettori

L'insieme $\{B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ per cui } B = P^{-1}AP\}$ è detto insieme delle matrici simili ad A . La similitudine è una rel. di equivalenza su $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e ogni sua classe di equiv. è data da tutte le matrici che possono rappresentare lo stesso endomorfismo di \mathbb{R}^n .

(AL123)

5. Stabilire se l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentato dalla matrice $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi ordinate

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \text{ nel dominio}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ nel codominio}$$

è diagonalizzabile.

NOTA: prima di partire con la ricerca degli autovalori devo trovare una matrice rappresentativa di f rispetto alla stessa base nel dominio e nel codominio.

6. Considera le basi di \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ e } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esistono in \mathbb{R}^3 vettori $\neq \underline{0}$ che abbiano le stesse componenti x, y, z rispetto alla base canonica e

a) rispetto ad \mathcal{A} ?

b) rispetto a \mathcal{B} ?

E quanto chiedere se tra gli autovalori delle matrici che si ottiene accostando i vettori di \mathcal{A} (risp. di \mathcal{B}) c'è l'autovalore 1

7. Considera l'endomorfismo $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito

da

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} w \\ y-z \\ z-y \\ x \end{pmatrix}$$

Determina una base di \mathbb{R}^4 di autovettori di f .

Perché il testo non dice "stabilire se esiste" bensì "determina" (sottointendendo che certamente esiste)?

SOL. esercizio 1

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2)) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Cercare autovalori e autovettori.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-\lambda & -5 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -5 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-2-\lambda) - 4(-5) = \\ = \lambda^2 - 5\lambda - 14 + 20 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

è il polinomio caratteristico: grado 2 (come l'ordine della matrice) ed è reale perché si calcola il det. si moltiplicano tutti i " λ " che compaiono lungo la diagonale principale.

L'equazione caratteristica: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ha sol.

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Questi sono gli autovalori diff. Sono distinti \Rightarrow 2 autospazi indipendenti in \mathbb{R}^2 \Rightarrow matrice diagonalizzabile.

Autospazio relativo a $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 7-2 & -5 \\ 4 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \right\}$: di questi sono autovettori relativi a 2 quelli con $h \neq 0$

Autospazio relativo a $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 7-3 & -5 \\ 4 & -2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4x_1 = 5x_2 \Rightarrow$$

$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 5k \\ 4k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}$: di questi sono autovettori relativi a 3 quelli con $k \neq 0$

una base di autovett. indip. è $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Si ha $(f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2)) = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.