

2.  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

polinomio caratteristico:  $|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2$

autovalori:  $\lambda = 3$  con molteplicità algebrica 2

autospazio relativo a  $\lambda = 3$ :  $\begin{pmatrix} 3-3 & -1 \\ 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow V_3 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

autovettori relativi a  $\lambda = 3$ :  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  con  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

La dimensione dell'autospazio (= molteplicità geometrica) è  $1 \leq m.a. = 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  la matrice NON è diagonalizzabile,

La cosa è vera in generale di tutte le matrici triangolari (alte o basse) NON diagonali, che hanno tutti gli elementi sulla diagonale uguali.

3. a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

polinomio caratteristico:  $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 0 & 9 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 9) = -(\lambda-3)^2(\lambda+3)$ .

autovalori:  $\lambda_1 = -3$  con mult. algebr. 1;  $\lambda_2 = 3$  con mult. algebr. 2

autospazio relativo a  $\lambda_1 = -3$ :  $\begin{pmatrix} 3+3 & 0 & 0 \\ 0 & +3 & 1 \\ 0 & 9 & +3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x=0 \\ 3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow V_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ -3h \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{R} \right\}$

autovettori relativi a  $\lambda_1 = -3$ :  $\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ -3h \end{pmatrix}$ ,  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

autospazio relativo a  $\lambda_2 = 3$ :  $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3y+z=0 \Rightarrow V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ l \\ 3l \end{pmatrix} \mid k, l \in \mathbb{R} \right\}$

autovettori relativi a  $\lambda_2 = 3$ :  $\begin{pmatrix} k \\ l \\ 3l \end{pmatrix}$  con  $k, l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . In particolare una base di  $V_3$  è data dai vettori  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

b) La matrice A è diagonalizzabile perché:

m.a. (-3) = 1 = m.g. (-3)

m.a. (3) = 2 = m.g. (3) : la dimensione di  $V_3$  è 2!

m.g. (-3) + m.g. (3) = dim  $\mathbb{R}^3$

c) Formulazione del quesito imprecisa (non si sa "chi" siano i 3 autovettori),

Va ri formulato dicendo "le colonne formate da 3 autovettori che costituiscono una base di  $\mathbb{R}^3$ ".

Ora una base raffatta si ottiene unendo una base di  $V_{-3}$  e una di  $V_3$ , ades:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ : denotiamo tali vettori ordinatamente con  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ . Allora:

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Se  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  si ha  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) P$  e quindi  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) P^{-1}$

Quindi, usando la linearità di f si vede che (\*) si riflette:

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)) \cdot P = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{cioè}$$

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2), f(\underline{e}_3)) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \quad (\text{Attenzione all'ordine nel prodotto! Non è commutativo!})$$

Poiché rispetto alla base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  l'app. lin. f è rappresentata da A ed è unica la matrice che rappresenta un'app. lin. rispetto a basi fissate, si ha

$$P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = A \quad \text{o anche } \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

E' chiaro che la relazione  $\sim$  su  $M_{n,n}(\mathbb{R})$  definita da

$$A \sim B \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ per cui } B = P^{-1}AP$$

è

1) Riflessiva: prendere  $P = I$

2) Simmetrica: sostituire a  $P$  la sua inversa e ricordare che  $(P^{-1})^{-1} = P$

3) Transitiva: se  $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$  per cui  $B = P^{-1}AP$  e  $C = Q^{-1}BQ$  si ha sostituendo la prima nella seconda:  $C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ)$ , cioè  $A \sim C$ .

Le classi di equivalenza sono formate da tutte le matrici simili a una data; forse pensare la matrice "rappresentante" delle classi come quelle che rappresentano un endomorfismo di  $\mathbb{R}^n$  rispetto alle basi canonica e le altre come quelle che lo rappresentano rispetto a tutte le possibili basi di  $\mathbb{R}^n$ , dato che ogni cambio di base, come appena visto nell'esempio, corrisponde a una matrice invertibile.

4. Il quesito NON chiede il calcolo degli autovettori, bensì di stabilire quando  $A$  è diagonalizzabile. PROCEDURA:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & -9 & 3 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

i) pol. caratteristico di  $A_k$ :  $|A_k - \lambda I| = \begin{vmatrix} k-\lambda & -9 & 3 \\ -1 & k-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \underbrace{[(k-\lambda)^2 - 9]}_{\text{differenza di quadrati}} = (1-\lambda)(k-\lambda-3)(k-\lambda+3)$

ii) autovalori  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = k-3$ ,  $\lambda_3 = k+3$

se sono tutti e 3 a due a due distinti la matrice è diagonalizzabile (c'è un teorema); quando due di essi possono coincidere? Sei:

①  $1 = k-3$ , cioè  $k=4$       ②  $1 = k+3$ , cioè  $k=-2$       ③  $k-3 = k+3$ : MAI

ricci) Dobbiamo valutare a parte i casi ① e ②.

①.  $\boxed{k=4}$   $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  ha molteplicità algebrica 2. Ne determiniamo quelle geometrie calcolando la dimensione dell'autospazio relativo a 1,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9y - z \\ x = 3y + z \end{cases} \Rightarrow V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3h \\ h \\ 0 \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \right\}$$

una base di  $V_1$  è fornita ad es. dal solo vettore  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   $\Rightarrow$  multpl. geom. = 1.

Dato che: m.a. (1) = m.g. (1), anche se

m.a. ( $\lambda_3$ ) = 1 = m.g. ( $\lambda_3$ ) (non serve verificare l'uguaglianza poiché

Vale sempre che  $1 \leq \mu.g.(\lambda) \leq \mu.g.(\lambda)$ )

si ha che  $A_4$  <sup>NON</sup> è diagonalizzabile,

②  $\boxed{k=-2}$   $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$  ha molteplicità algebrica 2. Ne determiniamo quelle geometrie calcolando la dimensione dell'autospazio relativo a 1,

$$A_{-2} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = x + 3y \Rightarrow V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ h+3k \\ 0 \end{pmatrix}, h, k \in \mathbb{R} \right\}$$

una base di  $V_1$  è fornita ad es. dai due vettori  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$   $\Rightarrow$  multpl. geom. = 2.

Dato che: m.a. (1) = m.g. (1) = 2

m.a. ( $\lambda_2$ ) = m.g. ( $\lambda_2$ ) = 1 ...

e  $m.g. (1) + m.g. (\lambda_2) =$  ordine della matrice

si ha che anche  $A_{-2}$  è diagonalizzabile.

Quindi la matrice è diagonalizzabile  $\forall k \in \mathbb{R}$  con  $k \neq 4$ .

5. Per ipotesi:

$$(f(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix})) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Per rappresentare  $f$  rispetto alla base canonica in dominio e codominio osserviamo che  $(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2)) = (f(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}), f(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix})) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cioè

$$(f(\underline{e}_1), f(\underline{e}_2)) = (\underline{e}_1, \underline{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

*Ci si arriva più facilmente sfruttando la linearità di  $f$ :*  
 $f(\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; f(\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Polinomio caratteristico di  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ :  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$

autovalore:  $\lambda = -1$  con multiplicità algebrica 2.

autospazio:  $\begin{pmatrix} 1+1 & -1 \\ 4 & -3+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2x \Rightarrow V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} h \\ 2h \end{pmatrix}, h \in \mathbb{R} \right\}$

che di dimensione 1. Quindi  $\text{m.a.}(-1) = 1 < \text{m.a.}(-1) = 2 \Rightarrow$  endomorfismo non diagonaleizzabile.

$$6. Q = \left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; B = \left\{ \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dire che  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ha le stesse componenti rispetto alla base canonica e ad  $Q$  significa

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{u}_1 x + \underline{u}_2 y + \underline{u}_3 z = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cioè: la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  ha l'autorivale 1? Analogamente per  $B$ ,

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) : \text{risposta AFFERMATIVA.}$$

$$\text{Nel caso di } B, \text{ invece, si ha } \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) : \text{risposta NEGATIVA.}$$

[I quesiti 1 e 7 sono stati molti a lesione: vedere le slides AL123 bis et ter]