

11. MATRICI SIMMETRICHE e MATRICI ORTOGONALI... (AL124)

La risposta alle domande post a fine es. 7 è

"perché si dimostra che tutte le matrici A tali che $A=A^T$ sono diagonalizzabili (e inoltre si possono scegliere gli autovettori in modo che la matrice P ottenuta accostandoli sia tale che $P^T P = I$)".

Diamo dei nomi alle matrici che entrano in questa frase:

DEF. Siano $A, P \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Dico che A è una matrice simmetrica se $A=A^T$.

Dico che P è una matrice ortogonale se $P^T P = I$.

NOTA. La definizione dice che ogni matrice ortogonale è invertibile e $P^{-1} = P^T$.

Inoltre, poiché $PP^{-1} = I$, si vede che $P^T P = I$ implica $PP^T = I$ e viceversa. Quindi usiamo come def. una qualunque delle 2 uguaglianze.

ESEMPLI

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ è una matrice simmetrica

2) $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \pm \sin \theta & \mp \cos \theta \end{pmatrix}$ al variare di θ in $(-\pi, \pi]$

sono tutte le matrici ortogonali di ordine 2.

Infatti se $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

si deve avere $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$

La prima eq. ha per sol. $(a, b) = (\cos \theta, \sin \theta)$;

sostituendo nella terza ho $c \cdot \cos \theta + d \sin \theta = 0$, cioè

$c = -k \sin \theta$, $d = k \cos \theta$ con $k \in \mathbb{R}$;

sostituendo nella terza $k^2 \sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta = 1$
trovo $k = \pm 1$.

(AL125)

PROP1. Sia T_n l'insieme delle matrici simmetriche
 e $O_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici ortogonali di $Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$.

i) $(T_n, +)$ è sottogruppo di $(M_{n \times n}(\mathbb{R}), +)$
 ii) $(O_n(\mathbb{R}), \cdot)$ è " " " $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ gruppo lineare generale

DIM.

i) T_n non è vuoto; ad es. contiene la matrice $O_{n \times n}$.

Siano $A, B \in T_n$, cioè si $A = A^T$ e $B = B^T$:

$$\bullet (A+B)^T = A^T + B^T = A+B \quad \forall A, B \in T_n$$

$$\bullet (-A)^T = -A^T = -A \quad \forall A \in T_n$$

Quindi, essendo verificate le 2 condiz. per che un
 sottosistema di un gruppo abolitivo sia suo sottogruppo,

$(T_n, +)$ è sgr. di $(Mat_{n \times n}(\mathbb{R}), +)$

ii) $O_n(\mathbb{R})$ non è vuoto, ad es. contiene I poiché

$$I I^T = I^T = I$$

Inoltre $\forall P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ cioè tali che

$$P P^T = I = P^T P, \quad Q Q^T = I = Q^T Q$$

si ha

$$\bullet (PQ)(PQ)^T = (PQ)(Q^T P^T) = P(Q Q^T)P^T = P \cdot I \cdot P^T = P P^T = I$$

$$\bullet (P^{-1})(P^{-1})^T = P^T \cdot (P^T)^T = P^T P = I.$$

Nota 1) T_n non è chiuso rispetto al prodotto! Ad es.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \notin T_2 \text{ anche se i 2 fattori } \in T_2$$

2) $O_n(\mathbb{R})$ non è chiuso rispetto alla somma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A \text{ non è tale che } A A^T = I$$

$$(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \circ) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

verificare che è un omom.

• \det è applicazione poiché a ogni $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ corrisponde 1 e 1 o $\det P$

• $P, Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \det(PQ) = \det P \cdot \det Q$
teor di Binet

\Rightarrow è omom. di gruppi

$\ker(\det)$?

$$= \{ P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det P = 1 \} = \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

gruppo ortogonale speciale

è un sottogruppo normale di $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ e il suo nucleo di un omomorfismo.

Nello stesso modo si vede che

$$(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \circ) \xrightarrow{\det} (\mathbb{R}^*, \cdot)$$

è un omomorfismo (suriiettivo poiché $\forall r \in \mathbb{R}^*$

$\begin{pmatrix} r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r \end{pmatrix}$ ha determinante r).

Il suo nucleo è il gruppo lineare speciale $\mathcal{SL}_n(\mathbb{R})$ delle mat. invertibili con determinante 1: è un sottogruppo normale di $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Oss. Se $P \in O_n(\mathbb{R})$ si ha $\det(P P^T) = \det I = 1$.

Ma $\det(P P^T) = \det P \cdot \det P^T = \det P \cdot \det P$.

Quindi se $P \in O_n(\mathbb{R})$, $\det P = \pm 1$.

L'insieme $SO_n(\mathbb{R}) = \{ P \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det P = 1 \}$

costituisce un sottogruppo di $O_n(\mathbb{R})$. Infatti è il nucleo dell'omomorfismo di gruppi moltiplicativi

$$O_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}^* \quad \text{DETTAGLI a pag 126 b's}$$

Es. In $O_2(\mathbb{R})$ si ha $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in (-\pi, \pi] \right\}$

Le altre matrici di $O_2(\mathbb{R})$ costituiscono un laterale di $SO_2(\mathbb{R})$ tramite la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Infatti } \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \forall \theta.$$

Che cosa contraddistingue le matrici ortogonali?

Quando scrivo $P^T P = I$

dico che, se interpreto le righe di P^T come colonne di P e il prodotto righe per colonne come "prodotto colonne per colonne di P " il prodotto di una colonna per se stessa dà 1, per tutte le altre dà zero.

DEF. Siano $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ due vettori di \mathbb{R}^n .

Definisco prodotto scalare di \underline{u} per \underline{v} il numero reale

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

Quanto detto sopra circa $P^T P = I$ si rilegge allora dicendo che il prodotto scalare di due colonne distinte di P è 0 mentre quello di due colonne coincidenti è 1.

OSS. $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$ ed è 0 se e solo se $\underline{v} = \underline{0}$

Infatti $\underline{v} \cdot \underline{v} = v_1^2 + \dots + v_n^2$ in quanto somma di quadrati di numeri reali non è mai < 0 ed è $= 0$ se e solo se tutti i quadrati sono nulli.

DEF. Chiamo NORMA o MODULO di \underline{v} il numero $\sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}}$ e lo denoto con $\|\underline{v}\|$.

Se si pensa al modello di \mathbb{R}^2 come "punti del piano cartesiano" è chiaro che la norma rappresenta la distanza dall'origine, cioè la lunghezza della "freccia" che congiunge l'origine con il punto.

Si può provare che vale la

DISUGUAGLIANZA di CAUCHY-SCHWARTZ. $\forall \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$$(\underline{u} \cdot \underline{v})^2 \leq (\underline{u} \cdot \underline{u})(\underline{v} \cdot \underline{v})$$

cioè, se $\underline{u} \neq \underline{0}$ e $\underline{v} \neq \underline{0}$

$$\frac{(\underline{u} \cdot \underline{v})^2}{\|\underline{u}\|^2 \|\underline{v}\|^2} \leq 1.$$

(dim. a pag. AL127 b.8)

Allora $-1 \leq \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|} \leq 1$

Se $\underline{v} = \underline{u}$ questo numero è 1

se $\underline{v} = -\underline{u}$ " " " è -1

Quindi ha senso interpretare questo numero come coseno dell'angolo θ formato tra \underline{u} e \underline{v} :

$$\cos \theta := \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|}$$

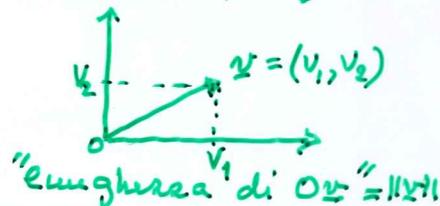
Si ha $\cos \theta = 0$ (cioè i due vettori sono ortogonali) se e solo se $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ (e nessuno dei 2 vettori è nullo).

Immagine della situazione in \mathbb{R}^2 :

$$\underline{v} = (v_1, v_2)$$

$$\underline{v} \cdot \underline{v} = v_1^2 + v_2^2$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



Per induzione su n .

Se $n=2$ $\left(\sum_{i=1}^2 u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^2 u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^2 v_i^2\right)$ poiché

$$(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2$$

$$(u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 = u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + 2u_1 v_1 u_2 v_2$$

sottraendo la seconda dalla prima si ha $u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 v_2 u_2 v_1$

cioè

$$\left(\sum_{i=1}^2 u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^2 v_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^2 u_i v_i\right)^2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \geq 0$$

e vale 0 se e solo se $(v_1, v_2) = k(u_1, u_2)$

Se la disuguaglianza vale per n

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)$$

mostro che vale per $n+1$:

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i^2 + u_{n+1}^2\right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2 + v_{n+1}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) + u_{n+1}^2 v_{n+1}^2 + u_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n v_i^2 + v_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n u_i^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i + u_{n+1} v_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 + u_{n+1}^2 v_{n+1}^2 + 2u_{n+1} v_{n+1} \sum_{i=1}^n (u_i v_i)$$

Sottraggo la seconda dalla prima; tenendo conto che per l'ipotesi induttiva

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i\right)^2 = \kappa^2 \geq 0$$

si ha

$$\begin{aligned} \kappa^2 + \sum_{i=1}^n (u_{n+1}^2 v_i^2 - 2u_{n+1} v_{n+1} u_i v_i + v_{n+1}^2 u_i^2) &= \\ = \kappa^2 + \sum_{i=1}^n (u_{n+1} v_i - v_{n+1} u_i)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

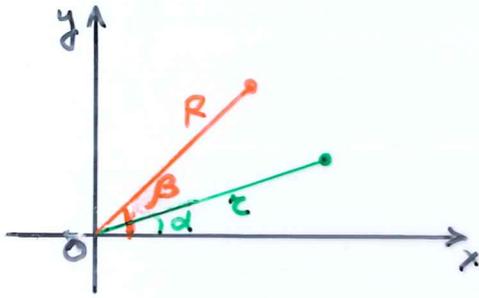
Cioè $\left(\sum_{i=1}^{n+1} u_i v_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n+1} u_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n+1} v_i^2\right)$.

Per induzione l'enunciato vale $\forall n$.

(Se nell'ipotesi induttiva aggiungo che vale = se e solo se $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ riesco anche a provare che anche per $n+1$ vale la stessa proprietà)

Interpretazione geometrica del teor. di Cauchy-Schwartz.

In \mathbb{R}^2 posso rappresentare \underline{u} e \underline{v} in notazione polare



$$\underline{u} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

$$\underline{v} = (R \cos \beta, R \sin \beta)$$

L'angolo tra i due vettori è $\theta = \beta - \alpha$
mentre $r = \|\underline{u}\|$, $R = \|\underline{v}\|$

In questo caso

$$\begin{aligned} \underline{u} \cdot \underline{v} &= (r \cos \alpha)(R \cos \beta) + (r \sin \alpha)(R \sin \beta) = \\ &= rR (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= rR (\cos(\beta - \alpha)) \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \|\underline{v}\|} = \frac{rR \cdot \cos(\beta - \alpha)}{rR} = \cos(\beta - \alpha)$$

Ciò dice che la definizione data rispetta quel che sappiamo, almeno nel caso bidimensionale.

Tra l'altro, il fatto che $\underline{u} \cdot \underline{v} = rR \cos \theta$ dice anche che il prodotto scalare che abbiamo definito coincide (sempre almeno nel caso bidimensionale, ma è facile vederlo anche in 3D) con quello definito dai fisici ad es. per descrivere il lavoro di una forza (prodotto scalare del vettore forza per il vettore spostamento, cioè modulo della forza per modulo dello spostamento per il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori).

PROP. 2. Siano $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ n vettori ^{non nulli} di \mathbb{R}^n a due a due ortogonali: $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0 \quad \forall i \neq j$. Allora $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di \mathbb{R}^n (A1128)

DIM. Basta provare che gli n vettori sono indipendenti.

Se $k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n = \underline{0} \quad (k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R})$

si ha

$$(*) \quad (k_1 \underline{v}_1 + \dots + k_n \underline{v}_n) \cdot \underline{v}_i = \underline{0} \cdot \underline{v}_i = 0$$

D'altra parte il prodotto scalare è bilineare

(cioè $\forall h, k \in \mathbb{R}, \forall \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ si verifica facilmente

che $(h\underline{u} + k\underline{v}) \cdot \underline{w} = h\underline{u} \cdot \underline{w} + k\underline{v} \cdot \underline{w}$ e

$$\underline{u} \cdot (h\underline{v} + k\underline{w}) = h\underline{u} \cdot \underline{v} + k\underline{u} \cdot \underline{w})$$

quindi (*) diventa

$$k_1 \underbrace{\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_i}_{=0} + \dots + k_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i + \dots + k_n \underbrace{\underline{v}_n \cdot \underline{v}_i}_{=0} = 0$$

Poiché i vettori sono a due a due ortogonali resta:

$$k_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = 0$$

e poiché $\underline{v}_i \neq \underline{0}$ si ha $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_i \neq 0$: dunque $k_i = 0$.

Ripetendo per $i = 1, \dots, n$ si trova che l'unica comb.

lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ che dà $\underline{0}$ è quella con

coefficienti tutti nulli \Rightarrow i vetti. sono indip.

c.v.d.

Quindi se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono a due a due ortogonali

siamo in presenza di una base di \mathbb{R}^n che verrà

etichettata come "base ortogonale di \mathbb{R}^n ".

Ci sono infinite basi ortogonali in \mathbb{R}^n .

ESEMPIO. In \mathbb{R}^2 sono basi ortogonali: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, e in generale $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -kb \\ ka \end{pmatrix} \right\}$ con

$a, b, k \in \mathbb{R}, k \neq 0$.

PROP.3 In ogni sottospazio di \mathbb{R}^n si può individuare una base ortogonale.

DIM. Supponiamo per comodità espositiva che il sottospazio U abbia dimensione 3 (generalizzare poi al caso $r \leq n$). Sia $\{u_1, u_2, u_3\}$ una base di U . Se non è ortogonale ne costruisco una a partire da questa, che sia ortogonale, con:

1) prendo $v_1 = u_1$

2) prendo $v_2 = u_2 + c_{12} v_1$
e chiedo che c_{12} sia tale che $v_1 \cdot v_2 = 0$:

$$v_1 \cdot (u_2 + c_{12} v_1) = 0 \iff v_1 \cdot u_2 + c_{12} v_1 \cdot v_1 = 0 \iff c_{12} = - \frac{v_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_1}$$

Ricordare che essendo $v_1 \neq 0$, $v_1 \cdot v_1 \neq 0$.

Inoltre è "ovvio" che $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$

3) prendo $v_3 = u_3 + c_{13} v_1 + c_{23} v_2$ e chiedo che c_{13}, c_{23} siano tali che

$$\begin{cases} v_1 \cdot v_3 = 0 \implies v_1 \cdot u_3 + c_{13} v_1 \cdot v_1 + c_{23} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \implies v_2 \cdot u_3 + c_{13} v_1 \cdot v_2 + c_{23} v_2 \cdot v_2 = 0 \end{cases}$$

Per costruzione $v_1 \cdot v_2 = 0 \implies$

$$c_{13} = - \frac{v_1 \cdot u_3}{v_1 \cdot v_1} \quad c_{23} = - \frac{v_2 \cdot u_3}{v_2 \cdot v_2}$$

Quindi in questo caso $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e quindi ho trovato 3 vettori a due a due ortogonali che generano U e quindi sono una base di U . e.v.d.

In generale nel processo di ortogonalizzazione di una base $\{u_1, \dots, u_n\}$, l' i -esimo vettore è:

$$v_i = u_i - \frac{v_1 \cdot u_i}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \dots + \frac{v_{i-1} \cdot u_i}{v_{i-1} \cdot v_{i-1}} v_{i-1}$$

è detto coefficiente di FOURIER di u_i rispetto a v_j .
 $c_{ji} = - \frac{v_j \cdot u_i}{v_j \cdot v_j}$

perché $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w=0 \right\}$ è certamente un
 ssp. retto. di \mathbb{R}^4 ?

Perché è il nucleo dell'applicazione lineare $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = x+y+z+w$$

e il nucleo è un ssp. retto. (eventi. associare a g la matrice
 rappresentativa rispetto alla base standard: $(1 \ 1 \ 1 \ 1)$
 per vederlo meglio).

Trovata la base di U : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

le si può ortogonalizzare anche senza conoscere i
 coeff. di Fourier (ma il metodo Sì!)

Sostituisco il 2° vettore con

$$v_2 = u_2 + c_{12}u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ 1 \\ 0 \\ -1-c_{12} \end{pmatrix} \text{ e chiedo } v_2 \cdot u_1 = 0$$

$$v_2 \cdot u_1 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ 1 \\ 0 \\ -1-c_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = c_{12} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1-c_{12})(-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2c_{12} + 1 = 0 \quad \Rightarrow c_{12} = -\frac{1}{2}$$

notate che $(u_2 + c_{12}u_1) \cdot u_1 = u_2 \cdot u_1 + c_{12}u_1 \cdot u_1 = 0$
 significa che $c_{12} = -\frac{u_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}$

$$\text{Dunque } v_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Riparto da $v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ e allora u_3

in modo che:

$$v_3 = u_3 + av_1 + bv_2 \text{ sia tale che } \begin{cases} v_3 \cdot u_1 = 0 \\ v_3 \cdot v_2 = 0 \end{cases}$$

Cioè

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b/2 \\ b \\ 1 \\ -1-a-b/2 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$\begin{cases} (a-b/2) \cdot 1 + b \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-1-a-b/2)(-1) = 0 \\ (a-b/2) \cdot (-1/2) + b \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1-a-b/2)(-1/2) = 0 \end{cases}$$

Risolvo e
 sostituisco
 $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$ in v_3

DEF. Sia $\{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ una base ortogonale di \mathbb{R}^n (AL 130)

Dico che $\{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ è una base ortonormale se si ha anche che ogni vettore della base ha norma 1, cioè se

$$\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

ESEMPIO. $\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^2 ; invece $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ non è una base ortonormale di \mathbb{R}^2 .

Per normalizzare una base ortogonale basta dividere ogni vettore per la sua norma.

Nell'esempio precedente $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2+1^2} = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$.

Quindi la corrispondente base ortonormale è $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

ESERCIZIO. Determinare una base ortonormale per il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w=0 \right\}$$

Sol. 1) Il più generale vettore di U ha la forma:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -x-y-z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

quindi una base di U è $\left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

2) ortogonalizzo prendendo $\underline{v}_1 = \underline{u}_1$,

$$\underline{v}_2 = \underline{u}_2 - \frac{\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1} \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0+0+0+1}{1+0+0+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_3 &= \underline{u}_3 - \frac{\underline{u}_3 \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1} \underline{u}_1 - \frac{\underline{u}_3 \cdot \underline{u}_2}{\underline{u}_2 \cdot \underline{u}_2} \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0+0+0+1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0+0+0+1/2}{1/4+1+1/4} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Divido ciascuno dei tre vettori della base

ortogonale di U :

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

per la sua norma:

$$\|\underline{v}_1\| = \sqrt{2} \quad \|\underline{v}_2\| = \sqrt{3/2} \quad \|\underline{v}_3\| = \sqrt{4/3}$$

e ottengo la base ortonormale:

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2/3} \\ \sqrt{3/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} -1/2\sqrt{3} \\ -1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

Se mi piace di più posso prendere

$$\underline{w}'_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}'_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{3/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}'_3 = \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

Che cosa produce cercare una base ortonormale di un sottospazio di \mathbb{R}^n ?... E' come trovare un nuovo sistema di riferimento cartesiano monometrico (valido in quel sottospazio) con la stessa unità di misura che avevo in \mathbb{R}^n .

ESEMPIO. $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Così vedo U generato dai due vettori

$$\underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{che stanno in } xOz \text{ e } yOz \text{ e}$$

che non sono ortogonali poiché

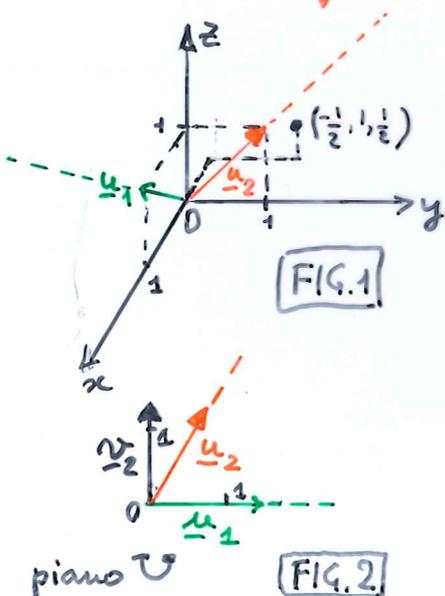
$$\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0 + 0 + 1 \neq 0.$$

Quasi, visto che $\|\underline{u}_1\| = \|\underline{u}_2\| = \sqrt{2}$ si vede che $\cos \hat{\underline{u}_1, \underline{u}_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ l'angolo tra i 2 è $\frac{\pi}{3}$

Sul piano U ho questa situazione (FIG. 1)

Ortogonalizzando trovo il vettore $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ che è ortogonale a \underline{u}_1 e ha norma $\sqrt{3/2}$.

Normalizzando individuo 2 vettori che nel piano U giocano lo stesso ruolo di $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ in \mathbb{R}^2 .



PROP. 4 Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica,
 λ_1, λ_2 due autovalori distinti di A e $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^n$
 due autovettori relativi rispettivamente a λ_1 e λ_2 .
 Allora \underline{v}_1 e \underline{v}_2 sono ortogonali (rispetto al
 prod. scalare definito in \mathbb{R}^n).

Dem. Per ipotesi: $A \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1$, $A \underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2$

Considero i due prodotti scalari

$$\left. \begin{aligned} \text{di } A \underline{v}_1 \text{ per } \underline{v}_2 & : (A \underline{v}_1)^T \underline{v}_2 = \underline{v}_1^T A^T \underline{v}_2 \\ \text{di } \underline{v}_1 \text{ per } A \underline{v}_2 & : \underline{v}_1^T A \underline{v}_2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{prodotti righe} \\ \text{per colonne} \end{array}$$

Poichè $A = A^T$, sono uguali.

$$\begin{aligned} \text{D'altra parte } A \underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 & \Rightarrow \underline{v}_1^T A^T = \lambda_1 \underline{v}_1^T \\ A \underline{v}_2 = \lambda_2 \underline{v}_2 & \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$(\lambda_1 \underline{v}_1^T) \underline{v}_2 = \underline{v}_1^T (\lambda_2 \underline{v}_2).$$

Gli scalari possono essere messi in evidenza e si ha

$$\lambda_1 (\underline{v}_1^T \underline{v}_2) = \lambda_2 (\underline{v}_1^T \underline{v}_2)$$

$$\text{cioè } (\lambda_1 - \lambda_2) (\underline{v}_1^T \underline{v}_2) = 0.$$

Ma $\lambda_1 \neq \lambda_2$: quindi deve essere $\underline{v}_1^T \underline{v}_2 = 0$ cioè i 2
 vettori devono essere ortogonali. e.o.d.

Abbiamo già detto che ogni matrice simmetrica $A = A^T$
 è diagonalizzabile (si dimostra ma non è immediato).

La PROP. 4 dice che i suoi autospazi sono ortogonali a 2 e 2;
 la PROP. 3 dice che in ogni autospazio posso trovare una
 base ortogonale (e poi normalizzarla).

Facendo l'unione delle basi ortonormali di tutti gli
 autospazi di A si ha quindi una base ortonormale
 di \mathbb{R}^n formata autovettori della matrice simmetrica A .

(*) per la PROP. 2, (autovettori ortogonali sono indipend. \Rightarrow lo sono quelli di
 autospazi distinti)

ESEMPIO 1. Determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 di autovettori di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Sol. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$
 $= (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6 - 1 - 1) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) =$
 $= (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

Ci sono 3 autovalori distinti; quindi (anche senza aver riconosciuto che A è simmetrica) si vede che A è diagonalizzabile. Poiché $A = A^T$ i tre autospazi saranno ortogonali.

$V_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ -h \\ h \end{pmatrix} \quad h \in \mathbb{R}$

$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R} \right\}$

$V_2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} k, k \in \mathbb{R} \right\}$

$V_4: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ y=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ 2l \\ l \end{pmatrix} \quad l \in \mathbb{R}$

$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} l, l \in \mathbb{R} \right\}$

Si vede che effettivamente $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1-1=0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-2+1=0$,

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-1=0$.

Ma questi 3 vettori non sono ortonormali. Divido

per le loro norme e ho $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

che è una base ortonormale di \mathbb{R}^3 di autovetr. di A

Ce ne sono altre? Sì altre 7. Infatti ogni autospazio ha 2 basi di norma 1: $\{u_i\}$ e $\{-u_i\}$. Alternandole in tutti i modi possibili si hanno $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ basi che sono sol. del problema.

Nota. Ho mostrato che $(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = (e_1, e_2, e_3)A$

Si può rappresentare come

$$(f(u_1), f(u_2), f(u_3)) = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

cioè che $A = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} (u_1, u_2, u_3)^{-1}$

Poiché la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ è ortonormale la matrice ottenuta accostando le colonne è ortogonale, cioè la sua inversa coincide con la trasposta:

$$A = (u_1, u_2, u_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 2. Determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3

di autovettori di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sol. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$ sottraggo la 2ª colonna alle 1ª e la 3ª " alle 2ª
comodo per aver già scomposto

$$= \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 0 & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda-1 & 1 \\ 0 & 1+\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \text{LAPLACE lungo 1ª riga}$$

$$= (1+\lambda)^2 (-\lambda + 1 + 1) = (1+\lambda)^2 (2-\lambda)$$

Ci sono solo 2 autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, quest'ultimo con molteplicità algebrica 2. Dato che la matrice è simmetrica anche la sua molteplicità geometrica sarà 2.

Calcologli autospazi

$$V_2 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h \\ h \end{pmatrix} \quad h \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} h, h \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_{-1}: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ l \\ -k-l \end{pmatrix}, k, l \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} l, k, l \in \mathbb{R} \right\}$$

è come previsto uno spazio bidimensionale.

Gli autovettori evidenziati non hanno norma 1 e i due di V_{-1} non sono tra loro ortogonali.

Ortogonalizzo $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - \frac{v_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0+0+1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Normalizzo i tre vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ tra loro ortogonali:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

almeno! (VEDI p. A1135bis)
è una delle 8 basi ortonormali di \mathbb{R}^3 di autovettori di $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ATTENZIONE. A seconda della base scelta, la matrice ortogonale ottenuta accostando i 3 vettori avrà $\det. = 1$ o -1

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{raccolgendo nelle colonne i coefficienti } 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{6}$$

$$\text{Sommando } c_1 \text{ e } c_3 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} (-2) = 1$$

Y invece

$$\begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{2/3} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{vmatrix} = -1 \quad \text{ecc.}$$

ATTENZIONE: va bene cambiare tutti i segni di una colonna. Quel che non si deve fare è permutare la prima colonna con una delle altre altrimenti non si ha più la base ordinata rispetto alla quale l'endomorfismo $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ è rappresentato da $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ in questo ordine.

Quando, come in questo esercizio, un autospazio ha dimensione > 1 si hanno in realtà infinite scelte di basi ortonormali per l'autospazio.

I vettori di $x+y+z=0$ si possono rappresentare anche dicendo che $y = -x-z$ e quindi come vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ -x-z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

o che $x = -y-z \Rightarrow V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

ma possiamo anche essere più fantasiosi e prendere

come base $\left\{ 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Questa base normalizzata è

$$\begin{pmatrix} -2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{26} \\ 3/\sqrt{26} \end{pmatrix}$$

e porta a una matrice ortogonale molto diversa dalle precedenti:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{14} & -4/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{3} & 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{14} & 3/\sqrt{26} \end{pmatrix} = P$$

Però anche questa diagonalizza A , cioè

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{VERIFICARLO.}$$

A livello pratico ciò significa che è possibile che in situazioni come queste, pur avendo trovato una base corretta, la base non coincida con quella proposta in un'eventuale Sol. dell'esercizio.