

PROVA 2

$$1. X = \{2, 4, 6, 8, 20, 28\} \subseteq \mathbb{N}, \quad R = \{(a, b) \in X^2 \mid a \text{ divide } b\}$$

a) R è rel. d'ordine poiché lo è nell'insieme degli interi positivi di cui X è sottoinsieme e la restrizione a un sottoinsieme di una rel. d'ordine

- ALTERNATIVA:** poiché :
- a divide a (PR. RIFLESSIVA) la è a sua volta
 - se a divide b ($b = ka$ con $k \in \mathbb{N}$) e b divide a ($a = hb$ con $h \in \mathbb{N}$) allora $b = kh$ ha $\Rightarrow kh = 1 \Rightarrow k = h$ cioè $a = b$ (PR. ANTISSIMMETRICA)
 - Se a/b ($a = kb$ con $k \in \mathbb{N}$) e b/c ($c = hb$ con $h \in \mathbb{N}$) allora $c = hka$, cioè a/c (PR. TRANSITIVA).

b) Le coppie in relazione sono

$$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 20), (2, 28); (4, 4), (4, 8), (4, 20), (4, 28); \\ (6, 6); (8, 8); (20, 20); (28, 28)$$

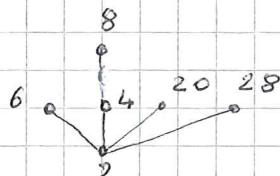
d) $\text{luf}(20, 6) = 2$ poiché $2|20$ e $2|6$ e non ci sono in X altri divisori di 20 e 6 (quindi questo è per forza il più grande).

$$\text{Sup}(2, 4) = 4 \quad \text{poiché } 2|4$$

e) $\min R = 2$ poiché $2|x \forall x \in X$

$\max R$ non esiste poiché in X non c'è ad es. un numero che non divida né 6 né 4 .

• c)



è il diagramma di Hasse di R

f) Per avere un reticolo serve che per ogni coppia di elementi di X esistano inf e sup. Il diagramma di Hasse mostra che per l'inf non ci sono problemi: $\text{luf}(a, b) = 2$ tranne che per la coppia $(4, 8)$ per la quale $\text{luf}(4, 8) = 4$.

Per avere il sup per ogni coppia basta aggiungere a X il $\text{lcm}(6, 8, 20, 28) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840$. Questo è, nell'insieme

$V = X \cup \{840\}$ il sup di $(6, 4)$, $(6, 8)$, $(6, 20)$, $(6, 28)$, $(4, 20)$, $(4, 28)$, $(8, 20)$, $(8, 28)$, $(20, 28)$ ed è $\max R$. Ma il reticolo non è antisimmetrico.

poiché ha 0 (l'elem 2), ha 1 (l'elem 840), ma l'elemento 6 ha più di un complemento (ad es. $\text{Sup}(6,4)=2$, $\text{Sup}(6,4)=840$, $\text{Sup}(6,8)=2$, $\text{Sup}(6,8)=840$)

2. Su $\mathbb{Z}_7[x]$ dividilo $p(x) = x^4 + 3x + 2$ per $d(x) = 4x^2 + 1$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x + 2 \\ - x^4 + 5x^2 \\ \hline 5x^2 + 3x + 2 \\ - 5x^2 - 3 \\ \hline 3x - 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 4x^2 + 1 \\ 2x^2 + 3 \end{array} \right.$$

$p(x) = d(x)(2x^2 + 3) + \underbrace{3x + 6}_{\text{quoziente}} + \underbrace{-1}_{\text{resto}}$

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 &\equiv 8 \equiv 1 \pmod{7} \\ 5 \cdot 3 &\equiv 15 \equiv 1 \pmod{7} \\ -2 &\equiv 5 \pmod{7} \\ 2 \cdot 5 &\equiv 10 \equiv 3 \pmod{7} \\ -1 &\equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}$$

Perciò trovare $\text{MCD}(p, d)$ uso l'algoritmo euclideo delle divisioni successive:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 1 \\ 3x^2 + 6x \\ \hline 6x + 1 \\ - 6x + 2 \\ \hline 3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 3x + 6 \\ 5 \cdot 4x + 2 \end{array} \right.$$

$5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{7}$
 $5 \cdot 4 \equiv -1 \pmod{7}$
 $3 \cdot 6 \equiv -3 \pmod{7}$

$$4x^2 + 1 = \underbrace{(3x + 6)}_{\text{divisore}} \cdot \underbrace{(6x + 2)}_{\text{quoz.}} + \underbrace{3}_{\text{resto}}$$

$3x + 6 = 3(x + 2)$: quindi $\text{MCD}(p, d) = 3$ o (visto che se moltiplico "il" MCD per un elem $\in \mathbb{Z}_7^*$ ho ancora un MCD) : $\boxed{\text{MCD}(p, d) = 1}$,

Quindi è possibile scrivere 1 come $pP + dD$ ($P, D \in \mathbb{Z}_7[x]$)

e ogni altro polinomio $q \in \mathbb{Z}_7[x]$ come $p(pq) + d(qd)$.

Verifichiamo il dettaglio dei conti:

$$3 = (4x^2 + 1) - (3x + 6)(6x + 2) = d(x) - (3x + 6)(6x + 2)$$

$$\text{ma } 3x + 6 = p(x) - d(x)(2x^2 + 3)$$

$$\Rightarrow 3 = d(x) - (6x + 2)(p(x) - d(x)(2x^2 + 3)) =$$

$$= -(6x + 2)p(x) + (1 + (2x^2 + 3)(6x + 2))d(x) =$$

$$= (-x + 5)p(x) + (5x^3 + 4x^2 + 4x)d(x)$$

$$\Rightarrow 1 = 5 \cdot 3 = (5x + 4)p(x) + (4x^3 + 6x^2 + 6x)d(x)$$

$$\Rightarrow 1 = \underbrace{(5x + 4)}_{P(x)}p(x) + \underbrace{(4x^3 + 6x^2 + 6x)}_{D(x)}d(x)$$

$$\begin{aligned} -6 &\equiv 1 \pmod{7} \\ -2 &\equiv 5 \pmod{7} \\ 5 \cdot 5 &\equiv 4 \pmod{7} \\ 5 \cdot 4 &\equiv -1 \pmod{7} \end{aligned}$$

$$3. F_k \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1-k & 1 & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) l'applicazione lineare $F_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è suriettiva se e solo se è iniettiva
 poiché $\dim(\ker F_k) + \dim(\text{Im } F_k) = \dim(\text{dom } F_k) = 3$ e dire F_k
 suriettiva significa $\dim(\text{Im } F_k) = 3 \Rightarrow \dim(\ker F_k) = 0 \Rightarrow$
 $\ker F_k = \{0\}$.

F_k è iniettiva $\Leftrightarrow \det A_k \neq 0$:

$$\det A_k = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2k \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-k & 1 \end{vmatrix} = -2k + 2(-1+1+k) = 0 \quad \forall k$$

Quindi F_k non è MAI iniettiva e quindi non è MAI suriettiva.

b) Chiedere se $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{Im } F_0$ equivale a vedere se è risolubile
 il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

che vado a risolvere col metodo di eliminazione di GAUSS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 1 & 1 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi il sistema è risolubile e le sue soluzioni sono del tipo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2k \\ 2+2k \\ k \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

Queste sono tutte (e sole) le possibili premimmagini di $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto
 a F_0 .

4. $\text{Im } \mathbb{R}_3[x]$ il sottospazio $V = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ha dimensione 3 poiché

$u_1 = x^3$ e $u_2 = x^2 + x$ sono indipendenti in quanto non uno
 multiplo dell'altro e $u_3 = x^2 - 1$ è indipendente dai primi due

poiché $u_3 = a u_1 + b u_2$ porta al sistema $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ b = 0 \\ 0 = -1 \end{cases}$ che è
 impossibile.

Allo stesso modo verifico che $w_1 = x^3 + 1$, $w_2 = x^2 + 1$, $w_3 = x + 1$ sono
 indipendenti e generano quindi un sottospazio W di dim. 3.

In alternativa in entrambi i casi avrei potuto utilizzare l'isomorfismo

di spazi vettoriali $f: \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}^4$ definito da $f(ax^3+bx^2+cx+1) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ e fare

il controllo sulle colonne dei coefficienti. Ad es. nel caso di W si tratta di

$$\text{esaminare } \underline{w}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{w}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo una base di $U+W$. Osservo che $\underline{w}_1 = x^3 + 1$ è indipendente dai

infatti:

$$\text{Vettori di } U; Yx^3 + 1 = a \cdot x^3 + b(x^2+x) + c(x^2-1) \text{ porta al sistema} \begin{cases} 1 = a \\ 0 = b+c \\ 0 = b \\ 1 = -c \end{cases}$$

che è impossibile.

Quindi $\dim(U+W) \geq 4$; d'altra parte $U+W \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ e $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 4 \Rightarrow$
e una base di $U+W$ è $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{w}_1$, ma anche $x^3, x^2, x, 1$!
 $\dim(U+W) = 4$ Per la formula di Grassmann

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 3+3-4 = 2$$

5. Incomincio col determinare gli autovettori della matrice simmetrica M :

$$|M-\lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)[(\lambda-1)^2 - 1] = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Determino gli autovettori corrispondenti

$$\lambda=0 \quad \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} k \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda=1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} h \quad h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lambda=2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} l \quad l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Gli autovettori relativi ad autovoltori distinti

(sono a 2 a 2 ortogonali (suvv! La matrice è simmetrica!))

Per trovare una base ortonormale basta prendere 1 vettore per ciascun autospazio e normalizzarlo. Ad es. delle base

di autovettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ si pensa alla base ortonormale

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$