Complementi di Matematica e Calcolo Numerico A.A. 2018-2019

Laboratorio 11 Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Cosideriamo il seguente **Problema di Cauchy**:

Trovare una funzione $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \in C^1(I)$ tale che

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $I = [t_0, t_{max}] \subset \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ ed $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione assegnata.

Per approssimare la soluzione di un tale problema con un metodo numerico suddividiamo I in piccoli sottointervalli, scegliamo $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_{max}$ e ci limitiamo ad approssimare il valore della soluzione $y(t)$ nei nodi t_n, per n $= 0, \dots$ N. Chiamiamo $y_n \simeq y(t_n)$ tale valore approssimato. Un metodo numerico fornisce le approssimazioni $y_0, y_1, \dots, y_N$ della soluzione nei nodi $t_0, t_1, \dots, t_N$

Matlab fornisce alcune funzioni predefinite a tale scopo tra cui `ode45`

Sintassi: **[T,Y] = ode45(fun,tspan,y0)**,

input: `fun` $= f(t,y)$ funzione data di due variabili

`tspan` $= [t_0, t_{max}] = I$ intervallo dato

y_0 condizione iniziale del problema

output: $T = [t_0, t_1, \dots, t_N]'$ vettore colonna dei tempi

$Y = [y_0, y_1, \dots, y_N]'$ vettore colonna della soluzione approssimata agli istanti in T

Si considerino i seguenti problemi di Cauchy, che useremo come esempi di riferimento:

$$\begin{cases} y'(t) = -2ty^2(t) & t \in [0,2], \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{Sol:} \quad y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = -25\, y(t) & t \in [0,2], \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{Sol:} \quad y(t) = e^{-25t}$$

Esercizio 1

Si realizzi uno script file che approssimi la soluzione di un problema di Cauchy (vedi gli esempi di riferimento) utilizzando la function `ode45` di Matlab. Si disegnino nello stesso grafico la soluzione esatta e quella approssimata, si calcoli la norma infinito della differenza tra la soluzione esatta ed approssimata nei tempi di approssimazione.

Scegliamo d'ora in poi di suddividere I in sottointervalli di uguale ampiezza $h > 0$ "piccolo", e consideriamo i punti $t_n = t_0 + n\,h$ per $n = 0, \ldots N$ con $t_N = t_{max}$ che individuano tale discretizzazione dell'intervallo I.

Metodo di Eulero esplicito

A partire da y_0 calcoliamo $y_1, \ldots, y_N$ attraverso la relazione

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(t_n, y_n)$$

Problema

Si scriva una funzione che implementi il metodo di Eulero esplicito.
Sintassi: **[T,Y] = eulero(fun,T,y0)**,

input: `fun` $= f(t, y)$ funzione data di due variabili

$T = [t_0, t_1, \ldots t_N]$ vettore riga dei tempi

y_0 condizione iniziale del problema

output: $T = [t_0, t_1, \ldots, t_N]'$ vettore colonna dei tempi

$Y = [y_0, y_1, \ldots, y_N]'$ vettore colonna della soluzione approssimata agli istanti in T

Esercizio 2

a) Si approssimi la soluzione di ciascun problema di riferimento con il metodo di Eulero esplicito per diversi valori del passo uniforme $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$. Sia y_n la soluzione approssimata agli istanti $t_n = t_0 + nh$, si calcoli il massimo errore di approssimazione commesso nei nodi t_n:

$$e = \max_{n=0,\dots,N} |y(t_n) - y_n|$$

e si compili la seguente tabella:

h	Errore
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	

b) Si stimi l'ordine del metodo e si osservi cosa accade nel secondo esempio per $h = 0.1$, cosa può essere la causa di un tale comportamento dell'errore? Per indagare meglio la situazione si esegua quanto richiesto al punto c).

c) Risolvere nuovamente il secondo problema di Cauchy con il metodo di Eulero esplicito per i seguenti valori di $h = 0.1, 2/25, 0.05, 0.01$.
Tracciare il grafico sovrapposto della soluzione esatta (rosso) della soluzione approssimata con Eulero esplicito (blu) per ogni valore di h.
Si osservino gli andamenti delle soluzioni calcolate. Si noti che per il metodo di Eulero esplicito si evidenziano oscillazioni nella soluzione numerica calcolata per alcuni valori di h. In particolare si noti che per $h = 0.1$ non è

soddisfatta la condizione di assoluta stabilità e le oscillazioni si amplificano al crescere di t. Per $h = 2/25$ abbiamo il caso limite per la condizione sopracitata e le ocillazioni non si amplificano ne si smorzano. Infine per i restanti due valori di h per i quali è soddisfatta la condizione di assoluta stabilità le oscillazioni qualora presenti si smorzano al crescere di t.

Metodo di Eulero implicito

A partire da y_0 calcoliamo $y_1, \ldots, y_N$ attraverso la relazione

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Si noti che ad ogni passo occorre risolvere una equazione non lineare in $Y = y_{n+1}$ utilizzando a tale scopo un opportuno metodo numerico. Ovvero occorre risolvere

$$F(Y) = 0 \qquad \text{con} \qquad F(Y) := Y - y_n - hf(t_{n+1}, Y)$$

A tale scopo si può utilizzare il Metodo di Newton, che richiede la derivata

$$F'(Y) = 1 - h\frac{d\,f}{d\,Y}(t_{n+1}, Y)$$

Pertanto è necessario conoscere la derivata nella seconda variabile del termine noto f. Il passo di Newton per Eulero implicito diventa:

$$Y^{k+1} = Y^k - \frac{Y^k - y_n - hf(t_{n+1}, Y^k)}{1 - h\frac{d\,f}{d\,Y}(t_{n+1}, Y^k)}$$

a partire da $Y^0 = y_n$. Il valore calcolato con il metodo di Newton fornisce l'approssimazione y_{n+1}.

Problema

Si scriva una funzione che implementi il metodo di Eulero implicito, utilizzando il metodo di Newton per risolvere l'equazione non lineare ad ogni passo.

Sintassi: **[T,Y] = eulimp(fun,T,y0,dfy,toll,nitmax)**,

input: `fun` $= f(t, y)$ funzione data di due variabili

$T = [t_0, t_1, \ldots t_N]$ vettore riga dei tempi

y_0 condizione iniziale del problema

`dfy` derivata di f rispetto ad y

`toll` tolleranza per l'arresto di Newton

`nitmax` numero massimo di iterazioni di Newton

output: $T = [t_0, t_1, \ldots, t_N]'$ vettore colonna dei tempi

$Y = [y_0, y_1, \ldots, y_N]'$ vettore colonna della soluzione approssimata agli istanti in T

Esercizio 3

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = -25\,y(t) \quad t \in [0,2], \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{Sol:} \quad y(t) = e^{-25t}$$

Si approssimi la soluzione del problema con il metodo di Eulero implicito per diversi valori del passso uniforme $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$. Si disegni il grafico della soluzione approssimata a confronto con quella esatta. Sia y_n la soluzione approssimata agli istanti $t_n = t_0 + nh$, si calcoli il massimo errore di approssimazione commesso nei nodi di approssimazione:

$$e = \max_{n=0,\ldots,N} |y(t_n) - y_n|$$

e si compili la seguente tabella:

h	Errore
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	

Si stimi l'ordine del metodo.

Esercizio di riepilogo (luglio 2016)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (\cos(2\pi t) - 4t^2)y, & 0 \leq t \leq 5 \\ y(0) = 4, \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(t) = 4\exp\left(\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t) - \frac{4}{3}t^3\right)$.

1. Si approssimi il problema di Cauchy nell'intervallo $[0, 5]$ utilizzando la function Matlab **ode45**. Sia `T` il vettore degli istanti temporali fornito da ode45 e sia `Y` il vettore contenente la soluzione approssimata a tali istanti. Si calcoli l'errore relativo in norma infinito `err` tra la soluzione approssimata e quella esatta. Si riporti in **format short e** il valore massimo assunto dalla soluzione approssimata `Y` ed il valore dell'errore calcolato.

   $Y_{max} =$ `err`=

2. Si approssimi l'integrale $I = \int_0^5 y(t)\, dt$, dove $y(t)$ è la soluzione esatta del problema di Cauchy sopra definito, utilizzando la formula di quadratura dei trapezi composita. A tale scopo si utilizzino le coppie di valori `T, Y` calcolati al punto precedente. Si denoti con I_t il valore calcolato. Si calcolino inoltre il valore I_e ottenuto approssimando l'integrale I con la function `integral` di Matlab e l'errore relativo $\texttt{err}_\texttt{I}$ tra I_t e I_e, prendendo I_e come valore esatto. Si riportino I_t e $\texttt{err}_\texttt{I}$ in **format short e**.

   $I_t =$ $\texttt{err}_\texttt{I} =$

Esercizio di riepilogo (giugno 2015)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y\,\dfrac{2\,t - t^2 - 1}{1 + t^2}, \;\; 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 2/e \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(t) = (1 + t^2)\, e^{-t}$.

1. Si approssimi il problema di Cauchy con il metodo di Eulero esplicito con h=0.005. Si calcoli l'errore in norma infinito err_E tra la soluzione esatta e quella approssimata. Si riporti il valore calcolato in **format short e**.

   $\mathrm{err}_E =$

2. Si consideri la soluzione esatta del problema di Cauchy al punto precedente. Si valuti tale funzione in 10 punti equispaziati nell'intervallo di definizione $[1, 2]$ e si determini la spline lineare $s1$ che interpola la funzione $y(t)$ in tali punti. Si calcoli il valore assunto dalla spline nel punto z=3/2 e l'errore commesso approssimando $y(z)$ con $s1(z)$. Si riportino i valori calcolati in **format short e**.

   $s1(z) =$ $\qquad\qquad$ $|y(z) - s1(z)| =$