# Complementi di Matematica e Calcolo Numerico A.A. 2018-2019

# Laboratorio 12

Cosideriamo il **Problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & t \in I = [t_0, t_{max}], \\ y(t_0) = y_0 & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Scegliamo di suddividere $I$ in sottointervalli di uguale ampiezza $h > 0$, e consideriamo i punti $t_n = t_0 + n\,h$ per $n = 0, \ldots, N$ con $t_N \leq t_{max}$ che individuano una discretizzazione dell'intervallo $I$.

## Metodo di Heun

A partire da $y_0$ calcoliamo $y_1, \ldots, y_N$ attraverso la relazione

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))]$$

Il metodo di Heun è esplicito.

## Problema

Si scriva una funzione che implementi il metodo di Heun.
Sintassi: **[T,Y] = heun (fun,T,y0)**,

**input:** `fun` $= f(t, y)$ funzione data di due variabili

$T = [t_0, t_1, \ldots t_N]$ vettore riga dei tempi

$y_0$ condizione iniziale del problema

**output:** $T = [t_0, t_1, \ldots, t_N]'$ vettore colonna dei tempi

$Y = [y_0, y_1, \ldots, y_N]'$ vettore colonna della soluzione approssimata agli istanti in $T$

## Esercizio 1

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -5\, y(t) \quad t \in [0, 5] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(t) = e^{-5t}$.
Approssimare il problema di Cauchy con il metodo di Heun. Calcolare la norma infinito dell'errore tra la soluzione esatta e quella approssimata in tutti i passi calcolati. Eseguire prove per $h = 0.5, 0.05, 0.005, 0.0005$ e compilare la tabella seguente.

| h | errore Heun |
|---|---|
| 0.5 | |
| 0.05 | |
| 0.005 | |
| 0.0005 | |

Dedurre dalla tabella l'ordine del metodo motivando la risposta.
Spiegare i risultati ottenuti con $h = 0.5$

## Metodo di Crank-Nicolson (o dei trapezi)

A partire da $y_0$ si calcolino $y_1, \ldots, y_N$ attraverso la relazione

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]$$

Il metodo di Crank Nicolson è implicito infatti ad ogni passo occorre risolvere una equazione non lineare in $y_{n+1}$ utilizzando a tale scopo un opportuno metodo numerico. Ovvero occorre risolvere

$$F(Y) = 0 \qquad \text{con} \qquad F(Y) := Y - y_n - \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, Y)]$$

Tenuto conto che

$$F'(Y) := 1 - \frac{h}{2}\frac{df}{dY}(t_{n+1}, Y)$$

il passo di Newton per Crank Nicolson diventa

$$Y^{k+1} = Y^k - \frac{Y^k - [y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)] - \frac{h}{2}f(t_{n+1}, Y^k)}{1 - \frac{h}{2}\frac{df}{dY}(t_{n+1}, Y^k)}$$

a partire da $Y^0 = y_n$.

## Problema

Si scriva una funzione che implementi il metodo di Crank Nicolson utilizzando il metodo di Newton per risolvere l'equazione non lineare ad ogni passo.

Sintassi: **[T,Y] = cranknic(fun,T,y0,dfy,toll,nitmax)**,

**input:** `fun` $= f(t, y)$ funzione data di due variabili

$T = [t_0, t_1, \ldots t_N]$ vettore riga dei tempi

$y_0$ condizione iniziale del problema

`dfy` derivata di $f$ rispetto ad $y$

`toll` tolleranza per l'arresto di Newton

`nitmax` numero massimo di iterazioni di Newton

**output:** $T = [t_0, t_1, \ldots, t_N]'$ vettore colonna dei tempi

$Y = [y_0, y_1, \ldots, y_N]'$ vettore colonna della soluzione approssimata agli istanti in $T$

## Esercizio 2

Si ripeta quanto richiesto nell'Esercizio 1 utilizzando il metodo di Crank Nicolson.

## Esercizio 3

Si considerino i seguenti problemi di Cauchy di riferimento:

$$\begin{cases} y'(t) = t^2[1 - 3y(t)] & t \in [0, 2], \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad \text{Sol:} \quad y(t) = \frac{1}{3}(1 + 5e^{-t^3})$$

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \left(\frac{y(t)}{t}\right)^2 & t \in [e, e + 2], \\ y(e) = e \end{cases} \qquad \text{Sol:} \quad y(t) = \frac{t}{2 - \log(t)}$$

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y(t)}{t} + \pi t \cos(\pi t) & t \in [1, 3], \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{Sol:} \quad y(t) = t \sin(\pi t)$$

Si approssimi la soluzione di ciascun problema con i metodi di Heun e Crank Nicolson per $h = 0.01$. Si disegni il grafico della soluzione approssimata a confronto con quella esatta. Sia `Y` la soluzione calcolata agli istanti del vettore `T` si calcoli il massimo errore commesso $e = ||y(T) - Y||_\infty$

## Esercizio 4 (Esame luglio 2014)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t)(\cos(t) - t), \;\; 0 \leq t \leq 5 \\ y(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(t) = -\dfrac{1}{\sin(t) - \frac{t^2}{2} - 3}$.

1. Si approssimi il problema di Cauchy con il metodo di Eulero Implicito (EI) e con il metodo di Crank-Nicolson (CN), usando h=0.005, toll=1e-6 e nitmax=200. Si calcolino gli errori in norma infinito $err_{EI}$ e $err_{CN}$ tra la soluzione esatta e quella approssimata con i metodi EI e CN rispettivamente. Si riportino i due errori in **format short e**.

   $err_{EI} =$ $\qquad\qquad\qquad$ $err_{CN} =$

2. Si approssimi l'integrale $I = \int_0^5 y(t)dt$ con la formula dei trapezi composita usando i valori approssimati di $y$ forniti dai metodi EI e CN. Si riportino i valori calcolati in **format short e**.

   $I_{EI} =$ $\qquad\qquad\qquad$ $I_{CN} =$

## Esercizio 5 (Esame luglio 2018)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+2)\dfrac{2t^2+2t-1}{1+t}, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $y(t) = \dfrac{e^{t^2}}{1+t} - 2$.

1. Si approssimi il problema di Cauchy assegnato con il metodo di Heun con passo $h = 0.001$ nell'intervallo $[0, 2]$.

2. Si calcoli l'errore in norma infinito tra la soluzione approssimata e quella esatta nei nodi di discretizzazione fissati e lo si riporti in **format short e**. Sia `err`$= ||y(T) - Y||_\infty$ dove T denota il vettore dei nodi di discretizzazione equispaziati di passo $h$ e $Y$ la soluzione calcolata con il metodo di Heun in tali punti.

   `err` =

3. Sia calcoli la radice della soluzione esatta del problema di Cauchy sopra definita , $y(t)$ nell'intervallo $[0, 2]$ utilizzando la funzione predefinita di matlab. Si riporti il valore $\alpha$ ottenuto in **format short e**.

   $\alpha =$