Complementi di Matematica e Calcolo Numerico A.A. 2018-2019

Francesca Fierro

Giovedì ore 8.30- 10.30 Aula 307

Email: francesca.fierro@unimi.it

Ricevimento:
Mercoledì 10.30 - 12.30 (o su appuntamento via email)

Pagina web: www.mat.unimi.it/users/fierro/didattica.html

Laboratorio 1 - Introduzione a MATLAB

MATLAB =**MAT(rix)-LAB(oratory)** è un ambiente integrato per il calcolo scientifico utilizzabile sia in maniera interattiva che come linguaggio di programmazione.

In Matlab ogni quantità (variabile) viene trattata come matrice.
Un numero reale è una matrice 1×1.

Sono predefinite numerose funzioni di uso generale (**built-in functions**), e raccolte di funzioni dedicate ad uno specifico argomento (**toolboxes**).

Per informazioni su Matlab: `www.mathworks.com`
Matlab è un software a pagamento. L'Università degli Studi di Milano ha stipulato un contratto di licenza campus, per informazioni

`https://work.unimi.it/servizi/servizi_tec/1268.htm`

Octave è un software gratuito che ne riproduce buona parte delle funzioni fondamentali. Per informazioni vedere `www.octave.org`.

Matlab in modalità interattiva

All'avvio di Matlab si accede ad una finestra di lavoro caratterizzata dal prompt

```
>>
```

Tutto quanto inserito dopo il prompt verrà eseguito dopo aver premuto il tasto `enter`.

Se Matlab riconosce il comando digitato produrrà un *output* in caso contrario segnalerà un errore. In ogni caso il sistema ripropone al termine il prompt in attesa di un nuovo comando.

Matlab si chiude con il comando `quit`

La prima cosa da fare è posizionare il Current Directory nella propria cartella di lavoro:

```
>> cd z:
```

Alcuni comandi Matlab importanti da conoscere:

```
>> help
```

```
>> doc
```

permettono di ottenere informazioni dettagliate su qualsiasi comando. Il comando `doc` mostra anche quali pacchetti (toolboxes) siano installati nella versione in uso.

Ad esempio:

```
>> help sqrt                    >> doc sin
```

Per cercare il nome esatto di un comando:

```
>> lookfor cosine
```

cerca i comandi nella cui descrizione appare la parola cosine
(ATT.NE la documentazione di Matlab è in inglese!)

Scalari in Matlab

Matlab valuta espressioni e ne assegna il valore a variabili. Nel caso più semplice il valore è un numero reale.
Assegnazione di variabili:

```
>> z=6
z =
      6
```

z è il nome della variabile, 6 il suo valore.

```
>> 6+2
ans =
      8
```

se non specificato il valore 8 dell'espressione viene assegnato alla variabile `ans` che contiene sempre l'ultimo valore non esplicitamente assegnato ad una variabile.

```
>> a=2.5;
>> a
a =
2.5
```

Il `;` alla fine dell'istruzione sopprime la visualizzazione a schermo del risultato (ma non l'esecuzione dell'operazione!).

I nomi delle variabili devono rispettare le regole seguenti:

- contenere al massimo 31 caratteri
- non iniziare MAI con un numero
- non contenere spazi
- non contenere segni di punteggiatura ed operazione
- non contenere apostrofi, slash e backslash
- possono contenere l'underscore
- lettere maiuscole e minuscole sono caratteri differenti

`>> (who) whos`

(elenca le variabili attualmente attive in memoria) e dà alcune informazioni importanti sulle loro caratteristiche (tipo di oggetto, dimensioni ...)

`>> clear all`

cancella il valore di tutte le variabili attive in memoria.

Alcune variabili predefinite:

- `pi` (pigreco),
- `i,j` (unità immaginaria),

Ogni variabile può essere sovrascritta. Per tornare indietro: `clear`.

```
>>pi
3.1416
>>pi=5;
>> clear pi
>> pi
3.1416
```

Operazioni elementari

Sono definite le operazioni elementari: $+$, $-$, $*$, $/$, $\wedge$ (elevamento a potenza).

```
>> a=3+2.5, b=5-3, d=3*4.2, e=3/2, f=2^3
```

Attenzione alle precedenze:

```
>> 3+2*4
ans=
     11
>> 3*2^4
ans=
     48
```

Per alterare l'ordine delle operazioni si utilizzano le parentesi tonde.

```
>> (3+2)*4
ans=
     20
>> (3*2)^4
ans=
     1296
```

Esercizio 1

- Posto $a = 3, b = 2$, calcolare

$$\frac{3}{a+b}, \quad \frac{a+b}{2}, \quad \frac{a+b}{2a}, \quad \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}, \quad \sqrt[4]{64}$$

- Se $x = 10, y = 5, z = 2$, calcolare

$$\frac{3x-2y}{5z^2} \quad (= 1)$$

- Se $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{5}$, calcolare

$$\frac{a^{-3}}{(1-b+3a)^2} \quad (= 8.\overline{3})$$

Attenzione:
Usualmente si scrive ad esempio $3\,x$ intendendo $3 \cdot x$, è importante non dimenticare l'operatore di moltiplicazione quando si inserisce il comando per valutare l'espressione in matlab, infatti in caso contrario si ottiene l'errore:

```
>> x=10;
>> 3x
 3x
  |
Error: Unexpected MATLAB expression.
```

Numeri Complessi:
In Matlab sono anche definiti i numeri complessi, ovvero del tipo:

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

Se la variabile predefinita `i`, contenente l'unità immaginaria, non è stata ridefinita, un tale numero può essere scritto in Matlab nei modi seguenti:

```
>> z=5+3i
z =
   5.0000 + 3.0000i

>> y=2.5-2*i
y =
   2.5000 - 2.0000i
```

Esistono funzioni predefinite di Matlab che operano sui numeri complessi, ad esempio se `z = 5 + 3i` abbiamo:

```
>> real(z)  restituisce 5
>> imag(z)  restituisce 3
>> conj(z)  restituisce il complesso coniugato:  5-3i
```

Funzioni matematiche predefinite:

`abs(x)`	$\lvert x \rvert$
`sqrt(x)`	$\sqrt{x}$
`nthroot(x,n)`	$\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$ con $\mathtt{x} \in \mathbb{R}$ $\mathtt{n} \in \mathbb{R}$
`exp(x)`	e^x con $e = 2.7182818284...$ costante di Nepero
`log(x)`	$\ln(x)$
`sin(x)`	$\mathrm{sen}(x)$
`cos(x)`	$\cos(x)$
`tan(x)`	$\tan(x)$
`asin(x)`	$\mathrm{arcsen}(x)$
...	

Per vedere l'elenco:

```
>> help elfun
```

Osservazione: Per calcolare la costante di Nepero e

```
>> exp(1)
ans =
    2.7183
```

Alcune osservazioni sull' uso delle funzioni:

Oss.1: `nthroot(x,n)` restituisce la radice n-esima reale di un numero reale `x`. Attenzione però che se `x` è negativo `n` deve essere un numero intero dispari. Si osservi che

```
>> nthroot(-8, 3)
ans =
          -2
>> (-8)^(1/3)
ans =
   1.0000 + 1.7321i
```

nel primo caso si ottiene la radice reale (-2), nel secondo una radice complessa di -8. Si noti infatti che

$$(-2)^3 = (1.0000 + 1.7321i)^3 = (1.0000 - 1.7321i)^3 = -8.$$

Sono n i numeri complessi che soddisfano l'equazione $x^n = a$ con a numero reale, e solo alcuni tra essi sono eventualmente numeri reali.

Oss.2: Se `z=a+bi` è un numero complesso per definizione si ha $|\texttt{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

```
>> z=2+3i
>> abs(z)
ans =
    3.6056
```

Oss.3: Se `z` è un numero negativo o complesso `log(z)` non da errore ma restituisce il logaritmo complesso. Ad esempio

```
>> log(-1)
ans =
     0 + 3.1416i
```

Oss.4: Per valori di `x` in $[-1, 1]$ la funzione `asin(x)` ritorna valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per valori di `x` fuori da $[-1, 1]$ restituisce un numero complesso, in quanto implementa la definizione della funzione trigonometrica inversa sul campo complesso.

```
>> asin(3)
ans =
   1.5708 - 1.7627i
```

Analogamente per la funzione `acos`.

Esercizio 2 Calcolare le seguenti variabili reali:

- $y = 2\sin(x)\cos(x) - \cos(2x)$ con $x = \pi/2$, $\quad (R : y = 1)$
- $y = \dfrac{x}{\sqrt[5]{x-9}}$ con $x = 5 \quad (R : y = -3.7893)$
- $y = \dfrac{e^{\sin(x^2)} + \cos(x)}{2\sqrt{x} + 5\ln(x)}$ con $x = 10$, $\quad (R : y = -0.0133)$

I numeri floating point

Per rappresentare su un calcolatore l'infinità dei numeri reali si utilizza un sottoinsieme di dimensione finita detto insieme dei numeri floating-point (virgola mobile) o numeri macchina. Matlab utilizza la rappresentazione in doppia precisione, con la quale è possibile rappresentare ogni numero reale x che si trova approssimativamente negli intervalli:

$$-1.80 \times 10^{308} \leq x \leq -2.23 \times 10^{-308}$$

$$2.23 \times 10^{-308} \leq x \leq 1.80 \times 10^{308}$$

Le variabili predefinte **`realmax, realmin`** di Matlab contengono il più grande ed il più piccolo numero macchina positivo rappresentabile in doppia precisione

```
>> realmax
ans= 1.7977e+308
>> realmin
ans = 2.2251e-308
```

Nota: Ad ogni numero più grande di **`realmax`** Matlab associa il valore `Inf` o "infinito".
Sarà `Inf` anche il risultato della valutazione di una espressione che contenga una divisione per 0 e senza generare un segnale di errore Matlab continuerà i calcoli!

Attenzione! a non confondere la rappresentazione interna di un numero floating point con il formato con cui tale numero viene visualizzato a video da Matlab in rappresentazione decimale.

Numeri reali come $1/3 = 0.\overline{3} \qquad 1/e = 0.367879441171442\ldots$ vengono approssimati con numeri macchina che hanno un numero finito di cifre significative, digitando

```
>> 1/3
ans =
0.3333
>> 1/ exp(1)
ans =
0.3679
```

ne vediamo solo una parte.

Ciò si evidenzia cambiando il formato di visualizzazione con il comando `format`.
Altri possibili formati sono:

```
>> format long

>> 1/3
ans= 0.3333333333333

>> 1/exp(1)
ans = 0.367879441171442
```

```
>> format short e

>> 1/3
ans =  3.3333e-01
>> 1/exp(1)
ans =  3.6788e-01

>> format long e

>> 1/3
ans = 3.333333333333333e-01
>> 1/exp(1)
ans = 3.678794411714423e-01
```

Cosa cambia in aritmetica finita?

Alcuni numeri non possono essere rappresentati.
Si ponga a=1 e b=1e50 (in notazione esponenziale 1e50 significa 10^{50}). Si divida ripetutamente a per b e si osservi il risultato. Ripetere l'esercizio partendo da a=1 e moltiplicando per b.

Alcune proprietà delle operazioni elementari nell'aritmetica del calcolatore non valgono piú.

Esempio in cui la somma non è associativa.

```
>>  a=1.0e+308;
>>  b=1.1e+308;
>>  c=-1.001e+308;
>> (a+b)+c
ans =
Inf
>> a+(b+c)
ans =
1.0990e+308
```

Esempio in cui non vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

```
>> format long e
>> a=10000
a =    1.00000000000000e+04
>> b=6.0007
b =    6.00070000000000e+00
>> c=-6.0005
c =   -6.00050000000000e+00
>> a*(b+c)
ans =    2.00000000000422e+00
>> a*b+a*c
ans =    2.00000000000000e+00
```

.

Cancellazione numerica. È il fenomeno della perdita di cifre significative che si genera quando si sottraggono due nuneri ”quasi uguali” Ad esempio siano $x = 0.765835896$ e $y = 0.765332562$ supponendo di lavorare con una aritmetica finita a 6 cifre significative x e y saranno rappresentati da $\tilde{x} = 0.765835$ e $\tilde{y} = 0.765332$. Pertanto

$$\tilde{x} - \tilde{y} = 0.503000\ 10^{-3}$$

mentre il valore esatto è

$$x - y = 0.503334\ 10^{-3}$$

Esempio di cancellazione numerica. In aritmetica esatta, usando la nota identità $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, si ottiene facilmente

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ . \tag{1}$$

Calcolando con Matlab:

```
>> x=77777777;
>> y1=sqrt(x^2+1)-x
y1 =
0
>> y2=1/(sqrt(x^2+1)+x)
y2 =
6.4286e-09
```

In vista della uguaglianza (1), in aritmetica esatta i valori $y1$ e $y2$ dovrebbero essere uguali In realtà si osserva che i risultati ottenuti ($y1$ e $y2$) sono assai diversi. Il risultato finale dipende fortemente da come vengono effettuati i calcoli. Il risultato "corretto" è $y2$, mentre il risultato dato da $y1$ è soggetto al fenomeno di cancellazione numerica.

Aritmetica finita ed errori

Esercizio 3 (*Esempio di errore dovuto all'aritmetica finita.*)

In aritmetica esatta è ben noto il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ ,$$

dove $e = 2,718..$ rappresenta il numero di Nepero.
Fissato un valore per n si calcoli $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e l'errore assoluto $ea_n = |e_n - e|$ commesso.
Per approssimare e si ripeta il calcolo per $n = 10^2, 10^4, 10^8, 10^{12}, 10^{14}, 10^{16}$.
In aritmetica esatta, i valori ea_n dovrebbero tendere a zero in quanto le e_n sopra calcolate tendono a e. Cosa accade invece?
Soluzione:

```
n=1e-2
en=(1+1/n)^n;
ea=abs(en-exp(1))
```

ripetiamo più volte inserendo i valori di $n = 10^4, 10^8, 10^{12}, 10^{14}, 10^{16}$. Quelli che seguono sono i valori dell'errore ottenuti per ciascun n

```
n          ea
1.0e+02    1.3468e-02
1.0e+04    1.3590e-04
1.0e+08    3.0112e-08
1.0e+12    2.4167e-04
1.0e+14    2.1718e-03
1.0e+16    1.7183e+00
```

Osserviamo che se in una fase iniziale gli errori diminuiscono successivamente tornano ad aumentare, non vediamo quindi la convergenza attesa a causa degli errori dovuti all'aritmetica finita.