Complementi di Matematica
e Calcolo Numerico
A.A. 2018-2019

Laboratorio 3 - 28/3/2019

Programmare con Matlab: Script-files

Che cos' è uno *script file*?

- È un file con estensione .m (ad esempio: `myfile.m`).
- Contiene una sequenza di istruzioni Matlab, scritte come se fossero digitate in modalità interattiva.
- Digitando il nome di uno *script-file* a destra del prompt:

  ```
  >> myfile
  ```

  vengono eseguite in successione tutte le istruzioni contenute nel file.
- Le variabili assegnate in uno *script-file* sono visibili dall'esterno, ovvero persistono in memoria al termine dell'esecuzione.

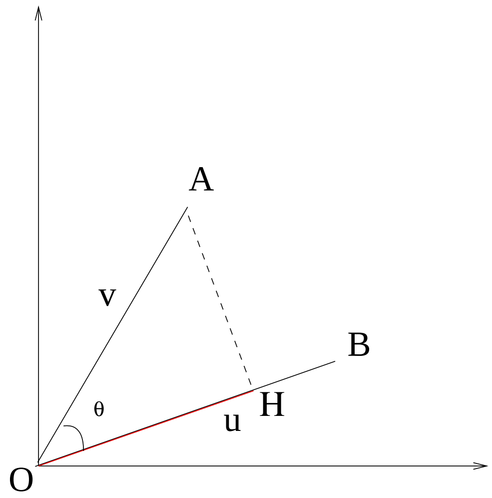
Alcune buone regole

- Il nome di uno *script-file* deve essere diverso dai nomi delle variabili che esso elabora e dai nomi delle variabili presenti in Workspace, altrimenti non verrà eseguito.
- Non assegnare ad uno *script-file* il nome di una funzione predefinita di Matlab. Per verificare se un nome esiste già:

  ```
  >> exist('nome')
  ```

Esempio

Si considerino due punti nel piano A e B. Sia $O = (0,0)$ l'origine di un sistema di assi cartesiani. Indichiamo con $\mathbf{v}$ il vettore $\overline{OA}$ e con $\mathbf{u}$ il vettore $\overline{OB}$. Determinare l'angolo $\theta \in [0,\pi]$ tra i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Determinare il punto H che individua la proiezione ortogonale di A lungo la direzione di $\mathbf{u}$.



Suggerimenti: Ricordando che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(\theta)$$

possiamo ricavare

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

Inoltre poichè possiamo interpretare il prodotto scalare come il prodotto delle lunghezze di $\mathbf{u}$ e della proiezone di $\mathbf{u}$ su $\mathbf{v}$, per determinare $\overline{OH}$ possiamo calcolare

$$\overline{OH} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|} \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u}$$

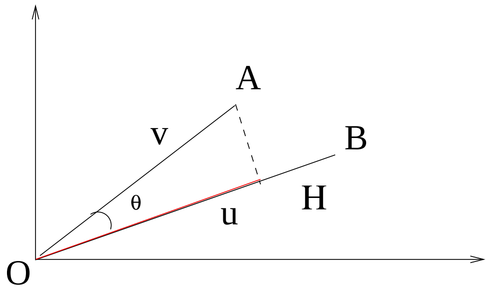
Scriviamo uno *script-file* che che lette da tastiera le coordinate di A e B calcoli θ e H.
Per genereare un nuovo *script-file* selezioniamo dal menu:
file $\longrightarrow$ new $\longrightarrow$ Mfile

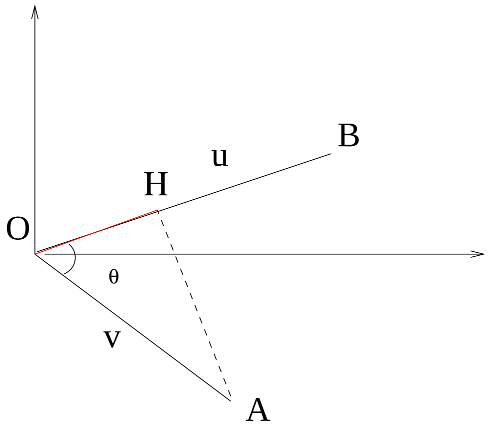
esprodscal.m

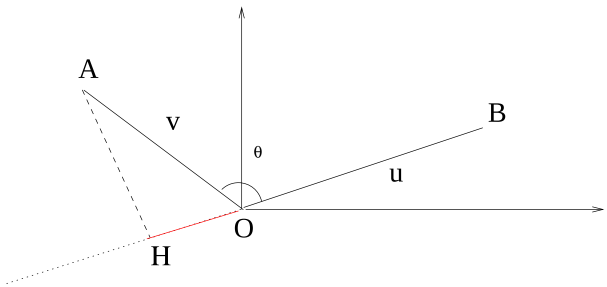
```
O =[0 0];
A = input('inserisci coordinate A')
B = input('inserisci coordinate B')
u = B-O;
v = A-O;
nv=norm(v);
nu=norm(u);
psuv=dot(u,v);
tetar=acos(psuv/(nu*nv));
tetag=tetar*180/pi
w=psuv/nu^2 *u;
H=O+w;
```

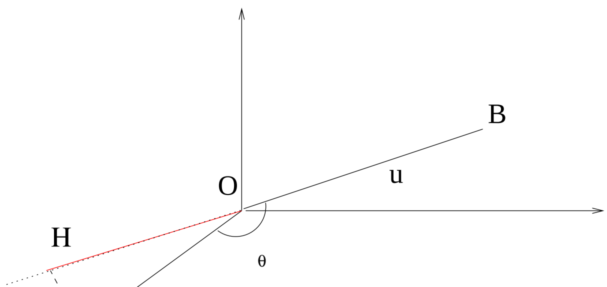
Per eseguire il codice è sufficiente digitare `esprodscal` a destra del prompt nella finestra di comando. Scegliendo:

- `A=[4 3] B=[6 2]` otterremo $\theta \simeq 18°$, `H=[4.5 1.5]`
- `A=[4 -3] B=[6 2]` otterremo $\theta \simeq 55°$, `H=[2.7 0.9]`
- `A=[-4 3] B=[6 2]` otterremo $\theta \simeq 125°$, `H=[-2.7 -0.9]`
- `A=[-4 -3] B=[6 2]` otterremo $\theta \simeq 162°$, `H=[-4.5 -1.5]`


A
v
B
θ
u
H
O


B
u
H
O
θ
v
A


A
v
B
θ
u
O
H


B
u
O
H
θ
v
A

Matrici in Matlab

Per assegnare le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> A=[1 2 3; 4  5 6];
>> B=ones(2,3);
```

Possiamo calcolare

```
>> C=A+B;
>> D=A-B;
```

ed estrarre gli elementi

```
>> s=B(1,2)+D(2,3)
s =
   6
```

L'operatore `'` si utilizza per trasporre una matrice, ovvero assegnata A calcolare A^T definita da $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$

```
>>A =[ 2      1      0;
        3      1      0;
       -2      1      1]
>> A'
ans =
     2      3     -2
     1      1      1
     0      0      1
```

L'operatore `*` esegue il prodotto righe per colonne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{bmatrix}$$

in Matlab:

```
>> A=[1 2 ; 3 4];
>> B=[1 2 3; 4 5 6];
>> A*B

ans =
     9     12     15
    19     26     33
```

```
>> [1; 2 ;3; 4]*[ 1 2 3 4]

ans =
     1     2     3     4
     2     4     6     8
     3     6     9    12
     4     8    12    16

>> [ 1 2 3 4]*[ 1; 2; 3; 4]

ans =
    30
```

Operazioni elemento per elemento (come per i vettori):

```
>> A=[1 2; 3 4], B=[1 2;-1 1];

>> A.*B;
>> A./B;
>> A.^B;
```

Matrici particolari

Matrice identità (eye(n))

```
>> I=eye(4)
I =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

Matrice di Hilbert (hilb(n))

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/\mathrm{n} \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots & 1/(\mathrm{n}+1) \\ & & & & & \\ 1/\mathrm{n} & 1/(\mathrm{n}+1) & & & \dots & 1/(2\mathrm{n}-1) \end{bmatrix}$$

```
>> H=hilb(3)
H =
    1.0000    0.5000    0.3333
    0.5000    0.3333    0.2500
    0.3333    0.2500    0.2000
```

Matrice di numeri casuali (**rand(n)**)

```
>> A=rand(3)
A =
    0.9501    0.4860    0.4565
    0.2311    0.8913    0.0185
    0.6068    0.7621    0.8214
```

Manipolazione di sottoblocchi di matrici e concatenazione

Siano `A=eye(4)` e `B=hilb(2)`.
Per **sostituire** alle ultime due righe e colonne di `A` la matrice `B`:

```
>> A=eye(4); B=hilb(2);
>> A(3:4,3:4)=B
A =
    1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
         0         0    1.0000    0.5000
         0         0    0.5000    0.3333
```

Per **estrarre** la quarta riga di `A`:

```
>> r=A(4,:)
r =
         0         0    0.5000    0.3333
```

Per **eliminare** una colonna usiamo il vettore vuoto `[]`:

```
>> A=hilb(4)

A =

    1.0000    0.5000    0.3333    0.2500
    0.5000    0.3333    0.2500    0.2000
    0.3333    0.2500    0.2000    0.1667
    0.2500    0.2000    0.1667    0.1429
>> A(:,3)=[]
A =

    1.0000    0.5000    0.2500
    0.5000    0.3333    0.2000
    0.3333    0.2500    0.1667
    0.2500    0.2000    0.1429
```

Per **concatenare** due matrici (attenzione alle dimensioni!):

```
>> A=eye(3,2); B=zeros(3,4);
>> C=[A,B]
C =

     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
>> D=[C;ones(1,6)]
D =

     1     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     1     1     1     1     1     1
```

Esercizi

1. Costruire, con comandi opportuni, le seguenti matrici 5x5: identità, casuale, nulla, con tutti gli elementi = 1, di Hilbert.

2. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   a. assegnare il valore 100 agli elementi della 3° colonna

   b. assegnare il valore -3 agli elementi della 2° riga

   c. assegnare il valore $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ alla sottomatrice definita dalle colonne 2 e 3 e dalle righe 3 e 4

   d. eliminare la terza colonna di A;

   e. aggiungere ad A la riga [3, 1, 5];

3. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Calcolare i prodotti di matrici AE e EA; sono uguali? in cosa si differeziano?

4. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Calcolare i prodotti di matrici AE e EA; sono uguali? in cosa si differeziano?

5. Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Si osservi che P si ottiene dalla matrice identica scambiando la seconda e terza riga, una matrice di questo tipo è detta *matrice di permutazione* Si calcolino i prodotti PA e AP, cosa si osserva ?

La funzione diag

```
>> v=[1:4];
>> A=diag(v)
A =
     1     0     0     0
     0     2     0     0
     0     0     3     0
     0     0     0     4

>> A=diag(v,1)
A =
     0     1     0     0     0
     0     0     2     0     0
     0     0     0     3     0
     0     0     0     0     4
     0     0     0     0     0

>> A=diag(v,-2)
A =
     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     0
     1     0     0     0     0     0
     0     2     0     0     0     0
     0     0     3     0     0     0
     0     0     0     4     0     0
```

```
>> M=[1 2 9; 7 5 6; 4 8 3]
>> M=
     1     2     9
     7     5     6
     4     8     3

>> v=diag(M)
v =
     1
     5
     3

>> w=diag(M,1)
w =
     2
     6
```

Esempio. Utilizzando la funzione `diag`, costruire la seguente matrice 7×7.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
>> A=diag(2*ones(7,1))-diag(ones(6,1),1)-diag(ones(6,1),-1)
A =
     2    -1     0     0     0     0     0
    -1     2    -1     0     0     0     0
     0    -1     2    -1     0     0     0
     0     0    -1     2    -1     0     0
     0     0     0    -1     2    -1     0
     0     0     0     0    -1     2    -1
     0     0     0     0     0    -1     2
```

Altre funzioni predefinite su matrici e vettori

```
>> M=[1 2 9; 7 5 6; 4 8 3];
>> sum(M)
ans =
    12    15    18

>> prod(M)
ans =
    28    80   162

>> sort(M)
ans =
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9

>> max(M)
ans =
     7     8     9

>> min(M)
ans =
     1     2     3
```

```
>> B=[4 -1 1;-1 3 -2; 1 -2 3];
>> det(B)
ans =
    18

>> C=inv(B)
C =
    0.2778    0.0556   -0.0556
    0.0556    0.6111    0.3889
   -0.0556    0.3889    0.6111

>> C*B
ans =
    1.0000         0    0.0000
         0    1.0000         0
         0         0    1.0000

>> B*C
ans =

    1.0000         0         0
   -0.0000    1.0000         0
    0.0000         0    1.0000
```

Esercizi

1. Sia v il vettore colonna casuale di lunghezza 5. Calcolare: `diag(v), diag (v,1), diag (v,-1), diag(v,3), diag(v,-2)`

2. Utilizzando la funzione `diag`, costruire le seguenti matrici 10×10.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 9 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -1 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 & \dots & \dots & 0.1 \\ 1 & 4 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 81 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 100 \end{bmatrix}$$

3. Assegnate le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

si scelga un numero reale α a piacere per verificare le seguenti proprietà del determinante di matrici

a. $\det(A) = \det(A^T)$

b. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A^T) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}\ n = 3$

c. $\det(AE) = \det(A)\det(E)$

d. $\det(E^{-1}) = 1/\det(E)$

4. Testare sulla matrice A i seguenti comandi: prod, sum, max, min, sort.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 4 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Autovalori e autovettori

Sia A una matrice quadrata di ordine n a valori reali o complessi, il numero $\lambda \in \mathbb{C}$ si dice **autovalore** di A se esiste un vettore $v \neq (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$, tale che

$$A\,v = \lambda\,v$$

L'autovalore λ è soluzione dell'equazione caratteristica:

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$$

dove $p_A(\lambda)$ è il polinomio caratteristico.

Come calcolo gli autovalori di una matrice con Matlab?

```
>> A=[4 -1 0; -1 4 0; 0 -1 4];
>>lam= eig(A)
lam =
4
5
3
```

L'insieme $\sigma(A)$ degli autovalori di A è detto **spettro** di A.

Se volessi conoscere anche gli autovettori corrispondenti?

```
>> A=[4 -1 0; -1 4 0; 0 -1 4];
>>[V D]= eig(A)
>> V =
         0   -0.5774    0.5774
         0    0.5774    0.5774
    1.0000   -0.5774    0.5774
   D =
     4     0     0
     0     5     0
     0     0     3
```

La matrice D è diagonale e ha gli autovalori di A sulla diagonale principale; la matrice V contiene sull' i-esima colonna l'autovettore corrispondente all' i-esimo autovalore in D. Possiamo controllare

```
>> A*V
ans =
         0   -2.8868    1.7321
         0    2.8868    1.7321
    4.0000   -2.8868    1.7321
>> V*D
ans =
         0   -2.8868    1.7321
         0    2.8868    1.7321
    4.0000   -2.8868    1.7321
```

Esercizio.
Calcolarne gli autovalori di

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$