# Complementi di Matematica
# e Calcolo Numerico
# C.L. Chimica Industriale A.A. 2018-2019

## Laboratorio 4 - 4 aprile 2019

## Metodo delle sostituzioni in avanti per sistemi lineari con matrice triangolare inferiore

Siano $L$ una matrice quadrata di dimensione $n \times n$, **triangolare inferiore**,non singolare e $b$ un vettore colonna di lunghezza $n$. L'espressione

$$Lx = b$$

rappresenta un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite. Una volta inseriti in memoria $L$ e $b$, la soluzione $x$ del sistema si può calcolare in Matlab con l'operatore \, che, per una matrice triangolare inferiore, implementa il metodo delle sostituzioni in avanti.

```
>> x = L\b
```

## Esercizio 1

Risolvere i seguenti sistemi lineari triangolari inferiori mediante \

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 0 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}$$

## Metodo delle sostituzioni all'indietro per sistemi lineari con matrice triangolare superiore

Siano $U$ una matrice quadrata di dimensione $n \times n$, **triangolare superiore**,non singolare e $b$ un vettore colonna di lunghezza $n$. L'espressione

$$Ux = b$$

rappresenta un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite. Una volta inseriti in memoria $U$ e $b$, la soluzione $x$ del sistema si può calcolare in Matlab con l'operatore \, che, per una matrice triangolare superiore, implementa il metodo delle sostituzioni all'indietro.

```
>> x = U\b
```

## Esercizio 2

Risolvere i seguenti sistemi lineari triangolari superiori mediante \

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}$$

## Metodi diretti per sistemi lineari

Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice quadrata non singolare ($\det(A) \neq 0$) e $b \in \mathbb{R}^n$ un vettore assegnati, allora esiste un unico vettore $x \in \mathbb{R}^n$ che risolve il sistema lineare

$$Ax = b$$

Una volta inseriti in memoria $A$ e $b$, la soluzione $x$ del sistema si può calcolare in Matlab con l'operatore $\backslash$, che per una matrice quadrata generica implementa il metodo di **Eliminazione Gaussiana** con pivoting parziale.

```
>> x = A\b
```

**Esercizio 3** Risolvere i seguenti sistemi lineari con l'operatore $\backslash$:

$$\begin{bmatrix} -5 & 8 & -7 \\ 12 & -5 & -3 \\ 1 & 10 & 14 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -20 \\ 14 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -16 & 8 & -7 \\ 1 & -5 & -3 \\ 1 & 10 & 14 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ -13 \end{bmatrix} \longrightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Confrontare i risultati ottenuti con quelli che provengono dal prodotto dell'inversa di $A$ con il vettore $b$ ossia

```
>> x = inv(A)*b
```

Perchè i risultati non coincidono? Perchè non si usa questa seconda strategia?

## Esercizio 4 (E se la matrice fosse singolare?)

Dopo aver calcolato il determinante della matrice del sistema, risolvere con \ i seguenti sistemi lineari, facendo molta attenzione ai messaggi d'errore/warning. Nel secondo e terzo caso confrontare il valore del termine noto con quello del prodotto matrice-soluzione.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

## Esercizio 5 (Sistemi di "grandi" dimensioni)

Dato $N = 43$, costruire la matrice $A$ di dimensione $N \times N$ avente elementi tutti nulli, eccetto quelli della diagonale principale uguali a 7, quelli della prima riga eccetto $A(1,1)$ uguali a 0.1 e quelli della seconda sottodiagonale uguali a $-3$. Sia $b$ il vettore colonna unitario di lunghezza $N$. Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ mediante il metodo di eliminazione gaussiana.

# FATTORIZZAZIONE $LU$

Con la tecnica dell'eliminazione Gaussiana (senza pivot) è possibile fattorizzare alcune matrici $A$ nel prodotto $A = LU$, con $L$ matrice triangolare inferiore (con tutti i coefficienti uguali a 1 sulla diagonale) ed U triangolare superiore. Nota una tale fattorizzazione per risolvere un sistema lineare :

$$Ax = b$$

equivalente a

$$LUx = b$$

è sufficiente risolvere in sequenza per sostituzioni i due sistemi triangolari:

$$Ly = b$$
$$Ux = y$$

Quando dobbiamo risolvere più sistemi lineari con diversi termini noti, ma tutti di ugual matrice A, questa idea risulta vincente dal punto di vista dei costi computazionali in quanto la fattorizzazione va calcolata una sola volta per tutti i sistemi lineari da risolvere.

Combiando l'eliminazione Gaussiana con il pivoting parziale (scambi di righe) è possibile calcolare una matrice triangolare superiore $U$, una triangolare inferiore $L$( con coefficienti diagonali uguali a 1) e una matrice di permutazione $P$ tali che

$$PA = LU.$$

In questo caso la soluzione del sistema lineare

$$Ax = b$$

equivalente a

$$PAx = Pb$$

si calcolerà risolvendo in sequenza i due sistemi triangolari

$$\begin{aligned} Ly &= Pb \\ Ux &= y \end{aligned}$$

Il comando `lu` di Matlab calcola la fattorizzazione $LU$ di $PA$. La sua sintassi è:

```
[L,U,P]= lu(A)
```

**Esercizio 6**. Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Per ciascuna di esse:

- si calcoli la fattorizzazione $LU$ tramite il comando Matlab `lu`,
- per entrambe le matrici $A_1$ e $A_2$ si osservi se la matrice di permutazione $P$ fornita da Matlab è o meno l'identità. Si noti che $A_1$ è a dominanza diagonale stretta e $A_2$ è simmetrica definita positiva.Queste proprietà delle matrici garantiscono l'esistenza della fattorizzazione $A = LU$ e quindi la possibilità di portare a termine l'eliminazione Gaussina senza necessità di effettuare scambi di righe (pivoting).
- Si scelga $b = A_i * \texttt{ones}(n, 1)$ con $n$ dimensione di $A_i$, e si considerino i due sistemi lineari $A_i\,x = b$ che avranno in tal modo soluzione esatta nota $x = \texttt{ones}(n, 1)$. Risolvere ciascuno dei sistemi lineari assegnati sfruttando la fattorizzazione calcolata.

**Esercizio 7** Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 8 & -7 \\ 12 & -5 & -3 \\ 1 & 10 & 14 \end{bmatrix}.$$

- si calcoli la fattorizzazione $LU$ tramite il comando Matlab `lu` usando la sintassi

  ```
  >> [L,U,P]=lu(A)
  ```

- si osservi che la matrice di permutazione $P$ non è l'identità, il che significa che è stato effettuato il pivoting. Pertanto abbiamo $P\,A = L\,U$.

- Sia $b = A * \texttt{ones}(3,1)$, a partire dai fattori $L$, $U$, $P$ ottenuti con `lu` si risolva il sistema $Ax = b$.

**Esercizio 8** Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

si calcoli l'inversa $A^{-1}$ risolvendo i sistemi lineari $Ax = e_i$, dove $e_i = (0,\dots,\overbrace{1}^{i},\dots 0)$ $i = 1,..n$ denotano i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$. La soluzione dell'$i$-esimo sistema $Ax = e_i$, fornisce infatti la colonna $i$-esima della matrice $A^{-1}$. Poichè la matrice dei coefficienti di ciascun sistema è sempre $A$ si calcoli una sola volta la fattorizzazione $LU$ per ridurre i costi computazionali.

# IL FENOMENO DEL *FILL-IN*

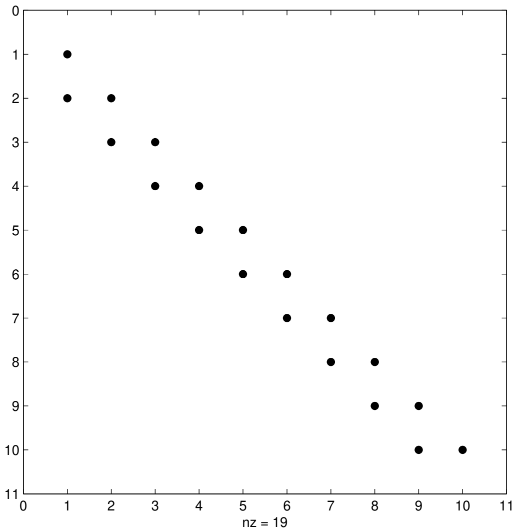
Per ognuna delle seguenti matrici calcolare la fattorizzazione $LU$, controllare l'esecuzione o meno del pivoting e verificare il fenomeno del *fill-in* mediante il comando *spy* applicato ad $L$ e $U$:

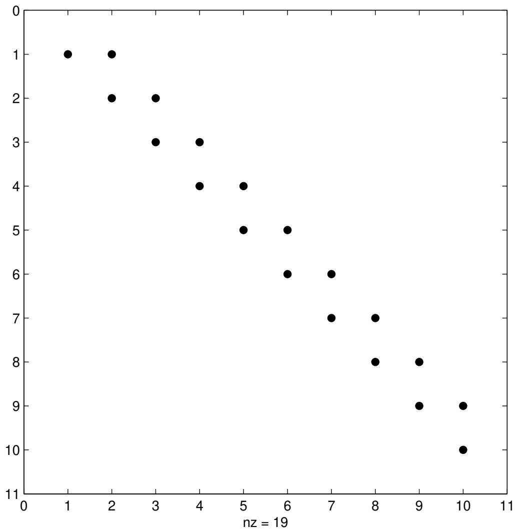
$$A_{10\times 10} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B_{10\times 10} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & & & \\ -2 & 3 & -2 & & \\ & -2 & 3 & -2 & \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ & & & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{10\times 10} = \begin{bmatrix} 2 & 0.1 & 0.1 & .. & 0.1 \\ 0.1 & 2 & & & \\ 0.1 & & 2 & & \\ .. & & & .. & \\ 0.1 & & & & 2 \end{bmatrix} \qquad D_{7\times 7} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & 1 \\ & & & .. & .. \\ 2 & 3 & 4 & .. & 8 \end{bmatrix}$$

ed esempio

```
>> A=4*diag(ones(10,1))-diag(ones(9,1),1)-diag(ones(9,1),-1)
>> [L U P]=lu(A)
>> figure(1)
>> spy(L)
>> figure(2)
>> spy(U)
```






Osserviamo che

- la matrice $A$ è a banda, non viene effettuato il pivoting e quindi le matrici $L$ ed $U$ mantengono la struttura a banda.
- la matrice $B$ è a banda, viene però effettuato il pivoting e quindi le matrici $L$ ed $U$ perdono la struttura a banda.
- le matrici $C$ e $D$ sono sparse, ma le matrici $L$ ed $U$ sono piene.

## Norme di matrici:

$||A||_1 := \max_{j=1,\ldots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| =$ `max(sum(abs(A))) = norm(A,1)`

$||A||_\infty := \max_{i=1,\ldots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| =$`max(sum(abs(A'))) = norm(A,inf)`

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Calcolare $||A||_1, ||A||_\infty$ con il comando **`norm`** e con l'opportuna combinazione dei comandi **`abs, max, sum`**

## Esercizio di riepilogo - ex tema d'esame

1. Sia $n = 10$ ed $A$ la matrice di dimensione $n \times n$ ottenuta sommando la matrice di Hilbert di ordine $n$ con la matrice tridiagonale avente gli elementi diagonali tutti uguali a 3, e quelli sulla prima sottodiagonale e sopradiagonale pari a $-1$. Si calcolino il più grande ed il più piccolo autovalore della matrice $A$. Si riportino i valori in `format short e`:

   $\lambda_{min}$ =........................................, $\lambda_{max}$ =..........................................

2. Si calcoli la fattorizzazione LU della matrice $A$ assegnata al punto precedente utilizzando la funzione Matlab `lu`. Si calcoli inoltre $||L||_\infty$ e $||U||_\infty$. Si riportino i valori in `format short e`:

   $||L||_\infty$=............................................ $||U||_\infty$=.........................................

3. Sia $b$ il vettore colonna di lunghezza $n$ e coefficienti tutti uguali ad 1. Sfruttando la fattorizzazione calcolata si determini la soluzione $x$ del sistema lineare $Ax = b$. Sia $y$ il termine noto del sistema lineare che occorrerà risolvere per sostituzione all'indietro, si calcolino le seguenti norme e se ne riportino i valori in `format short e`.

   $||y||_\infty$=............................................ e $||x||_\infty$=.........................................