

# Complementi di Matematica e Calcolo Numerico A.A. 2018-2019

## Laboratorio 6

### Metodi iterativi per sistemi lineari

Dati una matrice  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  non singolare e un vettore  $b \in \mathbb{R}^N$ , un metodo iterativo per la risoluzione del sistema

$$Ax = b$$

con soluzione esatta  $x^* \in \mathbb{R}^N$ , consiste nella costruzione di una successione di vettori  $x^k \in \mathbb{R}^N$  a partire da un vettore iniziale  $x^0 \in \mathbb{R}^N$  in modo tale che:

-  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$

-  $x^k$  è semplice e poco costoso da calcolare:

$$x^{k+1} = Bx^k + c, \quad k = 0, \dots \quad (\diamond)$$

$B$  è detta matrice di iterazione del metodo.

Per implementare un metodo iterativo occorre certamente stabilire un criterio di arresto. Possiamo ad esempio stabilire che il metodo si arresti qualora, fissati due valori **nitmax** e **toll**, si verifichi uno dei seguenti due casi

- il numero delle iterazioni raggiunge **nitmax**
- avviene che

$$\max \left( \frac{\|x^{k+1} - x^k\|_\infty}{\|x^{k+1}\|_\infty}, \frac{\|Ax^k - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right) < \text{toll}.$$

## IL METODO DI JACOBI

Il passo iterativo del metodo di Jacobi è definito dalle formule:

$$\begin{cases} x_i^{k+1} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} x_j^k \right), & i = 1, 2, \dots, N \\ x^0 \text{ assegnato} \end{cases}$$

dove l'indice in alto rappresenta il numero di iterazioni e l'indice in basso la componente del vettore. Il vettore iniziale  $x^0$  può essere ad esempio, un vettore con tutte le componenti nulle.

Decomponiamo la matrice  $A$  come  $A = D - E - F$ , dove  $D$  è la matrice diagonale la cui diagonale principale corrisponde alla diagonale principale di  $A$ ,  $E$  è la matrice triangolare inferiore che corrisponde alla parte triangolare inferiore di  $A$  cambiata di segno e  $F$  è la matrice triangolare superiore che corrisponde alla parte triangolare superiore di  $A$  cambiata di segno. Con queste notazioni, le iterazioni di Jacobi si possono scrivere nella forma compatta

$$x^{k+1} = D^{-1}(b + (E + F)x^k)$$

ovvero

$$x^{k+1} = D^{-1}(E + F)x^k + D^{-1}b$$

e pertanto la matrice di iterazione del metodo nella formulazione ( $\diamond$ ) è definita da:

$$B_J = D^{-1}(E + F)$$

## IL METODO DI GAUSS-SEIDEL

Questo metodo ha la stessa struttura del metodo di Jacobi, cambia solamente come viene aggiornato il vettore delle soluzioni ad ogni passo:

$$\begin{cases} x_i^{k+1} = \frac{1}{A_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^N A_{ij}x_j^k \right), & i = 1, 2, \dots, N \\ x^0 \text{ assegnato.} \end{cases}$$

Con le notazioni usate in precedenza il metodo si riscrive in forma compatta

$$x^{k+1} = (D - E)^{-1}(b + Fx^k)$$

ovvero

$$x^{k+1} = (D - E)^{-1}Fx^k + (D - E)^{-1}b$$

e pertanto la matrice di iterazione di Gauss-Seidel nella formulazione ( $\diamond$ ) è definita da:

$$B_{GS} = (D - E)^{-1}F$$

## Generare matrici triangolari con tril e triu

```
>> C=[4 -1 1 5;-1 3 -2 3; 1 -2 3 9; 1 3 7 6];
```

```
C =
```

```
    4    -1     1     5
   -1     3    -2     3
    1    -2     3     9
    1     3     7     6
```

```
>> L=tril(C)
```

```
L =
```

```
    4     0     0     0
   -1     3     0     0
    1    -2     3     0
    1     3     7     6
```

```
>> L=tril(C,-1)
```

```
L =
```

```
    0     0     0     0
   -1     0     0     0
    1    -2     0     0
    1     3     7     0
```

```
>> U= triu(C)
```

```
U =
```

```
    4    -1     1     5
    0     3    -2     3
    0     0     3     9
    0     0     0     6
```

```
>> U=triu(C,+1)
```

```
U =
```

```
    0    -1     1     5
    0     0    -2     3
    0     0     0     9
    0     0     0     0
```

## ESERCIZI

**1.** Scrivere una function Matlab che, ricevuti in input la matrice  $A$ , il termine noto  $b$ , il vettore iniziale  $x^0$ , la tolleranza `tol1` e il numero massimo di iterazioni `nitmax` approssimi il sistema lineare  $Ax = b$  con il metodo di Jacobi e fornisca in output la soluzione approssimata  $x$  e il numero di iterazioni effettuate.

**2.** Scrivere una function Matlab che, ricevuti in input la matrice  $A$ , il termine noto  $b$ , il vettore iniziale  $x^0$ , la tolleranza `tol1` e il numero massimo di iterazioni `nitmax` approssimi il sistema lineare  $Ax = b$  con il metodo di Gauss-Seidel e fornisca in output la soluzione approssimata  $x$  e il numero di iterazioni effettuate.

**3.** Si considerino i sistemi lineari  $3 \times 3$  della forma  $A_i x = b_i$  con  $b_i$  calcolato in modo che la soluzione del sistema sia sempre il vettore unitario (cioè  $b_i = A_i * \text{ones}(3, 1)$ ) e le matrici  $A_i$  sono date da

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & -8 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$
$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Si verifica che per la matrice  $A_1$  il metodo di Jacobi diverge, mentre quello di Gauss-Seidel converge. Viceversa, nel caso della matrice  $A_2$  è il metodo di Jacobi a convergere, mentre quello di Gauss-Seidel diverge. Nei due casi restanti il metodo di Jacobi converge più lentamente rispetto a Gauss-Seidel e viceversa.

**Definizione:** Una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  si dice **a diagonale dominante per righe (o per colonne)** se gli elementi diagonali sono maggiori o uguali in valore assoluto della somma di tutti i restanti elementi della stessa riga (o colonna) in valore assoluto:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \left( |a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| \right)$$

Qualora la disuguaglianza valga con  $>$  la matrice si definisce **a diagonale dominante in senso forte (o stretto)**.

### **CONDIZIONI SUFFICIENTI DI CONVERGENZA:**

- A diagonalmente dominante in senso forte  $\implies$  i metodi (J) e (GS) convergono.
- A simmetrica definita positiva  $\implies$  il metodo (GS) converge.

### **Matrici tridiagonali**

A tridiagonale. (J) converge  $\iff$  (GS) converge

Per queste matrici, quando converge, Gauss-Seidel è due volte più veloce di Jacobi, ovvero richiede circa la metà delle iterazioni di Jacobi.

**Esercizio 4.** Stabilire quali tra le seguenti matrici soddisfano condizioni sufficienti a garantire la convergenza del metodo iterativo di Jacobi

$$A_1 = \begin{bmatrix} -22 & 8 & 13 \\ 5 & 7 & -1 \\ -4.5 & 2 & -9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ -1 & 2 & -0.3 \\ 0.5 & -0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2.5 \\ 4 & -7 & 2 \\ -8 & 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Risolvere i sistemi lineari  $A_i x = b$  con  $b = [1, 0, -1]^T$  prendendo  $x^0 = [0, 0, 0]^T$ , `tol1` =  $1e - 6$ , `nitmax` = 200. Calcolare l'errore relativo, prendendo come esatta la soluzione del sistema calcolata con `\`, e confrontarlo con la tolleranza richiesta.

**Esercizio 5.** Stabilire quali tra le seguenti matrici soddisfano condizioni sufficienti a garantire la convergenza del metodo iterativo di Gauss-Seidel:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 1 & -2 & -8 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Risolvere i sistemi lineari  $A_i x = b$  con  $b = [1, 0, -1]^T$  prendendo  $x^0 = [0, 0, 0]^T$ , `tol1` =  $1e - 6$ , `nitmax` = 200. Calcolare l'errore relativo, prendendo come esatta la soluzione del sistema calcolata con `\`, e confrontarlo con la tolleranza richiesta. Cosa accade nel caso della matrice  $A_3$ ? riprovare a risolvere il sistema aumentando il numero massimo di iterazioni permesse `nitmax` = 700.

**Esercizio 6.** Dato  $N = 15$ , costruire la matrice  $A$  di dimensione  $N \times N$  avente elementi nulli, eccetto quelli della diagonale principale uguali ai primi  $N$  numeri naturali, quelli della terza sopradiagonale uguali ai quadrati dei primi numeri naturali e quelli della prima sottodiagonale uguali a  $-0.5$ .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ & 0 & -0.5 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \dots & 5 & & \dots \\ \dots & & & & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & & & & 0 & -0.5 & N \end{bmatrix}.$$

Assegnato  $b = \mathbf{ones}(N, 1)$  si consideri il sistema lineare  $Ax = b$ .

Fissati inoltre  $x_0 = \mathbf{zeros}(N, 1)$ ,  $\mathbf{toll} = 1e - 6$  e  $\mathbf{nitmax} = 200$ , risolvere il sistema  $Ax = b$  con entrambi i metodi.

Dette  $x_J$  e  $x_{GS}$  le soluzioni così ottenute, prendendo come esatta la soluzione del sistema calcolata con  $\backslash$ , valutare infine gli errori assoluti commessi in norma euclidea.

## Confronto Jacobi Gauss-Seidel per matrici tridiagonali

### Esercizio 7.

Sia  $A$  la matrice tridiagonale di ordine  $n \in \mathbb{N}$  avente elementi uguali a 3 sulla diagonale principale uguali a  $-2$  sulla prima sopradiagonale e  $-1$  sulla prima sottodiagonale. Si scelga il vettore  $b \in \mathbb{R}^n$  in modo tale che  $\mathbf{ones}(n, 1)$  sia la soluzione esatta del sistema  $Ax = b$ . Verificare sperimentalmente se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono alla soluzione esatta del sistema lineare assegnato. A Tal fine si scelga  $x^0 = \mathbf{zeros}(n, 1)$ ,  $\mathbf{toll} = 10^{-12}$ ,  $\mathbf{nitmax} = 200$ . Calcolare l'errore relativo e confrontare le prestazioni dei due metodi in termini di numero di iterazioni effettuate. Qual'è piu' veloce? Giustificare i risultati ottenuti alla luce dei risultati teorici noti. Si risolvano diversi sistemi cambiando il valore di  $n$ .