Complementi di Matematica
e Calcolo Numerico
A.A. 2018-2019

Laboratorio 8

Interpolazione polinomiale composita lineare

Una seconda posssibile soluzione al problema evidenziato dal controesempio di Runge consiste nel considerare una partizione dell'intervallo $[a, b]$ in m sottointervalli $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots m$ definiti da $a = x_1 < x_2 < \ldots x_{m+1} = b$ ed utilizzare l'interpolazione di Lagrange di grado n (piccolo) su ciascun sottointervallo.
Il caso più semplice è rappresentato dall'interpolazione lineare composita ($n = 1$) che consiste nel calcolare la funzione continua e polinomiale a tratti di grado 1 che interpola una funzione f nei nodi x_i per $i = 1, \ldots m+1$. In questo caso si parla anche di **spline lineare interpolante**

Pertanto dato un insieme di punti (x_i, y_i), per $i = 1, ..., m + 1$ e $y_i = f(x_i)$ Una spline lineare interpolante è una funzione del tipo:

$$s(x) = \begin{cases} c_{1,1}(x - x_1) + c_{1,2} & \text{se } x \in [x_1, x_2] \\ c_{2,1}(x - x_2) + c_{2,2} & \text{se } x \in [x_2, x_3] \\ \ldots & \ldots \\ c_{m,1}(x - x_m) + c_{m,2} & \text{se } x \in [x_m, x_{m+1}] \end{cases} \tag{1}$$

tale che $s(x_i) = y_i$. Per calcolarla possiamo utilizzare la funzione predefinita di Matlab `griddedInterpolant`.

Esempio Assegnati i punti di coordinate

```
>> x=[-1 1 2 3 5];
>> y=[0 -1 5 2 1];
```

si calcoli il valore assunto dalla spline lineare interpolante nel punto $z = 0$ e si disegni il grafico della spline evidenziando con un cerchietto i punti interpolati.

```
>> z=0;
>> s1 = griddedInterpolant(x,y,'linear')
>> s1z=s1(z)
>> plot(x,y,'o',x,y);
```

Lemma Sia $H = \max_{1,\ldots,m} |x_{i+1} - x_i|$, se $f \in C^2([a,b])$ si può dimostrare che esiste una costante C indipentente da H tale che l'errore

$$E(H) := ||f - s||_\infty = \max_{a<x<b} |f(x) - s(x)| \leq CH^2$$

Esercizio 1. Approssimare con una spline lineare interpolante la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

nell'intervallo $[-5, 5]$ suddiviso in m sottointervalli di ampiezza $H = 10/m$. Definire 1000 punti equispaziati in $[-5, 5]$ e usarli:

- per disegnare nello stesso grafico la funzione e la spline;
- per calcolare l'errore di approssimazione commesso (ovvero il massimo modulo della differenza tra la funzione f e la spline).

Riportare i risultati ottenuti nella tabella sottostante:

m	H=10/m	Errore
5		
50		
500		

Verificare che per H che tende a 0, l'errore tende a zero come $O(H^2)$ come previsto dalla stima dell'errore nel Lemma sopracitato.

Esercizio 2. Ripetere l'esercizio precedente con le funzioni

$$f_1(x) = e^x \cos(4x) \quad \text{in } [0, \pi].$$

$$f_2(x) = \sqrt{|x|} \quad \text{in } [-1, 1].$$

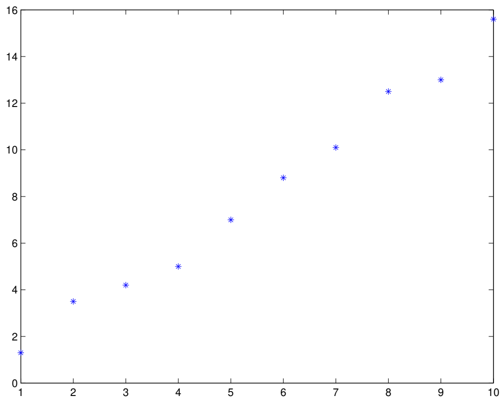
Si osservi l'effetto della non derivabilità di f_2 in 0 sulla velocità di convergenza.

APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI O DI DATI

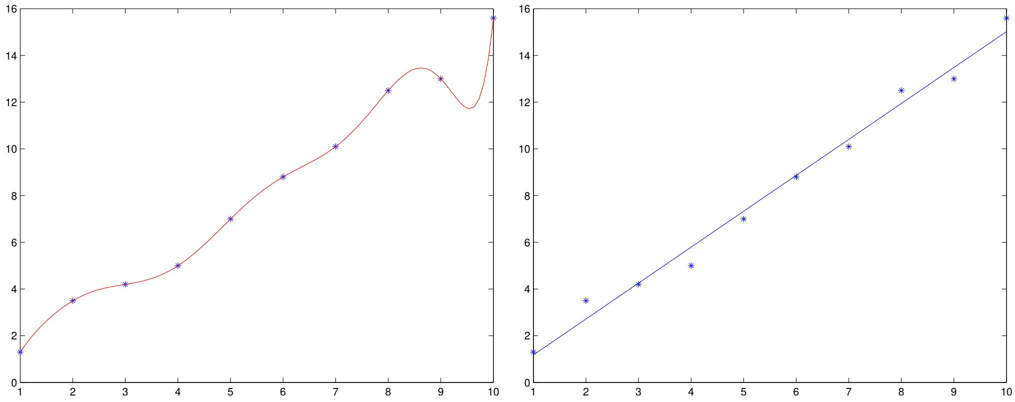
Consideriamo il caso di una funzione nota soltanto attraverso le misurazioni sperimentali nella tabella seguente.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.3	3.5	4.2	5.0	7.0	8.8	10.1	12.5	13	15.6

Vogliamo valutare tale funzione in un punto diverso da quelli tabulati. Con il comando `plot(x,y,'*')` otteniano il grafico dei dati.



Dal grafico vediamo che la relazione che intercorre tra x ed y è di tipo lineare ma nessuna retta passa esattamente per tutti i punti misurati, il che non stupisce se si tiene conto del fatto che le misurazioni sperimentali sono affette da inevitabili errori. In questo caso è piú ragionevole cercare una retta che passi 'il più vicino possibile', in qualche senso, ai dati misurati che non cercare una funzione approssimante che passi esattamente per i punti dati, e quindi li interpoli. Una buona soluzione è fornita quindi dalla retta di regressione. Nella figura sotto a sinistra in rosso il polinomio interpolatore in quella a destra in blu la retta di regressione.



RETTA DI REGRESSIONE LINEARE

Siano (x_i, y_i), per $i = 0, ..., N$, $N + 1$ coppie di dati di origine sperimentale o originati dal campionamento $y_i = f(x_i)$ di una funzione $f(x)$. Ricordiamo che si chiama retta di regressione lineare, oppure retta che approssima i dati (x_i, y_i) nel senso dei minimi quadrati, la retta $y = p_1(x) = mx + q$, che minimizza lo scarto quadratico

$$S = \sum_{i=0}^{N} |y_i - p_1(x_i)|^2 = \sum_{i=0}^{N} |y_i - (m\, x_i + q)|^2,$$

cioè con coefficienti m e q che risolvono il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^N x_i^2 & \sum_{i=0}^N x_i \\ \sum_{i=0}^N x_i & \sum_{i=0}^N 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N x_i y_i \\ \sum_{i=0}^N y_i \end{pmatrix}.$$

Tale sistema si ottiene imponendo a zero le derivate di S rispetto alle variabili m e q.

In Matlab la retta di regressione si calcola con il comando

```
polyfit(x,y,1)
```

Esercizio 1. Si considerino i dati

$$\begin{array}{l} x = [\ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ ] \\ y = [\ 0\ \ 1.25\ \ 2.27\ \ 3.04\ \ 3.77\ \ 4.71\ \ 5.91\ \ 7.19\ \ 8.29\ \ 9.12\ \ 9.83\ ] \end{array}$$

e si calcoli la retta di regressione lineare con il comando **`polyfit`**. Si disegni in un grafico la retta di regressione nell'intervallo $[-1, 11]$ con una linea nera e si evidenzino i punti (x_i, y_i) mediante un cerchietto rosso.

Esercizio 2. Si considerino le coppie di dati definiti come

```
>> x=linspace(0,1,10);
>> y=10*x+rand(size(x));
```

- Si calcoli il polinomio $p_9(x)$ di grado 9 che interpola i dati assegnati
- Si calcoli inoltre la retta di regressione che approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.
- Si confrontino graficamente i polinomi calcolati rispetto ai dati assegnati. Se si ripete il calcolo dei dati, il vettore rand cambia e quindi anche i valori delle ordinate. Si commentino le proprietà rispettive dell'approssimazione ai minimi quadrati e dell'interpolazione di Lagrange in termini di sensibilità rispetto alle perturbazioni sui dati.

Esercizio 3. Assegnati i punti di coordinate

```
>> x=[-5 -2 0.5 1 1.5 3 6];
>> y=[1.5 2 -1 2.5 1 -2 3];
```

si calcoli la retta di regressione che approssima i dati nel senso dei minimi quadrati e si disegni il grafico della retta calcolata e dei dati (x, y). Verificare che la retta di regressione lineare passa per il punto che ha per coordinate rispettivamente la media delle ascisse e la media delle ordinate dei dati in tabella.

Esercizio 4 (da un tema d'esame)

Si considerino i seguenti dati sperimentali

x:	0	5	10	15	20	25	30
y:	0.32	0.41	0.6	0.59	0.7	0.77	0.89

ed il punto $w = 12$ contenuto nell'intervallo $[0, 30]$

1. Determinare la retta di regressione $r(x)$ che approssima i dati assegnati (`x,y`) e valutare il valore assunto dalla retta nel punto w. Si riporti in **format short e** il valore calcolato:

   $r(w) =$

2. Si calcoli il valore assunto nel punto w dalla spline lineare $sp(x)$ che interpola i dati assegnati (`x,y`). Si riporti il valore $sp(w)$ in **format short e**.

   $sp(w) =$

Esercizio 5 (da un tema d'esame)

Si consideri la funzione

$$f(x) = 5\cos(\pi x^2) - \exp(x)$$

sia x il vettore di 5 punti equispaziati nell'intervallo $[0, 1]$ ed $y = f(x)$.

1. Si costruisca la retta di regressione $r(x) = mx+q$ che approssima i dati (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$ nel senso dei minimi quadrati. Si calcoli il valore assunto da tale retta nel valor medio dei dati x ovvero $r(x_m)$ dove $x_m = (\sum_{i=1}^{5} x_i)/5$. Si riportino in `format short e`:

   $m =$ $\qquad\qquad$ $q =$ $\qquad\qquad$ $r(x_m) =$

2. Si costruisca la spline lineare s_1 che interpola i dati (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$ e si calcoli il valore $s_1(0.3)$.

3. Si costruisca il polinomio p che interpola i dati (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 5$ e si calcolino le radici reali di p nell'intervallo $[0, 1]$.