Esame di Fisica Matematica 2, a.a. 2019-2020 (28/9/2020)

Scrivere `chiaramente ed a stampatello` *nome, cognome e numero di matricola in testa all'elaborato.*

Tempo a disposizione: UN'ORA.

Esercizio A. Si determini, attraverso il metodo delle caratteristiche, la più generale soluzione dell'equazione delle onde $u_{tt} = u_{xx}$ con dato iniziale

$$u(x,0) \;=\; \phi(x) \;=\; x\, e^{-kx^2} \;,\;\; u_t(x,0) \;=\; \psi(x) \;=\; 0 \;.$$

Esercizio B. Si consideri l'equazione del calore $u_t = 4\; u_{xx}$ sull'intervallo $x \in [0, L]$, con condizioni al bordo $u_x(0,t) \;=\; u_x(L,t) \;=\; 0$. Se ne determini la soluzione (per $t \geq 0$) che soddisfa al dato iniziale

$$u(x,0) \;=\; 1 \;-\; 2\,\sin^2(2\pi x/L) \;.$$

SOLUZIONE

Esercizio A. *Si determini, attraverso il metodo delle caratteristiche, la più generale soluzione dell'equazione delle onde* $u_{tt} = u_{xx}$ *con dato iniziale* $u(x,0) = \phi(x) = xe^{-kx^2}$, $u_t(x,0) = \psi(x) = 0$.

Scriviamo

$$u(x,t) \;=\; f(x-t) + g(x+t) \;;$$

ne segue che $u_t = g'(x+t) - f'(x-t)$, ed al tempo $t = 0$ si ha

$$u(x,0) \;=\; f(x) + g(x) \;;\;\; u_t(x,0) = g'(x) - f'(x) \;.$$

Essendo $u_t(x,0) = 0$, dobbiamo avere $f'(x) = g'(x)$, ossia

$$g(x) \;=\; f(x) \;+\; c \;.$$

La condizione su $u(x,0)$ fornisce allora

$$2\, f(x) \;+\; c \;=\; \phi(x) \;=\; x\, e^{-kx^2} \;.$$

Possiamo quindi porre $c = 0$, ed abbiamo

$$f(x) \;=\; \frac{x}{2}\, e^{-kx^2} \;,\;\; g(x) \;=\; \frac{x}{2}\, e^{-kx^2} \;.$$

La soluzione cercata è dunque

$$u(x,t) \;=\; \frac{x-t}{2}\, e^{-k(x-t)^2} \;+\; \frac{x+t}{2}\, e^{-k(x+t)^2} \;.$$

Esercizio B. *Si consideri l'equazione del calore* $u_t = 4\, u_{xx}$ *sull'intervallo* $x \in [0,L]$, *con condizioni al bordo* $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$. *Se ne determini la soluzione che soddisfa al dato iniziale* $u(x,0) = 1 - 2\sin^2(2\pi x/L)$.

Avendo condizioni al bordo di Dirichlet, sviluppiamo in serie di soli coseni,

$$u(x,t) \;=\; \sum_k A_k(t)\; \cos(k(\pi/L)x) \;;$$

le A_k dovranno soddisfare

$$\frac{dA_k}{dt} \;=\; -\,4\,k^2\, \frac{\pi^2}{L^2}\, A_k \;,$$

e quindi

$$A_k(t) \;=\; e^{-4k^2(\pi/L)^2 t}\, A(0) \;.$$

Al tempo $t = 0$ abbiamo

$$u(x,0) \;=\; \sum_k A_k(0)\;\cos(k(\pi/L)x)\;;$$

questa deve essere uguale a

$$\Phi(x) \;=\; 1 \,-\, 2\,\sin^2(2\pi x/L) \;=\; \cos(4(\pi/L)x)\;;$$

ne segue che gli $A_k(0)$ sono tutti nulli tranne $A_4(0) = 1$, e la soluzione è

$$u(x,t) \;=\; e^{-64(\pi/L)^2 t}\;\cos(4(\pi/L)x)\;.$$