Esame di Fisica Matematica 2 – 9 Luglio 2020

Tempo a disposizione: UN'ORA. Scrivere chiaramente nome e numero di matricola.

Sl termine, inviare l'elaborato (preferibilmenet in PDF,o come foto) ad ambedue i docenti. Se si desidera che il risultato NON venga reso pubblico, indicarlo esplicitamente.

Esercizio 1. Si determini la soluzione dell'equazione delle onde

$$u_{tt} \;=\; 36\; u_{xx}$$

sulla retta con dato iniziale al tempo $t_0 = 0$

$$u(x,t_0) \;=\; e^{-x^2/2}\;,\quad u_t(x,t_0) \;=\; x\; e^{-x^2/2}\;.$$

Esercizio 2. Si consideri l'equazione del calore

$$u_t \;=\; A^2\; u_{xx}$$

per $x \in [0, L]$, con le condizioni al contorno

$$u(0,t) \;=\; T_1\;,\; u(L,t) \;=\; T_2\;.$$

Se ne determinino:

(a) La soluzione generale,

(b) La soluzione che soddisfa il dato iniziale

$$u(x,0) \;=\; \Theta(x) \;:=\; \begin{cases} T_1 & \text{per } x = 0 \\ T_2 & \text{per } 0 < x \leq L \end{cases}$$

(c) L'espressione asintotica per $t \to \infty$ della soluzione determinata al punto precedente.

SOLUZIONE

Esercizio 1.

Per l'equazione delle onde

$$u_{tt} \;=\; v^2\, u_{xx} \;,\quad u(x,0) = \phi(x) \;,\quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

abbiamo la formula di soluzione generale

$$u(x,t) \;=\; f(x - vt) \;+\; g(x + vt) \;,$$

con f e g funzioni arbitrarie. Segue da questa formula che

$$u_t(x,t) \;=\; -v\, f'(x - vt) \;+\; v\, g'(x + vt) \;.$$

In particolare, al tempo $t = 0$ si ha

$$u(x,0) = \phi(x) = f(x) + g(x) \;;\quad u_t(x,0) = \psi(x) = v[g'(x) - f'(x)] \;.$$

Usando la notazione $F(x) = \int \psi(x)\, dx$, abbiamo quindi

$$\begin{array}{l} g(x) = \phi(x) - f(x) \;; \\ v[\phi'(x) - 2f'(x)] = \psi(x) \;; \\ f(x) \;=\; (1/2)\phi(x) \;-\; [1/(2v)]\, F(x) \;; \\ g(x) \;=\; (1/2)\phi(x) \;+\; [1/(2v)]\, F(x) \;. \end{array}$$

Nel nostro caso, $v = 6$, e le funzioni $\phi(x)$ e $\psi(x)$ sono date nel testo dell'esercizio:

$$\phi(x) \;=\; e^{-x^2/2} \;,\quad \psi(x) \;=\; x\; e^{-x^2/2} \;.$$

Quindi

$$\begin{aligned} F(x) \;&=\; \int \psi(x)\, dx \;=\; -\, e^{-x^2/2} \;; \\ f(x) \;&=\; \frac{1}{2}\, e^{-x^2/2} \;+\; \frac{1}{12}\, e^{-x^2/2} \;=\; \frac{7}{12}\, e^{-x^2/2} \;, \\ g(x) \;&=\; \frac{1}{2}\, e^{-x^2/2} \;-\; \frac{1}{12}\, e^{-x^2/2} \;=\; \frac{5}{12}\, e^{-x^2/2} \;; \end{aligned}$$

in conclusione,

$$u(x,t) \;=\; \frac{7}{12}\, e^{-(x-6t)^2/2} \;+\; \frac{5}{12}\, e^{-(x+6t)^2/2} \;.$$

Esercizio 2.

E' conveniente riportarci ad un problema con condizioni al bordo omogenee; per fare questo consideriamo la variabile

$$v(x,t) \;=\; u(x,t) \;-\; \phi(x) \;,$$

avendo definito

$$\phi(x) \;=\; T_1 \;+\; \frac{(T_2 - T_1)}{L}\; x \;.$$

Ora infatti

$$\begin{aligned} v(0,t) \;&=\; u(0,t) \;-\; \phi(0) \;=\; T_1 - T_1 \;=\; 0 \;; \\ v(L,t) \;&=\; u(L,t) \;-\; \phi(L) \;=\; T_2 - T_2 \;=\; 0 \;. \end{aligned}$$

D'altra parte essendo $\phi(x)$ lineare abbiamo immediatamente che $v(x,t)$ soddisfa la stessa equazione del calore, ora – come osservato sopra – con condizioni al bordo omogenee:

$$v_t \;=\; A^2\; v_{tt} \;, \qquad v(0,t) \;=\; 0 \;=\; v(L,t) \;.$$

Per risolvere questa, passiamo in serie di Fourier di soli seni rispetto alla variabile $x \in [0,L]$,

$$v(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)\;\; \sin[k(\pi/L)x] \;.$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} v_t \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k'(t)\;\; \sin[k(\pi/L)x] \\ v_{xx} \;&=\; -\; \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)\; k^2\; \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin[k(\pi/L)x] \;. \end{aligned}$$

L'equazione diviene allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\beta_k'(t) \;+\; A^2\; \beta_k(t)\; k^2\; \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right]\; \sin[k(\pi/L)x] \;,$$

e per la completezza della base dei seni abbiamo un set di equazioni

$$\beta_k'(t) \;=\; -\; A^2\; k^2\; (\pi/L)^2\; \beta_k(t) \qquad (k = 1, ...) \;.$$

Queste si risolvono immediatamente come

$$\beta_k(t) \;=\; \exp[-A(\pi/L)k\,t]\; B_k \;,$$

dove $B_k = \beta_k(0)$ sono costanti arbitrarie.

Abbiamo quindi determinato la *soluzione generale* del nostro problema:

$$
\begin{aligned}
v(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-A(\pi/L)k\,t]\ B_k\ \sin[k(\pi/L)x]\ ; \\
u(x,t) &= T_1 \ + \ \frac{(T_2-T_1)}{L}\ x \ + \ \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-A(\pi/L)kt]\ B_k\ \sin[k(\pi/L)x]\ .
\end{aligned}
$$

Questo risolve il punto (a).

Per risolvere il punto (b), osserviamo che al tempo $t=0$ questa soluzione generale soddisfa

$$
u(x,0) \ = \ (T_2-T_1)\ (x/L) \ + \ T_1 \ + \ \sum_{k=0}^{\infty} B_k\ \sin[k(\pi/L)x] \ := \ \Phi(x)\ .
$$

E'quindi sufficiente scegliere le costanti B_k in modo tale che la condizione iniziale assegnata sia verificata.

Per ottenere questo, possiamo nuovamente procedere tramite le serie di Fourier (ovviamente nella sola variabile rimasta, cioe' nuovamente $x \in [0,L]$), calcolando la serie di Fourier sia per l'espressione di $u(x,0) = \Phi(x)$ scritta qui sopra che per il dato iniziale assegnato $\Theta(x)$. Va tuttavia osservato che e' conveniente, per poter lavorare con la serie di soli seni, considerare nuovamente la funzione $v(x,t)$.

Notiamo a questo proposito che

$$
v(x,0) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} B_k\ \sin[k(\pi/L)x] \ := \ \widehat{\Phi}(x)\ ,
$$

e che il dato iniziale asssegnato $\Theta(x)$ per $u(x,0$ corrisponde a richiedere di avere

$$
\begin{aligned}
v(x,0) = \widehat{\Theta}(x) \ &= \ \Theta(x) - \varphi(x) \ = \ \Theta(x) \ - \ \left[T_1 \ + \ \frac{(T_2-T_1)}{L}\, x \right] \\
&= \ \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ (T_2-T_1) \ + \ [(T_2-T_1)/L]\, x & \text{per } 0 < x \le L\ . \end{cases}
\end{aligned}
$$

Avremo in generale

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Phi}(x) \ &= \ \sum_k \varphi_k\ \sin[k(\pi/L)x]\ , \\
\widehat{\Theta}(x) \ &= \ \sum_k \vartheta_k\ \sin[k(\pi/L)x]\ ; \\
\varphi_k \ &= \ \frac{2}{L} \int_0^L \widehat{\Phi}(x)\ \sin[k(\pi/L)x]\, dx\ , \\
\vartheta_k \ &= \ \frac{2}{L} \int_0^L \widehat{\Theta}(x)\ \sin[k(\pi/L)x]\, dx\ .
\end{aligned}
$$

Naturalmente la condizione $\widehat{\Theta}(x) = \widehat{\Phi}(x)$ corrispondera' ad avere $\vartheta_k = \varphi_k$ per ogni k.

Con semplici calcoli otteniamo:

$$\begin{aligned}
\varphi_k &= B_k \ ; \\
\vartheta_k &= \frac{2}{L} \int_0^L \widehat{\Theta}(x) \, \sin[k(\pi/L)x] \, dx \\
&= \frac{2}{L} \int_0^L [(T_2 - T_1) \ + \ [(T_2 - T_1)/L] \, x] \, \sin[k(\pi/L)x] \, dx \\
&= 2 \, (T_2 - T_1) \, [1 \ - \ (-1)^k \, 2] \, \frac{1}{k\pi} \ .
\end{aligned}$$

Quindi la condizione iniziale e' soddisfatta ponendo

$$B_k \ = \ 2 \, (T_2 - T_1) \, [1 \ - \ (-1)^k \, 2] \, \frac{1}{k\pi} \ ;$$

la soluzione $u(x,t)$ che la soddisfa e' quindi espressa, in serie di Fourier, come

$$u(x,t) \ = \ T_1 \ + \ \frac{(T_2 - T_1)}{L} \, x \ + \ \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-A(\pi/L)kt] \ B_k \ \sin[k(\pi/L)x]$$

con questi valori delle costanti B_k.

Quanto al punto **(c)**, la presenza di esponenziali con esponente negativo rende evidente che per $t \to \infty$ la soluzione converge a $\phi(x)$,

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) \ = \ \phi(x) \ = \ T_1 \ + \ \frac{(T_2 - T_1)}{L} \, x \ .$$