Esame di Fisica Matematica 2, a.a. 2020-2021 (27/9/2021)

Tempo a disposizione: Un'ORA e MEZZA.
Scrivere `chiaramente` nome, cognome e numero di matricola.
Non e' consentito l'uso di libri, appunti o calcolatrici.

Esercizio 1. Si consideri l'equazione del calore sulla retta con sorgente

$$u_t = u_{xx} \ + \ \rho(x,t) \ ,$$

in cui la sorgente e'

$$\rho(x,t) \ := \ A \ \delta(x) \ \delta(t)$$

con A una costante reale, e se ne determini la soluzione con la condizione iniziale $u(x,0) = 0$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema completo Φ di $L^2[0,2\pi]$ costituito dalle funzioni

$$\phi_n \ := \ \exp[inx] \quad (n \in \mathbf{Z}) \ ;$$

e la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{per } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

(a) Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier rispetto al sistema completo Φ.
(b) Determinare la funzione $F(x) \in L^2[0,2\pi]$ (fornendone lo sviluppo in serie di Fourier rispetto alla base Φ) che rende minima la quantita'

$$I \ = \ \int_0^{2\pi} \left[f \ - \ \frac{dF}{dx} \right]^2 \ dx \ ,$$

ed il minimo di I.
(c) Determinare il minimo di $|F|^2$ tra le F che risolvono il punto (b).

SOLUZIONI

Esercizio 1. *Si consideri l'equazione del calore sulla retta con sorgente*

$$u_t = u_{xx} \ + \ \rho(x,t) \ ,$$

in cui la sorgente e'

$$\rho(x,t) \ := \ A \ \delta(x) \ \delta(t)$$

con A una costante reale, e se ne determini la soluzione con la condizione iniziale $u(x,0) = 0$.

Soluzione. Un'equazione della forma considerata, con sorgente arbitraria $\rho(x,t)$, ha soluzione

$$u(x,t) \ = \ u_0(x,t) \ + \ \int G(x-y, t-\tau) \ \rho(y,\tau) \ \underset{\cdot}{\mathrm{y}} \, d\tau$$

con u_0 una arbitraria soluzione dell'equazione omogenea associata (dunque dell'equazione del calore) e G la funzione di Green (si noti che abbiamo $\alpha = 1$)

$$G(\xi,\eta) \ = \ \Theta(\eta) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\eta}} \ \exp\left[-\frac{\xi^2}{4\pi\eta} \right] \right) \ .$$

Nel nostro caso, le condizioni in $t = -1$ impongono $u_0(x,t) = 0$, e quindi risulta

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A \int G(x-y, t-\tau) \ \delta(y) \, \delta(\tau) \ \underset{\cdot}{\mathrm{y}} \, d\tau \\ &= A \, G(x,t) \\ &= A \ \Theta(t) \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \ \exp\left[-\frac{x^2}{4\pi t} \right] \right) \ . \end{aligned}$$

Esercizio 2. *Si consideri il sistema completo Φ di $L^2[0, 2\pi]$ costituito dalle funzioni*

$$\phi_n \ := \ \exp[inx] \quad (n \in \mathbf{Z}) \ ;$$

e la funzione $f(x)$ definita da

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x \leq \pi \\ 0 & \text{per } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

(a) *Sviluppare $f(x)$ in serie di Fourier rispetto al sistema completo Φ.*
(b) *Determinare la funzione $F(x) \in L^2[0, 2\pi]$ (fornendone lo sviluppo in serie di Fourier rispetto alla base Φ) che rende minima la quantita'*

$$I \ = \ \int_0^{2\pi} \left[f \ - \ \frac{dF}{dx} \right]^2 \ dx \ ,$$

ed il minimo di I.

(c) *Determinare il minimo di $|F|^2$ tra le F che risolvono il punto (b).*

Soluzione. Notiamo innanzitutto che il sistema proposto e' completo ed anche ortonormale pur di definire il prodotto scalare come

$$(f,g) \;=\; \frac{1}{2\pi}\,\int_0^{2\pi} f^*(x)\; g(x)\; dx\;.$$

(a) Scriveremo

$$f(x) \;=\; \sum_k \widehat{f}_k\;\phi_k(x)\;,$$

ed i coefficienti sono dati da

$$\widehat{f}_k \;=\; (\phi_k, f) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\; f^*(x)\phi_k(x)\; dx\;;$$

usando la forma esplicita di f e delle ϕ_k abbiamo quindi (per $k \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{ikx}\; dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ik\pi}-1}{ik}\right] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{per } k \text{ pari} \\ -2/(ik) & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}\;;
\end{aligned}$$

per $k = 0$ abbiamo invece

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\; dx \;=\; \frac{1}{2}\;.$$

La serie di Fourier richiesta e' quindi

$$\frac{1}{2} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{2m+1}\;\left(\frac{e^{i(2m+1)x}\;-\;e^{-i(2m+1)x}}{2i}\right) \;=\; \frac{1}{2} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{2m+1}\;\sin[(2m{+}1)x]\;.$$

(b) Scriviamo la funzione incognita $F(x)$ in termini della sua serie di Fourier rispetto al sistema Φ, dunque come

$$F(x) \;=\; \sum_k \widehat{F}_k\,\phi_k$$

Abbiamo dunque

$$dF/dx \;=\; \sum_k (ik)\,\widehat{F}_k\,\phi_k\;,$$

e la quantita' di interesse si scrive come

$$I \;=\; (f - dF/dx, f - dF/dx) \;=\; \sum_k \left(\widehat{f}_k \;-\; (ik)\, \widehat{F}_k \right)^2 \;.$$

Il minimo si ha evidentemente per

$$\widehat{F}_k \;=\; \frac{\widehat{f}_k}{ik} \quad (k \neq 0) \;,$$

mentre $\widehat{F}_0$ e' indeterminato; con questa scelta

$$I \;=\; I_0 \;=\; 2\pi\, (\widehat{f}_0)^2 \;=\; \pi/2 \;.$$

(c) Con la scelta effettuata al punto (b), risulta

$$|F|^2 \;=\; |\widehat{F}_0|^2 \;+\; \sum_{k \neq 0} |\widehat{f}_k|^2/k^2 \;,$$

con $\widehat{F}_0$ arbitraria. Dato che le $\widehat{f}_k$ sono assegnate, il minimo si ha evidentemente scegliendo $\widehat{F}_0 = 0$. Con questa scelta,

$$|F|^2 \;=\; \sum_{k \neq 0} |\widehat{f}_k|^2/k^2 \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{8} \;.$$