Trasformata ed anti-trasformata di Fourier

Corso di Fisica Matematica 2, a.a. 2013-2014
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

30/11/2013

Queste brevi note raccolgono alcuni fatti essenziali sulle trasformate ed antitrasformate di Fourier; si daranno per note le proprietà fondamentali della funzione (generalizzata) δ di Dirac, discusse in una precedente dispensa.[1]

1 Motivazione e quadro generale

Dato un qualsiasi intervallo finito $[a, b] \subset R$ di lunghezza ℓ, questo viene riportato con un semplice cambio di variabili all'intervallo standard $[0, 2\pi]$, in cui le funzioni $\exp[ikx]$, $k \in \mathbf{Z}$, costituiscono una base (numerabile) dello spazio $L^2[0, 2\pi]$. Invertendo questo cambio di variabili, lo spazio $L^2[a, b]$ (con $b-a = \ell$) ammetterà come base (numerabile) le funzioni $\exp[ik(2\pi/\ell)x]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Se però consideriamo il limite $\ell \to \infty$, otteniamo una situazione diversa; in particolare, la base degli esponenziali non è più numerabile, corrispondendo alle funzioni $\exp[ikx]$ con $k \in \mathbf{R}$.[2]

In corrispondenza a questo fatto, le serie di Fourier (somma su un indice discreto $k \in \mathbf{Z}$) vengono rimpiazzate dagli *integrali di Fourier*; o meglio dalle *trasformate ed antitrasformate (integrali) di Fourier*. In questa dispensa ci occuperemo di queste in termini astratti; il loro uso per la soluzione dell'equazione delle onde (in realtà qualsiasi PDE lineare a coefficienti costanti si tratta esattamente allo stesso modo) verrà discusso in una dispensa successiva.

Nel seguito supporremo che le funzioni $f(x)$, $g(x)$ etc di cui si calcola la trasformata di Fourier siano assolutamente integrabili, cioè appartenenti allo

[1] Queste note seguono in buona parte il testo di Cicogna, che lo studente è invitato a consultare per approfondimenti; per una discussione ancor più approfondita, si vedano gli altri testi citati alla fine della dispensa (in particolare quello di Kolmogorov e Fomin). L'analisi di Fourier è discussa in dettaglio nel corso di *Analisi Reale*.

[2] Sottolineamo che però lo spazio $L^2[R]$ è ancora separabile; dunque basi numerabili esistono (ad esempio quella di Haar, o quella di Hermite), anche se la base delle funzioni esponenziali non lo è. Per molte questioni, ed in particolare per risolvere le equazioni differenziali che ci interessano, risulta più comodo operare con la base di Fourier, che è una base di autofunzioni per gli operatori di derivazione. In altri casi, altre basi saranno più comode (ad esempio la base di Hermite per risolvere certi problemi di Meccanica Quantistica).

spazio $L^1[R]$, o ancora tali che

$$||f||_{L^1} \ := \ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx \ < \ \infty \ ;$$

ed inoltre siano di quadrato sommabile, cioè appartenenti allo spazio $L^2[R]$, o ancora tali che

$$||f||_{L^2} \ := \ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx \ < \ \infty \ .$$

Non tutte le affermazioni che faremo richiederanno $f \in L^1[R] \cap L^2[R] := \mathcal{F}$; lasceremo allo studente volenteroso l'analisi di ove queste condizioni entrano in gioco.[3]

Il prodotto scalare considerato nello spazio funzionale utilizzato sarà quello naturale in $L^2[R]$, ossia

$$(f, g) \ := \ \int_{-\infty}^{+\infty} [f^*(x) \, g(x)] \, dx \ .$$

2 Definizioni e proprietà fondamentali

Data una funzione $f(x) \in \mathcal{F}$, la sua **trasformata di Fourier** è la funzione

$$\widehat{f}(k) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ e^{-ikx} \ dx \ ; \tag{1}$$

qui la variabile k appartiene alla retta reale, $k \in R$; dunque $\widehat{f} : R \to C$.

La **antitrasformata di Fourier** della funzione $\widehat{f}(k)$ è data da

$$\widetilde{f}(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \ e^{ikx} \ dk \ . \tag{2}$$

Per f continua ed appartenente allo spazio $L^1[R]$ vale la *formula di ricostruzione*

$$\widetilde{f}(x) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} \, dy \right) \ e^{ikx} \ dk \ . \tag{3}$$

Osservazione. I fattori $1/\sqrt{2\pi}$ possono essere definiti in modo diverso; in particolare è possibile definire trasformata ed antitrasformata con fattori 1 e $1/(2\pi)$, o viceversa. L'importante è che la formula di ricostruzione risulti essere quella qui sopra; in effetti, in letteratura si trovano diverse convenzioni a questo proposito. Si possono anche invertire i segni degli esponenziali nelle definizioni di trasformata ed antistrasformata (purché lo si faccia in ambedue le definizioni)

[3] Da un punto di vista fisico sarebbe più naturale considerare lo spazio di Sobolev H^1, corrispondente alla condizione di *energia finita*; lo studente che segua il corso di Analisi Reale apprenderà le relazioni esistenti tra i diversi spazi funzionali L^q ed H^p, che noi non discuteremo.

e nuovamente tutto resta valido; fortunatamente per questi segni sembra esserci un maggiore (anche se non totale) accordo in letteratura. $\odot$

Osservazione. Sottolineamo che questa "formula di ricostruzione" (3) si basa sulla *rappresentazione integrale* della funzione δ fornita da

$$\delta(x-y) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)} \ dk \ ; \tag{4}$$

non dimostreremo questa formula, ma si veda nel seguito il Problema 1. $\odot$

A volte scriveremo anche (naturalmente qui T ed A sono gli operatori di "Trasformata" ed "Antitrasformata")

$$\widehat{f} \ = \ T[f] \ ; \ \ \widetilde{f} \ = \ A[\widehat{f}] \ .$$

Si dimostra che per $f \in L^1[R]$, ma non necessariamente continua, si ha $\widetilde{f} = f$ quasi ovunque (cioè a meno di un insieme di misura nulla); per questa ragione la $\widetilde{f}$ è anche detta *rappresentazione integrale di Fourier* per la f.[4]

Inoltre, in tutti i punti $x \in R$ in cui f è continua, si ha

$$\widetilde{f}(x) \ = \ f(x) \ .$$

Nei punti di discontinuità x_0, indichiamo i limiti destro e sinistro con

$$f^{\pm}(x_0) \ = \ \lim_{\varepsilon \to 0^{\pm}} f(x_0 + \varepsilon) \ ;$$

avremo allora

$$\widetilde{f}(x_0) \ = \ \frac{f^+(x_0) + f^-(x_0)}{2} \ .$$

Vediamo ora come le affermazioni precedenti seguono dalla (4). Iniziamo col considerare la (3), e l'integrale doppio a membro di destra di questa. Abbiamo

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} \, dy \right) \ e^{ikx} \ dk \ . \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{ik(x-y)} \, dk \right) \ dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)} \, dk \right) \ dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \delta(x-y) \, dy \ = \ f(x) \ . \end{array}$$

Si noti che qui abbiamo usato la rappresentazione integrale (4) della δ, ed inoltre l'ipotesi $f \in L^1[R]$ per poter scambiare gli integrali.

[4] Si notic he in essa la trasformata di Fourier $\widehat{f}(k)$ gioca il ruolo che era dei coefficienti di Fourier $\widehat{f_k}$ nella rappresentazione di Fourier ordinaria – cioè nella serie di Fourier.

Per quanto riguarda il valore assunto da $\widetilde{f}$ nei punti di discontinuità di f, è conveniente usare la rappresentazione della δ come limite (nel senso discusso nella dispensa dedicata alla δ, ossia nel senso delle distribuzioni) di gaussiane, da cui il risultato segue immediatamente.

Osservazione. La trasformata e la antitrasformata di Fourier possono essere definita anche per funzioni di più variabili. Ad esempio, sia $f(x,t) \in L^1[R \times R] \cap L^2[R \times R]$; allora possiamo trasformare prima rispetto ad x e poi rispetto a t, ottenendo

$$\widehat{f}(k,\omega) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) \ e^{-ikx} \ e^{-i\omega t} \ dx \, dt \ ,$$

con $k \in R$, $\omega \in R$; ed allo stesso modo

$$\widetilde{f}(x,t) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k,\omega) \ e^{ikx} \ e^{i\omega t} \ dk \, d\omega \ .$$

Nel seguito considereremo solo trasformate ed antitrasformate di funzioni di una sola variabile, per comodità di discussione; nelle applicazioni alla soluzione di PDEs dovremo invece di norma trasformare ed antitrasfornmare rispetto a tutte le variabili indipendenti.[5]

3 Proprietà della trasformata in $L^1[R]$

Elenchiamo ora alcune proprietà della trasformata di Fourier.

(1) *Linearità.* Segue immediatamente dalla definizione che

$$T[f+g] \ = \ T[f] \ + \ T[g] \ ; \quad A[\widehat{f}+\widehat{g}] \ = \ A[\widehat{f}] \ + \ A[\widehat{g}] \ . \tag{5}$$

Dunque le operazioni di trasformata ed antitrasformata di Fourier sono *lineari*.

(2) *Limitatezza.* Inoltre, $f \in L^1[R]$ assicura che $\widehat{f}$ è *limitata*; infatti,

$$\sup_k |\widehat{f}(k)| \ \le \ \sup_k \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-ikx}| dx \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \ < \ \infty \ . \tag{6}$$

(3) Valgono le *formule di traslazione* seguenti (con a una costante reale):

$$T[f(x-a)] \ = \ e^{-ika} \, T[f(x)] \ ; \ \ T[e^{iax} f(x)] \ = \ \widehat{f}(k-a) \ . \tag{7}$$

[5] Si noti che perché questo sia legittimo è necessario (restringendosi per comodità di discussione al caso in cui si abbiano solo due variabili indipendenti) che $u(x,t) \in L^2[R \times R]$; se invece si ha che $u(x,t) \in L^2[R]$ per ogni t (in questo caso la R si intende riferirsi alla variabile spaziale x), allora potremo operare con la trasformata solo rispetto alla variabile x e non rispetto alla t. In effetti, la possibilità di operare comunque con la trasformata di Fourier anche rispetto alla variabile temporale t si basa sul fatto che, pur non essendo ragionevole richiedere che u sia di norma L^2 finita rispetto al tempo su tutto l'asse reale, lo è richiedere che lo sia su ogni intervallo finito $t \in [t_1, t_2]$, ovvero che sia in L^2_{1oc}. Per una discussione di questo punto, lo studente può consultare ad esempio il testo di Cicogna.

Per dimostrare la prima, notiamo che (con l'ovvio cambio di variabili $x-a=\xi$)

$$\begin{aligned}
T[f(x-a)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-a)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-ik\xi}e^{-ika}d\xi \\
&= e^{-ika}\ T[f(x)]\ ;
\end{aligned}$$

analogamente la seconda discende immediatamente (con lo stesso tipo di cambio di variabili) da

$$\begin{aligned}
T[e^{iax}f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x)e^{iax}]e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(k-a)x}dx \\
&= \widehat{f}(k-a)\ .
\end{aligned}$$

(4) Il *Teorema di Riemann-Lebesgue* (che non dimostriamo) assicura che per $f\in L^1[R]$ vale

$$\lim_{k\to\pm\infty}\widehat{f}(k)\ =\ 0\ . \tag{8}$$

4 Continuità e derivabilità della trasformata di Fourier

Se $f\in L^1[R]$, allora $\widehat{f}(k)$ è una funzione continua di k. Abbiamo dunque $T: L^1[R]\to C^0(R)$. Le norme naturali in questi spazi di funzioni sono

$$||f||_{L^1} := \int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx \quad , \qquad ||g||_{C^0} := \sup_x |g(x)|\ . \tag{9}$$

L'operatore T è continuo rispetto a tali norme[6]; dunque se la successione f_n converge ad f_* in norma L^1, la successione delle trasformate di Fourier $\widehat{f_n}$ converge uniformemente ad $\widehat{f_*}$.

E' naturale chiedersi se $\widehat{f}$ non sia, oltre che continua, anche derivabile. Risulta che se $F_p(x) := x^p f(x)$ è in $L^1[R]$ per $p=0,1,...,n$, allora $\widehat{f}(k)\in C^p(R)$. Inoltre, in questo caso,

$$\frac{d^p\widehat{f}}{dk^p}\ =\ T[(ix)^p\, f(x)] \quad (p=0,1,...,n)\ ; \tag{10}$$

le derivate $(d^p\widehat{f}/dk^p)$ sono limitate, e vanno a zero per $k\to\pm\infty$.

[6]Il teorema di Riemann-Lebesgue assicura che si potrebbe sostituire *sup* con *max*.

Nel caso in cui

$$x^p\, f(x) \in L^1[R] \quad \forall p = 1,2,3,\ldots \ , \tag{11}$$

si dice che f è **rapidamente decrescente**[7]; in questo caso $\widehat{f}(x)$ è C^∞ e tutte le sue derivate sono limitate e vanno a zero per $k \to \pm\infty$.

5 Convoluzione

Nelle applicazioni risulta utile definire il **prodotto di convoluzione** tra due funzioni; questo è dato da[8]

$$(f * g)(x) \ := \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\ g(y)\ dy \ . \tag{12}$$

Il prodotto di convoluzione è evidentemente commutativo ed associativo,

$$f * g = g * f \ ; \quad (f * g) * h = f * (g * h) \ . \tag{13}$$

Inoltre, se $f, g \in L^1[R]$, allora $(f * g) \in L^1[R]$. Infatti, con $z = x - y$,

$$\begin{aligned}
||f * g||_{L^1} \ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} |(f*g)(x)| dx \\
&= \ \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y)\ dy \right) \Big| dx \\
&\le \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\ |g(y)|\ dy \right)\ dx \\
&= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|\ dx \right) dy \\
&= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|\ dz \right) dy \\
&= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\, dy \right) \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|\, dz \right) \\
&= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ||f||_{L^1}\ ||g||_{L^1} \ < \ \infty \ .
\end{aligned}$$

Il prodotto di convoluzione ha inoltre una proprietà particolarmente semplice (ed ancor più utile) sotto trasformata di Fourier:

[7] Questa nozione ha una importanza fondamentale nella teoria delle distribuzioni (o funzioni generalizzate).

[8] Il fattore $1/\sqrt{2\pi}$ corrisponde a quello introdotto nella definizione di $T[f]$; una definizione di questa con un diverso fattore porta ad un diverso fattore nel prodotto di convoluzione (affinché il teorema di convoluzione abbia un enunciato convenientemente privo di fattori numerici bizzarri).

Teorema di convoluzione. *La trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione di due funzioni $f, g \in L^1[R]$ è pari al prodotto delle trasformate di Fourier delle due funzioni,*

$$T[f * g] \ = \ T[f] \cdot T[g] \ . \tag{14}$$

Dimostrazione. Usando nuovamente $z = x - y$, abbiamo

$$\begin{aligned}
T[f * g] \ &= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) dx \\
&= \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{-ikx} dx \right) \ dy \\
&= \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-ik(z+y)} dz \right) \ dy \\
&= \ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) e^{-iky} dy \right) \ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, e^{-ikz}\, dz \right) \\
&= \ \widehat{f}(k) \ \widehat{g}(k) \ .
\end{aligned}$$

Si noti che – qui ed in precedenza – abbiamo potuto scambiare le integrazioni grazie all'ipotesi $f, g \in L^1[R]$. $\triangle$

6 Proprietà della trasformata in $L^2[R]$

Se $f \in \mathcal{F} = L^1[R] \cap L^2[R]$, allora si ha la cosiddetta *identità di Parseval* tra le norme (L^2) di f e di $\widehat{f}$:

$$||\widehat{f}|| \ = \ ||f|| \ . \tag{15}$$

Più in generale – per $f, g \in \mathcal{F}$ e con $(.,.)$ il prodotto scalare in $L^2[R]$ – si ha

$$(\, \widehat{f} \, , \, \widehat{g} \,) \ = \ (\, f \, , \, g \,) \ . \tag{16}$$

In molte applicazioni, in particolare fisiche, è necessario avere a che fare con funzioni che sono L^2 ma non L^1 (ometteremo sistematicamente l'indicazione "R"). In questo caso è necessario definire una trasformata di Fourier in L^2, e non solo in $L^1 \cap L^2$. Per far ciò si procede come segue[9]: innanzitutto si dimostra che $\mathcal{F} = L^1 \cap L^2$ è denso in L^2 (rispetto alla norma L^2); dunque per ogni $f \in L^2$ esiste una successione $f_n \to f$ con $f_n \in \mathcal{F}$, e si definisce

$$\widehat{f} \ = \ \lim_{n \to \infty} \widehat{f}_n \ ;$$

risulta che questa definizione di $\widehat{f}$ è indipendente dalla successione scelta per approssimare f.

[9]Lo studente è invitato a consultare i testi indicati a fine dispensa per dettagli.

Con questa definizione, si ha (anche per $f \in L^2$, $f \notin \mathcal{F}$)

$$||\widetilde{f} - f|| \ = \ 0 \ , \tag{17}$$

cioè $\widetilde{f}(x) = f(x)$ quasi ovunque.

Inoltre, l'identità di Parseval vale anche per $f \in L^2$ (ed $f \notin \mathcal{F}$); abbiamo cioè $||\widehat{f}|| = ||f||$. Questo significa in particolare che $f \in L^2$ implica che $\widehat{f} \in L^2$; dunque T realizza un isomorfismo (unitario, dato che appunto $||\widehat{f}|| = ||f||$) di $L^2[R]$ in sé.

Osservazione. Sottolineamo che $f \in L^1[R]$ ed $f \in L^2[R]$ sono condizioni che possono essere verificate – o non verificate – indipendentemente. Per convincersi di ciò, lo studente è invitato a considerare le funzioni

$$f(x) \ = \ [x^a \ (x^2+1)^b]^{-1}$$

con a, b parametri reali non negativi, al variare di questi. E' istruttivo considerare (e confrontare) ad esempio il caso ($a = 2/3$, $b = 1$) ed il caso ($a = 0$, $b = 1/3$). $\odot$

7 Parallelo tra serie e trasformata di Fourier

Esiste un evidente parallelo tra il formalismo della trasformata ed antitrasformata di Fourier e quello della serie di Fourier.

Nel caso della serie di Fourier sull'intervallo standard $[0, 2\pi]$ con il prodotto scalare

$$(f, g) \ = \ \int_0^{2\pi} f^*(x) \ g(x) \ dx \tag{18}$$

usavamo le funzioni di base (il prefattore numerico risulta necessario per avere la corretta normalizzazione)

$$\phi_k \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ e^{ikx} \quad (k \in \mathbf{Z}) \ , \tag{19}$$

che soddisfano le relazioni di ortonormalità

$$(\phi_k, \phi_m) \ = \ \delta_{km} \ ; \tag{20}$$

qui ovviamente δ è la delta di Kronecker.

Data una funzione $f(x)$, i suoi coefficienti di Fourier erano dati (con una notazione lievemente diversa da quella usata a suo tempo) da

$$\widehat{f}_k \ := \ (\phi_k, f) \ , \tag{21}$$

e la serie di Fourier per $f(x)$ era data da

$$\widetilde{f}(x) \ = \ \sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{f}_k \, \phi_k(x) \ . \tag{22}$$

Ora consideriamo ancora le funzioni

$$\psi_k(x) \ \equiv \ \psi(k,x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \exp[ikx] \ , \tag{23}$$

in cui però $k \in \mathbf{R}$, e le relazioni di ortonormalità sono date dalla (4), ovvero

$$(\psi_k, \psi_m) \ = \ \delta(k-m) \ , \tag{24}$$

ed ora si tratta della delta di Dirac. Infatti, usando la (4), abbiamo

$$(\psi_k, \psi_m) \ = \ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(m-k)x} \ dx \ = \ \delta(m-k) \ = \ \delta(k-m) \ . \tag{25}$$

L'insieme (discreto) dei coefficienti di Fourier $\widehat{f}_k$ è sostituito dalla funzione $\widehat{f}(k)$, che in effetti è proprio

$$\widehat{f}(k) \ = \ (\psi_k, f) \ ; \tag{26}$$

e la rappresentazione di Fourier della f è fornita da

$$\widetilde{f} \ = \ \int_{k \in \mathbf{R}} \widehat{f}(k) \ \psi_k(x) \ dk \ . \tag{27}$$

Ricordando che l'integrale ha il ruolo della somma quando si tratta di sommare su insiemi continui, abbiamo un parallelo completo con il caso della serie di Fourier.

Possiamo quindi dire, in senso lato, che la trasformata di Fourier può essere vista come lo sviluppo di $f(x)$ nella "base" (non numerabile, in quanto dipende da un parametro $k \in \mathbf{R}$, anziché da un intero $k \in \mathbf{Z}$) di funzioni $\psi(k,x)$.

C'è però una differenza sostanziale: le funzioni $\psi(k,x)$ *non* appartengono allo spazio $L^2[R]$[10] e quindi di certo non ne sono una base, neanche in senso lato. In effetti, nel seguito ci riferiremo spesso alle ψ_k come una base, per comodità di linguaggio, ma questo fatto va tenuto presente per evitare equivoci. D'altra parte, il fatto che le funzioni ψ_k soddisfino le relazioni di ortonormalità (24) risulta sufficiente a poterle impiegare in questo senso. In effetti, queste appariranno sempre all'interno di operatori di integrazione, cosicché risulta sufficiente che il prodotto scalare (ψ_k, ψ_k) sia in L^2 nel senso delle distribuzioni.

Le funzioni $\psi_k(x)$ della nostra "base" possono essere considerate come le autofunzioni dell'operatore lineare

$$\frac{d^2}{dx^2}$$

definito nello spazio delle funzioni limitate (cioè tali che $\sup(|f|) < \infty$) su R. Gli autovalori per questo operatore[11] sono tutti i numeri negativi[12], cioè

$$\lambda \ = \ -k^2 \ , \quad k \in \mathbf{R} \ ,$$

[10] Appartengono però allo spazio $L^2_{loc}[R]$ delel funzioni localmente a quadrato sommabile.

[11] Sottolineamo ancora una volta che nella definizione dell'operatore è inclusa la specifica dell'insieme di definizione

[12] Siamo dunque in presenza di uno *spettro continuo.*

e le ψ_k sono le autofunzioni corrispondenti. Per ogni $\lambda \neq 0$ si hanno due autofunzioni, corrispondenti a $k = \pm\sqrt{\lambda}$.

Osservazione. Menzioniamo infine che le ψ_k possono anche essere viste come le autofunzioni (con autovalore $k \in \mathbf{R}$) dell'operatore $P := -i(d/dx)$; questo punto di vista è particolarmente rilevante nell'ambito della Meccanica Quantistica, ed in questo ambito P rappresenta l'operatore momento. $\odot$

Problema 1. Calcolare la trasformata e la antitrasformata di Fourier della funzione $\delta(x)$. Usare quanto calcolato per determinare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = 1$ (che peraltro non appartiene ad $L^2[R]$, dunque si tratta in linea di principio di una operazione formale; ma appartiene ad $L^2_{loc}[R]$). Dimostrare ora la (4).

8 Simmetria tra trasformata ed antitrasformata

E' evidente dalle definizioni di trasformata ed antitrasformata di Fourier che vi è una grande simmetria tra le due operazioni. In effetti vediamo subito dalle definizioni che $T[f(x)]$ e $A[f(k)]$ (si noti che stiamo applicando T ed A alla *stessa* funzione, sebbene con due diversi argomenti, *non* ad una funzione ed alla sua trasformata) differiscono solo per un segno nell'esponenziale.

Consideriamo $T[f(x)]$, ed operiamo un doppio cambio di variabile (o meglio delle denominazioni delle variabili), indicando k con y ed x con m: abbiamo

$$T[f] \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(m) \, e^{-imy} \ dm \ ;$$

effettuiamo ora un nuovo cambio di variabili, $m \to k$ ed $y \to -x$: in questo modo abbiamo

$$T[f] \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \, e^{ikx} \ dk \ .$$

Ricordando la definizione dell'antitrasformata, abbiamo quindi mostrato (attraverso il cambio totale di variabili $x \to k$, $k \to -x$) che

$$T[f(x)] \ = \ A[f(-x)] \ . \tag{28}$$

Questa formula risulta di grande utilità nel calcolo concreto delle trasformate (e delle antitrasformate) di Fourier. Notiamo in particolare che se f è una funzione pari o dispari di x, $f(-x) = \pm f(x)$, si ha

$$T[f] \ = \ \pm \ A[f] \ . \tag{29}$$

Un altro ausilio nel calcolo delle trasformate (e delle antitrasformate) di Fourier viene dalla formula di ricostruzione (3): se f ed $\widehat{f}$ sono continue, grazie a questa sappiamo già che le loro trasformate ed antitrasformate saranno continue e coincidenti rispettivamente con $\widehat{f}$ e con $\widetilde{\widehat{f}} = f$.

9 Alcune trasformate di Fourier

Forniamo infine alcuni esempi di trasformate di Fourier; lo studente può controllare la loro correttezza (inclusi i fattori 2π) consultando le tavole degli integrali[13], o seguendo i calcoli mostrati in seguito (nella sezione 10).

(1) Per la funzione

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{per } |x| > A \\ 1 & \text{per } |x| \le A \end{cases}$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin(Ak)}{k} \ .$$

(2) Per la funzione gaussiana

$$f(x) \ = \ e^{-x^2/(2A^2)}$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \ = \ A \ e^{-A^2k^2/2} \ ;$$

si noti che per $A = 1$ si ha $\widehat{f} = f$.

(3) Per la funzione

$$f(x) \ = \ e^{-A|x|} \quad (A > 0)$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{A}{A^2 + k^2} \ .$$

(4) Per la funzione

$$f(x) \ = \ \delta(x)$$

la trasformata di Fourier risulta essere costante:

$$\widehat{f}(k) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ .$$

(5) Per la funzione

$$f(x) \ = \ x \ e^{-x^2/(2A^2)}$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \ = \ - \, i \ k \ A^3 \ e^{-A^2k^2/2} \ .$$

[13]In alcuni casi il loro calcolo si basa su tecniche di Analisi Complessa, purtroppo non insegnate (nei corsi di Laurea in Matematica della nostra Università) nei corsi comuni a tutti gli studenti; per questo argomenti si rimanda naturalmente al corso di Analisi Complessa.

(6) Per la funzione

$$f(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{\sin(Ax)}{x}\;,$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{per } |k| > A \\ 1 & \text{per } |k| \leq A\;. \end{cases}$$

(7) Per la funzione gaussiana

$$f(x) \;=\; \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\;e^{-A^2x^2/2}$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;e^{-k^2/(2A^2)}\;.$$

(8) Per la funzione

$$f(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{A}{A^2+x^2} \quad (A>0)\;,$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \;=\; e^{-A|k|}\;.$$

(9) Per la funzione costante

$$f(x) \;=\; 1$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \;=\; \sqrt{2\pi}\;\delta(k)\;.$$

(10) Per la funzione

$$f(x) \;=\; i\;x\;e^{-x^2/2}$$

la trasformata di Fourier risulta essere

$$\widehat{f}(k) \;=\; k\;e^{-k^2/2}\;.$$

Esercizio 1. Verificare che le formule per i casi (6)–(10) seguono da quelle per i casi (1)–(5) usando la discussione della sezione 5.

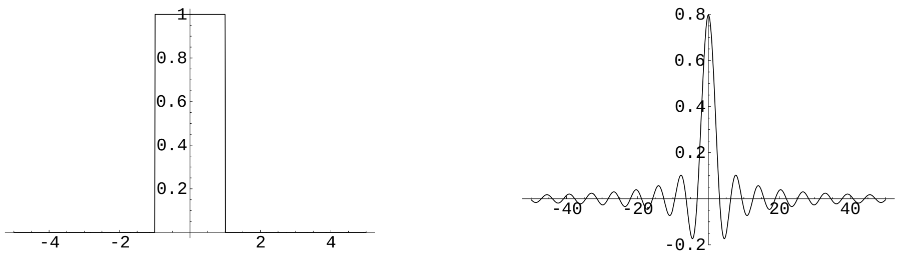

Figura 1: Le funzioni $f(x)$ e $\widehat{f}(k)$ per il caso (1), con $A = 1$.

Figura 2: Le funzioni $f(x)$ e $\widehat{f}(k)$ per il caso (2), con $A = 2$.

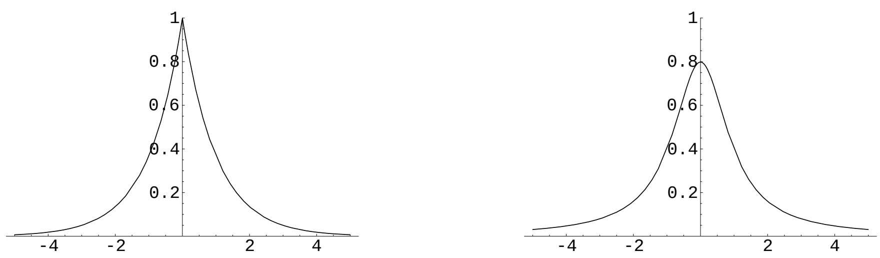

Figura 3: Le funzioni $f(x)$ e $\widehat{f}(k)$ per il caso (3), con $A = 1$.

10 Complemento. Dettagli dei calcoli

Vogliamo ora mostrare come possono essere calcolate le trasformate fornite nella sezione 9, in particolare quelle considerate nei casi (1)-(5); per gli altri casi si rimanda all'esercizio proposto alla fine della sezione 9 stessa.

(1) In questo caso procediamo semplicemente ricordando la definizione di trasformata di Fourier e con una integrazione diretta. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-ik} e^{-ikx}\Big|_{-A}^{+A} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{k} \left(\frac{-e^{-ikA} + e^{ikA}}{2i} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \sin(Ak) \ .
\end{aligned}$$

(2) In questo caso risulta conveniente effettuare un cambio di variabili, scrivendo ad un certo punto dei calcoli seguenti $y = [(x/A) + ikA]$. Abbiamo, iniziando ancora dalla definizione di trasformata,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\ e^{-x^2/(2A^2)}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{A} + ikA \right)^2 \ - \ (k^2A^2) \right] dx \\
&= \frac{e^{-k^2A^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{A} + ikA \right)^2 \right] dx \\
&= \frac{e^{-k^2A^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A\ e^{-y^2/2}\, dx \\
&= A\ e^{-A^2k^2/2} \ .
\end{aligned}$$

Si noti che l'integrale in y è effettuato su una retta del piano complesso parallela all'asse reale. In questo caso (cioè per questa funzione integranda) il risultato è lo stesso che se si fosse integrato sull'asse reale.

Nel caso lo studente sia disturbato dall'aver integrato su una variabile complessa, è possibile procedere anche in un altro modo[14]. Usando la simmetria dell'intervallo di integrazione e la formula di Eulero per l'esponenziale, abbiamo

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\ e^{-x^2/(2A^2)}\, dx$$

[14]Ringrazio uno studente, di cui al momento non conosco il nome, per avermi segnalato la possibilità di procedere in questo modo.

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(kx)\ e^{-x^2/(2A^2)}\ dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ J(k)\ .
\end{aligned}
$$

Per calcolare l'integrale

$$
J(k)\ :=\ \int_0^\infty \cos(kx)\ e^{-x^2/(2A^2)}\ dx
$$

possiamo procedere come segue, derivando[15] rispetto al parametro k, scrivendo per semplicità $\alpha = 1/(2A^2)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{dJ}{dk} &= -\int_0^\infty x\ \sin(kx)\ e^{-\alpha x^2}\ dx \\
&= \left[\frac{\sin(kx)}{2\alpha}\ e^{-\alpha x^2}\right]_0^\infty - \frac{k}{2\alpha}\int_0^\infty \cos(kx)\, e^{-\alpha x^2}\ dx \\
&= -\frac{k}{2\alpha}\, J(k)\ =\ -\, kA^2\ J(k)\ .
\end{aligned}
$$

Dunque J soddisfa l'equazione

$$
dJ/dk = -kA^2\ J\ ,
$$

da cui segue

$$
J(k)\ =\ C\ e^{-A^2k^2/2}\ .
$$

Per valutare la costante C, è sufficiente calcolare $J(0)$ e notare che $C = J(0)$; per $k = 0$ segue dalla definizione di $J(k)$ che

$$
J(0)\ =\ \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\ dx\ =\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ =\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ A\ .
$$

In conclusione,

$$
J(k)\ =\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ A\ e^{-A^2k^2/2}\ .
$$

Questa permette di calcolare immediatamente la trasformata richiesta, che risulta essere

$$
\widehat{f}(k)\ =\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ J(k)\ =\ A\ e^{-A^2k^2/2}\ .
$$

(3) In questo caso useremo il fatto che si integra su un intervallo simmetrico, e che $f(x)$ è una funzione pari; useremo la formula di Eulero per estrarre la parte

[15] Questo è giustificato in quanto la funzione $f(x)$ è rapidamente decrescente, e quindi siamo garantiti che la sua trasformata sia derivabile; in alternativa, segue dalle proprietà della funzione integranda in J.

pari dell'esponenziale immaginario.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\ e^{-A|x|}\ dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(kx)\ e^{-Ax}\ dx \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ P(k)\ .\end{aligned}$$

Per valutare l'integrale

$$P(k) \ := \ \int_0^\infty \cos(kx)\ e^{-Ax}\ dx$$

possiamo integrare per parti due volte;

$$\begin{aligned}P(k) &= \left[\frac{\sin(kx)}{k}\, e^{-Ax}\right]_0^\infty \ + \ \frac{A}{k} \int_0^\infty \sin(kx)\ e^{-Ax}\ dx \\ &= \frac{A}{k} \int_0^\infty \sin(kx)\ e^{-Ax}\ dx \\ &= -\left[\frac{A}{k^2}\ \cos(kx)\ e^{-Ax}\right]_0^\infty \ - \ \frac{A^2}{k^2} \int_0^\infty \cos(kx)\, e^{-Ax}\, dx \\ &= \frac{A}{k^2} \ - \ \frac{A^2}{k^2}\ P(k)\ .\end{aligned}$$

Segue immediatamente che

$$P(k) \ = \ \frac{A}{A^2+k^2}\ ,$$

e quindi in conclusione

$$\widehat{f}(k) \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{A}{A^2+k^2}\ .$$

(4) In questo caso è sufficiente utilizzare la proprietà fondamentale della δ:

$$\widehat{f}(k) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, \delta(x)\, dx \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ .$$

(5) Usiamo ancora la simmetria del dominio di integrazione per estrarre la parte rilevante (ora quella dispari) dell'esponenziale.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\ x\, e^{-x^2/(2A^2)}\ dx \\ &= \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x\ \sin(kx)\, e^{-x^2/(2A^2)}\ dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(2A^2 \sin(kx) e^{-x^2/(2A^2)}\right)_0^\infty \ - \ 2A^2 k \int_0^\infty \cos(kx) e^{-x^2/(2A^2)} dx \right] \\ &= -\,i\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ A^2 k \int_0^\infty \cos(kx)\ e^{-x^2/(2A^2)}\ dx \ = \ -\,i\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ A^2 k\ J(k)\ .\end{aligned}$$

L'integrale

$$J(k) \ := \ \int_0^\infty \cos(kx) \ e^{-x^2/(2A^2)} \ dx$$

è stato calcolato in precedenza, si veda il punto (2), ed abbiamo ottenuto

$$J(k) \ = \ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \ A \ e^{-A^2 k^2/2} \ ;$$

pertanto

$$\widehat{f}(k) \ = \ -i \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ A^2 k \ J(k) \ = \ -i \, A^3 \, k \ e^{-A^2 k^2/2} \ .$$

Bibliografia

Anche per il materiale di questa dispensa, si rinvia per approfondimenti ai testi già indicati in dispense precedenti.

- G. Cicogna, *Metodi Matematici della Fisica*, Springer Italia 2008
- Ph. Dennery & A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Dover 1996
- F.W. Byron & R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover 1992
- L. Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Dover 2008
- M. Reed & B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics – vol.I*, Academic Press 1980
- A.N. Kolmogorov & S.V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, MIR 1980

G. Gaeta, 30/11/2013

Appendice.
Basi in spazi di Hilbert non separabili

Come già sottolineato all'inizio di questa dispensa, lo spazio $L^2[R]$ (con cui abbiamo a che fare nel discutere le soluzioni dell'equazione delle onde sulla retta) è separabile, e sarebbe possibile utilizzare una base discreta di funzioni; ad esempio quella delle funzioni di Hermite

$$\phi_n(x) \ = \ e^{-x^2/2} \ H_n(x)$$

con H_n i polinomi di Hermite

$$H_n(x) \ = \ (-1)^n \ e^{x^2} \ \frac{d^n}{dx^n} \ e^{-x^2} \ .$$

In questa appendice vogliamo discutere come si può definire una base in uno spazio di Hilbert *non separabile* (anche se nel corso non avremo certo bisogno di questi spazi; essi risultano utili ad esempio – in ambito fisico-matematico – nello studio di funzioni *quasi-periodiche* (spazi di Besicovitch)).

Quando abbiamo introdotto il concetto di base in uno spazio di Hilbert, abbiamo fatto riferimento ad un sistema numerabile di funzioni, ed abbiamo al contempo definito uno spazio di Hilbert separabile come uno spazio di Hilbert che ammette una base numerabile.

Nel caso di spazi di Hilbert non separabili è ancora possibile definire una base, estendendo la nostra definizione.

Iniziamo col notare che il concetto di sistema ortonormale è ben definito anche se si ha a che fare con un sistema non numerabile: il sistema $\{\phi_k\}$, con $k \in K$ (qui K è un insieme generico, in particolare non necessariamente numerabile), è ortonormale se $(\phi_k, \phi_m) = 0$ quando $k \neq m$ (sistema ortogonale), ed inoltre $(\phi_k, \phi_k) = 1 \ \forall k \in K$.

Definizione. Se Φ è un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert H, e non esiste nessun sistema ortonormale Ψ che contenga propriamente Φ, allora Φ è detto un *sistema ortonormale completo*, o una *base ortonormale*, in H.

Dunque in generale un sistema ortonormale completo è un sistema ortonormale massimale. Segue dal Lemma di Zorn che *Ogni spazio di Hilbert ammette un sistema ortonormale massimale e quindi completo.*

Più precisamente, si può considerare l'insieme $\mathcal{S}(H)$ dei sistemi ortonormali in H (sicuramente non vuoto, dato che un singolo elemento di modulo uno costituisce un tale sistema) ed ordinarlo parzialmente rispetto all'inclusione; si considera poi un sottoinsieme S_a, $\alpha \in A$, di $\mathcal{S}(H)$ ordinato linearmente, e l'unione $\overline{S}$ degli S_α per $\alpha \in A$, che è un limite superiore per gli S_α. Allora ogni elemento di $\mathcal{S}(H)$ ha un limite superiore, ed il Lemma di Zorn assicura che $\mathcal{S}(H)$ ha un elemento massimale, ovviamente in generale non unico.

Per mostrare che è giustificato chiamare un tale insieme massimale (completo) una base dello spazio di Hilbert, è necessario mostrare che lo spazio delle serie di Fourier rispetto ad un tale insieme è denso in H.

Intuitivamente, questa affermazione si riduce al dire che se esistesse un elemento f_0 non nullo (quindi possiamo scegliere che abbia modulo unitario) di H ortogonale a tutte le serie dui Fourier rispetto all'insieme ortonormale Ψ, quest'ultimo non sarebbe massimale, essendo compreso nell'insieme $\Psi \cup f_0$.

Una schema di dimostrazione formale è come segue. Indichiamo i coefficienti di Fourier rispetto al sistema ortonormale massimale $\Psi = \{\psi_k, \ k \in K\}$ come

$$\widehat{f}(k) \ := \ (\psi_k, f) \ ; \tag{30}$$

allora la rappresentazione di Fourier per f in termini del sistema Ψ sarà

$$\widetilde{f} \ := \ \sum_K \widehat{f}(k) \, \psi_k(x) \ . \tag{31}$$

Qui abbiamo utilizzato il simbolo di somma, ma va ricordato che la somma sui $k \in K$ nel caso (che ci interessa) in cui l'insieme K sia continuo è in effetti una integrazione su K, e dunque risulta più corretto ustilizzare la notazione dell'integrale di Fourier

$$\widetilde{f} \ := \ \int_K \widehat{f}(k) \, \psi_k(x) \ dk \ . \tag{32}$$

Possiamo procedere considerando dei sottoinsiemi finiti $K_i \subset K$; allora la disuguaglianza di Bessel assicura che

$$\sum_{k \in K_i} |\widehat{f}(k)|^2 \ \le \ |f|^2 \ .$$

Consideriamo ora una successione di K_i che fornisca K come elemento massimale (si veda la discussione poco sopra), ed estraiamo da questa una sottosuccessione ordinata di elementi k_i, con $k_i \in K_i$. Definendo

$$F_n(x) \ = \ \sum_{i=1}^n \widehat{f}(k_i) \, \psi_{k_i}(x) \ ,$$

la successione F_n è di Cauchy (assolutamente convergente) e converge ad un elemento $\widetilde{f} \in H$. La dimostrazione segue ora lo schema già visto nel passare dalla disuguaglianza di Bessel alla identità di Parseval; in particolare,

$$(f - \widetilde{f}, \psi_{k_0}) \ = \ \lim_{n\to\infty} (f - F_n, \psi_{k_0}) \ = \ (y, \psi_{k_0}) \ - \ \lim_{n\to\infty} (F_n, \psi_{k_0}) \ .$$

Ora, se k_0 appartiene alla sequenza k_α questa differenza è evidentemente nulla per costruzione; d'altra parte, se k_α non include k_0, il secondo termine è nullo per definizione; ma se il primo termine non è nullo a sua volta, possiamo introdurre k_0 nella sequenza k_α e riportarci nella situazione precedente. In questo modo si dimostra che l'unico elemento di H ortogonale a tutti gli elementi della successione k_α è l'elemento nullo, cioè che un sistema ortonormale massimale è in effetti una base, e che si ha

$$|\widetilde{f} \ - \ f| \ = \ 0 \ .$$

Naturalmente, vale qui l'avvertenza già formulata nel caso di spazi di Hilbert separabili: il fatto che $|\widetilde{f} - f|$ sia nullo non vuol dire che $f(x)$ e $\widetilde{f}(x)$ coincidano in senso puntuale, ma solo che la loro distanza nel senso della norma L^2 sia nulla, ossia che la differenza tra le due funzioni sia nulla rispetto alla misura di Lebesgue su R, ovvero che le funzioni coincidano a meno di un insieme di misura nulla.

Osservazione. Si noti che avendo incluso le distribuzioni, *non* è possibile affermare che $L^2[R]$ sia lo spazio di classi di equivalenza di distribuzioni, con relazione di equivalenza data dall'essere coincidenti a meno di un insieme di misura nulla. Per capire la ragione di questo fatto, è sufficiente considerare la funzione $f(x) = 0$ e la funzione generalizzata $\delta(x)$, coincidenti a meno di un insieme di misura nulla (il solo punto $x = 0$) ma che hanno prodotto scalare diverso con qualsiasi funzione $g(x)$ per cui $g(0) \neq 0$.

`G. Gaeta, 30/11/2013`