Richiami di Meccanica Classica

Corso di Fisica Matematica 3, a.a. 2018/19
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

09/05/2019

Questa dispensa, che va vista in connessione a quella precedente sul principio variazionale e la formulazione Lagrangiana della Meccanica, richiama brevissimamente alcuni concetti di Meccanica Hamiltoniana che saranno utili nella discussione della Meccanica Quantistica.[1]

1 Principio variazionale in forma di Hamilton

Il principio variazionale (o principio di minima azione) è definito da un funzionale (o integrale) di azione

$$S \ = \ \int L(q, \dot{q}; t) \ dt$$

in cui entra la uno-forma di Lagrange

$$\Lambda \ := \ L \ dt \ .$$

Per passare alla formulazione Hamiltoniana, operiamo una trasformazione (di Legendre) e definiamo

$$H(p, q; t) \ = \ H \ = \ p_i \, \dot{q}^i \ - \ L \ , \tag{1}$$

in cui $p_i := (\partial L / \partial \dot{q}^i)$, e $\dot{q}^i$ va pensata come funzione di $(p, q; t)$, ottenuta dalla relazione precedente.[2]

Allora

$$L \ = \ p_i \, \dot{q}^i \ - \ H \ ,$$

ed il principio variazionale si formula in termini di[3]

$$\Lambda \ = \ p_i \, dq^i \ - \ H \, dt \ ,$$

[1] Alcuni degli argomenti in questa dispensa sono stati quest'anno coperti nelle lezioni del prof. Mastropietro; dato che le parti in questione della dispensa erano pronte dall'anno scorso, non ho ritenuto fosse il caso di eleminarle, anche per fissare la notazione, per comodità di riferimento e per completezza.

[2] Notiamo che la relazione tra p e $\dot{q}$ è biunivoca se e solo se L è una funzione convessa delle $\dot{q}$; in effetti questa è una condizione che si incontra in molti testi di Meccanica (non sempre spiegando quali sono la sua origine e scopo).

[3] Il termine $p_i dq^i$ è anche noto come *azione abbreviata*.

ossia abbiamo

$$S \ = \ \int p_i \, dq^i \ - \ \int H \, dt \ .$$

Questo fornisce immediatamente le relazioni

$$H \ = \ - \ \frac{\partial S}{\partial t} \ ; \ \ p_i \ = \ \frac{\partial S}{\partial q^i} \ . \tag{2}$$

Osservazione 1. Due uno-forme di Lagrange Λ e $\widetilde{\Lambda}$ che differiscano per un differenziale totale,

$$\widetilde{\Lambda} \ = \ \Lambda \ + \ dF \ ,$$

sono assolutamente equivalenti dal punto di vista del principio variazionale. Infatti è immediato comprovare che (con una ovvia notazione) $\delta \widetilde{S} = \delta S$; quindi in particolare $\delta \widetilde{S} = 0 \Leftrightarrow \delta S = 0$. Delle considerazioni equivalenti possono essere formulate in ambito Hamiltoniano. $\odot$

Esercizio 1. Determinare la funzione di Hamilton per l'oscillatore armonico, cioè per

$$L \ = \ (m/2) \ \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}^i)^2 \ - \ \sum_{i=1}^{n} (k_i/2) \, (q^i)^2 \ .$$

Esercizio 2. Determinare la funzione di Hamilton per il problema di Keplero, cioè (con $r = \sqrt{q^i \delta_{ik} q^k}$, $v = \sqrt{\dot{q}^i \delta_{ik} \dot{q}^k}$) per

$$L \ = \ \frac{m}{2} \, v^2 \ - \ \frac{g}{r} \ .$$

2 Equazioni di Hamilton

Abbiamo definito la funzione di Hamilton $H = p_i \dot{q}^i - L$; il suo differenziale è dato da

$$\begin{aligned} dH \ &= \ p_i \, d\dot{q}^i \ + \ \dot{q}^i \, dp_i \ - \ dL \\ &= \ p_i \, d\dot{q}^i \ + \ \dot{q}^i \, dp_i \ - \ \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right] \\ &= \ \dot{q}^i dp_i \ - \ \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \ , \end{aligned}$$

avendo utilizzato la definizione $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$.

Usiamo ora le equazioni di Eulero-Lagrange (col che ci restringiamo al moto reale del sistema), e nuovamente la definizione di p_i, per avere

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} \ = \ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ = \ \frac{dp}{dt} \ .$$

In questo modo possiamo scrivere

$$dH \ = \ \dot{q}^i \, dp_i \ - \ \dot{p}_i \, dq^i \ - \ \frac{\partial L}{\partial t} \, dt \ .$$

Ne segue immediatamente[4] che

$$\dot{p}_i \;=\; -\,\frac{\partial H}{\partial q^i}\ ,\quad \dot{q}^i \;=\; \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ; \tag{3}$$

queste sono dette *equazioni di Hamilton*, o anche *equazioni canoniche* della dinamica.

Osserviamo anche che

$$\frac{\partial H}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\partial L}{\partial t}\ ;$$

in particolare, se la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, lo stesso vale per la corrispondente Hamiltoniana (come anche evidente dalla definizione).

Osservazione 2. Definendo la *forma simplettica*[5] $\omega = dp_i \wedge dq^i$, il campo Hamiltoniano $X \equiv X_H = \dot{p}_i(\partial/\partial p_i) + \dot{q}^i(\partial/\partial q^i)$ è univocamente determinato da

$$X \lrcorner \omega \;=\; \mathtt{d}H\ ,$$

dove $\lrcorner$ rappresenta il prodotto interno.

Segue immediatamente da questa scrittura che, con L_X la derivata di Lie lungo il flusso di $X = X_H$ ed usando la formula di Cartan per la derivata di Lie di una forma differenziale,

$$L_X(\omega) \;=\; \mathtt{d}(X \lrcorner \omega) \;+\; X \lrcorner \mathtt{d}\omega \;=\; \mathtt{d}(\mathtt{d}H) \;=\; 0\ ;$$

dunque ω *è conservata sotto qualsiasi flusso Hamiltoniano.* $\odot$

Esercizio 3. Determinare le equazioni di Hamilton per l'oscillatore armonico.

Esercizio 4. Determinare le equazioni di Hamilton per il problema di Keplero.

3 Parentesi di Poisson

Consideriamo una qualsiasi funzione scalare differenziabile sullo spazio delle fasi esteso $M \times R$, $F = F(p,q;t)$ la sua derivata sotto il flusso delle equazioni di Hamilton è data da

$$\frac{dF}{dt} \;=\; \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} \;+\; \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} \;+\; \frac{\partial F}{\partial t} \;=\; -\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dH}{dq^i} \;+\; \frac{\partial F}{\partial q^i}\frac{\partial H}{dp_i} \;+\; \frac{\partial F}{\partial t}\ .$$

[4]Osservando che $H = H(p,q;t)$ e quindi $dH = (\partial H/\partial p_i)dp_i + (\partial H/\partial q^i)dq^i + (\partial H/\partial t)dt$, e confrontando i coefficienti dei diversi differenziali – nel seguito avremo altri calcoli del genere, che si effettuano allo stesso modo.

[5]Questo nome significa che si tratta di una due-forma differenziale chiusa e non degenere, come in questo caso è immediato verificare; il vantaggio di questa formulazione astratta è naturalmente nel poter essere esteso a casi più generali. Notiamo che una forma simplettica puo' esistere solo in uno spazio di dimensione *pari* – come è sempre lo spazio delle fasi (tante p quante q); esiste un altro tipo di forme, le *forme di contatto*, che esistono invece solo in spazi di dimensione dispari; queste sono legate alla dinamica nello spazio delle fasi esteso. Lo studente interessato a questi argomenti puo' consultare il testo di Arnold.

In particolare, se F non dipende da t, cioè è una funzione sullo spazio delle fasi M (anziché sullo spazio delle fasi esteso $M \times R$), abbiamo

$$\frac{dF}{dt} \ = \ - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dH}{dq^i} \ + \ \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{dp_i} \ .$$

Definiamo ora, date due qualsiasi funzioni f, g in $C^\infty(M,R)$, l'operazione

$$\{.,.\} : \ C^\infty(M,R) \times C^\infty(M,R) \ to \ C^\infty(M,R)$$

definita da

$$\{f,g\} \ := \ \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dg}{dq^i} \ - \ \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{dp_i} \ . \tag{4}$$

Questa è detta la *parentesi di Poisson* delle funzioni f e g.

E' evidente che $\{.,.\}$ è una operazione *bilineare* ed *antisimmetrica.* Si puo' anche facilmente verificare (cosa che lo studente è invitato a fare) che essa soddisfa l'*identità di Jacobi*, ossia che per qualsiasi tripla di funzioni f, g, h in $C^\infty(M,R)$ si ha

$$\{f,\{g,h\}\} \ + \ \{g,\{h,f\}\} \ + \ \{h,\{f,g\}\} \ = \ 0 \ .$$

Per quanto visto sopra, per $F \in C^\infty(M,R)$ sotto il flusso generato da H abbiamo

$$\frac{dF}{dt} \ = \ \{H,F\} \ . \tag{5}$$

In particolare, se $\{H,F\} = 0$ allora F è una *costante del moto* per H.[6]

Se F, G sono due costanti del moto per H, segue dalla identità di Jacobi che

$$K \ := \ \{F,G\}$$

è anch'essa una costante del moto per H. Infatti,

$$\frac{dK}{dt} \ = \ \{H,K\} \ = \ \{H,\{F,G\}\} \ = \ - \ \{F,\{G,H\}\} \ - \ \{G,\{H,F\}\} \ = \ 0 \ .$$

Inoltre, possiamo facilmente verificare attraverso un calcolo esplicito (che lo studente è invitato a svolgere) che, date tre funzioni F, G, H su M, vale la relazione

$$\{F\,G \ , \ H\} \ = \ F \ \{G,H\} \ + \ \{F,H\} \ G \ .$$

Osservazione 3. Scrivendo $x = (p,q)$ (cioè con x il vettore di dimensione $2n$ di componenti $(p^1,...,p^n;q^1,...q^n)$; si noti che in uno spazio delle fasi non euclideo l'innalzamento degli indici richiede di agire con la metrica Riemanniana[7]), possiamo scrivere

$$\omega \ = \ \frac{1}{2} \ K_{ij} \ \mathtt{d}x^i \wedge \mathtt{d}x^j \ , \tag{6}$$

[6]Notiamo che se F dipende esplicitamente dal tempo, allora $dF/dt = \{H,F\} + \partial F/\partial t$, e nel caso $\{H,F\} = 0$ abbiamo $dF/dt = \partial F/\partial t$. Questa relazione è in particolare verificata per $F = H$.

[7]Questo punto nasconde una sottigliezza: la formulazione simplettica *non* richiede la presenza di una metrica. E' però possibile definire una metrica (detta *metrica simplettica*) naturale (nello spazio delle fasi) a partire dalla struttura simplettica; lo studente interessato è ancora una volta invitato a consultare il testo di Arnold.

dove K è la matrice antisimmetrica

$$K = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} .$$

Allora la parentesi di Poisson si scrive immediatamente in termini di questa K come

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial x^i} K^{ij} \frac{\partial G}{\partial x^j} = (\nabla F)_i K^{ij} (\nabla G)_j ; \tag{7}$$

anche in questo caso, è necessario innalzare gli indici (ora della matrice K) attraverso l'azione della metrica. $\odot$

Esercizio 5. Verificare che le parentesi di Poisson di H con le variabili canoniche, cioè $\{H, p_i\}$ e $\{H, q^i\}$, riproducono – attraverso la (5) – le equazioni di Hamilton.

Esercizio 6. Calcolare le parentesi di Poisson tra le variabili canoniche, ossia $\{p_i, p_j\}$, $\{q^i, q^j\}$, e $\{p_i, q^j\}$.

Esercizio 7. Calcolare le parentesi di Poisson tra le diverse componenti $L_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k$ del momento angolare per una particella di massa $m = 1$ nello spazio tridimensionale.

4 Trasformazioni canoniche

Una *trasformazione canonica* è un cambio di coordinate $(p, q; t) \mapsto (P, Q; t)$ nello spazio delle fasi che preserva la forma canonica delle equazioni del moto, cioè tale che le nuove coordinate (P, Q) evolvono secondo le equazioni di Hamilton

$$\frac{dP_i}{dt} = - \frac{\partial K}{\partial Q^i} , \quad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P^i}$$

rispetto ad una qualche Hamiltoniana $K(P, Q; t)$.

Osservazione 4. Sottolineamo che secondo questa definizione – ed ogni altra definizione di trasformazione canonica, si veda il seguito – la nuova Hamiltoniana K non è necessariamente uguale alla vecchia Hamiltoniana espressa nelle nuove coordinate, cioè a $\widetilde{H}(P, Q; t) := H[p(P, Q; t), q(P, Q; t); t]$. $\odot$

Osservazione 5. Il modo concettualmente elementare, anche se operativamente complicato, di determinare la più generale trasformazione canonica consiste nello scrivere le (p, q) come funzioni delle (P, Q) e viceversa, e scrivere ora le equazioni di Hamilton per le (p, q) in termini delle (P, Q); infine bisogna vedere se queste ultime, ossia le equazioni del moto per le (P, Q) ammettono una formulazione Hamiltoniana rispetto ad una qualche Hamiltoniana $K = K(P, Q; t)$. Questa procedura è concettualmente chiara, ma richiede di invertire le trasformazioni, calcolare gli Jacobiani per la trasformazione diretta e quella inversa, e risulta (come lo studente è invitato a verificare direttamente) non proprio agevole. Possiamo fortunatamente procedere in altro modo, che inoltre – e sopratutto – permette di comprendere ben più profondamente la struttura della teoria. $\odot$

4.1 Funzioni generatrici

Anziché operare attraverso gli Jacobiani del cambiamento di coordinate, osserviamo che la dinamica è determinata dal principio variazionale; quindi se la dinamica è la stessa, dobbiamo avere

$$p_i \, dq^i \ - \ H \, dt \ = \ P_i \, dQ^i \ - \ K \, dt \ + \ dF \ ; \tag{8}$$

l'ultimo termine tiene conto del fatto che (si veda la Osservazione 1) aggiungere un differenziale totale alla forma Λ non ha alcun effetto sui punti critici del funzionale di azione.

Riscrivendo questa relazione come

$$dF \ = \ p_i \, dq^i \ - \ P_i \, dQ^i \ + \ (K \ - \ H) \ dt \ , \tag{9}$$

e considerando $F = F(q,Q)$, otteniamo immediatamente[8]

$$p_i \ = \ \frac{\partial F}{\partial q^i} \ , \ \ P_i \ = \ - \ \frac{\partial F}{\partial Q^i} \ ; \ \ K \ = \ H \ + \ \frac{\partial F}{\partial t} \ . \tag{10}$$

Diremo che F è la *funzione generatrice* della trasformazione canonica $(p,q) \to (P,Q)$; e viceversa una tale trasformazione è canonica solo se esiste una funzione F tale che si abbia la relazione suindicata tra le vecchie e le nuove coppie di coordinate canoniche.[9]

E' anche possibile considerare una funzione generatrice che dipenda non da (q,Q) ma da altre coppie di variabili canoniche (sempre una "vecchia" ed una "nuova", altrimenti non si ha un legame tra le due coppie di variabili).

Ad esempio se vogliamo considerare una funzione generatrice – che indicheremo con un diverso simbolo, Φ, per evitare confusione – che dipenda dalle (q,P), definiamo $\Phi = F + P_i Q^i$ (in cui, beninteso, p e Q vanno pensate come funzione di q e P) ed abbiamo

$$\begin{aligned} d\Phi \ &= \ d(F + P_i Q^i) \ = \ [p_i dq^i - P_i dQ^i + (\widetilde{H} - H) dt] \ + \ P_i dQ^i \ + \ Q^i dP_i \\ &= \ p_i \, dq^i \ + \ Q^i \, dP_i \ + \ (\widetilde{H} - H) \, dt \ . \end{aligned}$$

Segue da questa relazione che

$$p_i \ = \ \frac{\partial \Phi}{\partial q^i} \ , \ \ Q^i \ = \ \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \ ; \ \ \widetilde{H} \ = \ H \ + \ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \ . \tag{11}$$

[8] Ad evitare ogni possibile equivoco, sottolineamo che qui p e P vanno pensate come funzione di q e Q; questo significa in particolare che la H che appare nell'ultima formula va pensata come $H = H(p,q) = H[p(q,Q),q]$. In particolare, se F non dipende dal tempo, $K = H = \widetilde{H}$ sarà la vecchia Hamiltoniana espressa nelle nuove variabili. Lo stesso tipo di osservazione vale quando si considerano, come tra un attimo, altre coppie di variabili.

[9] Stiamo considerando trasformazioni che possono dipendere dal tempo ma che non agiscono su di esso, che quindi ha il ruolo di un parametro; in corrispondenza a questo fatto (ed a causa di una certa pigrizia, ovvero desiderio di evitare una eccessiva pesantezza nelle formule), nella nostra notazione ometteremo spesso di indicare la dipendenza dal tempo.

Le differenti possibilità per le trasformazioni canoniche e le loro funzioni generatrici sono riassunte nella Tabella I.

$F = F(q, Q)$	$p_i = \partial F/\partial q^i$	$P_i = -\partial F/\partial Q^i$	$K = H + \partial F/\partial t$
$\Phi = \Phi(q, P)$	$p_i = \partial\Phi/\partial q^i$	$Q^i = \partial\Phi/\partial P_i$	$K = H + \partial\Phi/\partial t$
$\Psi = \Psi(p, Q)$	$q^i = -\partial\Psi/\partial p_i$	$P_i = -\partial\Psi/\partial Q^i$	$K = H + \partial\Psi/\partial t$
$G = G(p, P)$	$q^i = -\partial G/\partial p_i$	$Q^i = \partial G/\partial P_i$	$K = H + \partial G/\partial t$

`Tabella I.` *I diversi tipi di funzione generatrice per trasformazioni canoniche (prima colonna) e le relazioni tra vecchie e nuove variabili (seconda e terza colonna), nonché tra vecchia e nuova Hamiltoniana (ultima colonna). Per funzioni generatrici indipendenti dal tempo, la nuova Hamiltoniana è la vecchia espressa nelle opportune variabili.*

Osservazione 6. Segue dalla (9), si veda anche la nota 8, che se la funzione generatrice della trasformazione canonica non dipende esplicitamente dal tempo, e quindi $K = H$, allora la differenza tra le azioni abbreviate espresse in termini delle vecchie e delle nuove coordinate,

$$p_i\, dq^i \;-\; P_i\, dQ^i \;=\; dF \;, \tag{12}$$

è un differenziale esatto; questo è anche un utile criterio per determinare se una data trasformazione è canonica.

Operando con la derivata esterna su ambo i lati della relazione (12), e ricordando che $d^2 = 0$, otteniamo che

$$dp_i \wedge dq^i \;=\; dP_i \wedge dQ^i \;,$$

che esprime la conservazione della forma simplettica ω sotto una trasformazione canonica (si veda la Osservazione 2). Questa implica anche la conservazione della matrice K associata alla forma simplettica (Osservazione 3). ⊙

Osservazione 7. Notiamo che con la notazione introdotta nella Osservazione 3, le equazioni di Hamilton si scrivono come

$$\dot{x} \;=\; J\,\nabla H \;, \tag{13}$$

con $J = -K$. Questa va intesa in coordinate come $\dot{x}^i = J^{ik}(\partial H/\partial x^k)$.

Sotto un cambio di variabili $x = (p,q) \to y = (P,Q) = \Phi(x)$, e scrivendo $A^i{}_j = \partial \Phi^i / \partial y^j$ per lo Jacobiano, abbiamo $\dot{x}^i = (\partial x^i/\partial y^j)\dot{y}^j = (A^{-1})^i{}_j \dot{y}^j$, e (con una notazione evidente)

$$K^{im}(\partial H/\partial x^m) = K^{im}(\partial y^\ell/\partial x^m)(\partial \widetilde{H}/\partial y^\ell) = K^{im} A^\ell{}_m \widetilde{\nabla}_\ell \widetilde{H} \ .$$

Dunque sotto $x \to y$ l'equazione (13) diviene[10]

$$\dot{y}^i \ = \ -(A\,K\,A^T)\,\widetilde{\nabla}\widetilde{H} \ .$$

Quindi la condizione

$$A\,K\,A^T \ = \ K \tag{14}$$

è necessaria e sufficiente perché la trasformazione sia canonica. ⊙

Esercizio 8. Considerare trasformazioni canoniche con funzione generatrice della forma

$$\Phi \ = \ f^i(q,t)\,P_i$$

e determinare la forma generale delle suddette trasformazioni.

Esercizio 9. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione

$$\Phi \ = \ q^i\,P_i \ .$$

Esercizio 10. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione

$$\Phi \ = \ R^i{}_k\,q^k\ P_i$$

con R una matrice ortogonale costante.

Esercizio 11. Determinare la trasformazione canonica generata dalla funzione

$$F \ = \ q^i\,\delta_{ik}\,Q^k \ .$$

Esercizio 12. Determinare se la trasformazione $Q = q\tan(p)$, $P = \ln[\sin(p)]$ è canonica.

Esercizio 13. Considerare la trasformazione canonica con funzione generatrice

$$F(q,Q) \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{k}\,q^2\,\cot(Q) \ ,$$

ed applicarla all'Hamiltoniana

$$H \ = \ \frac{p^2}{2m} \ + \ \frac{k}{2}\,q^2$$

dell'oscillatore armonico in una dimensione, esprimendola nelle variabili (P,Q).

Esercizio 14. Dimostrare l'equivalente delle formule (10) e (11) per funzioni generatrici dipendenti da (p,Q) e da (p,P), cioè le formule fornite nella Tabella I. *[Suggerimento: considerare $\Psi = F - p_i q^i$ e $G = F + P_i Q^i - p_i q^i$.]*

[10] Come del resto ovvio ricordando la legge di trasformazione dei tensori di tipo (2,0) sotto un cambio di coordinate.

4.2 Trasformazioni canoniche e parentesi di Poisson

Se le variabili canoniche (p,q) e (P,Q) sono legate da una trasformazione canonica, ed indicando con $\{.,.\}_{(p,q)}$ e $\{.,.\}_{(P,Q)}$ rispettivamente le parentesi di Poisson rispetto ad esse, allora per qualsiasi coppia di funzioni F, G sullo spazio delle fasi, si ha

$$\{F,G\}_{(p,q)} \ = \ \{\widetilde{F},\widetilde{G}\}_{(P,Q)} \ . \tag{15}$$

Qui abbiamo scritto $F = F(p,q)$, $G = (p,q)$ e con la trasformazione di coordinate, $\widetilde{F}(P,Q) := F[p(P,Q),q(P,Q)]$, $\widetilde{G}(P,Q) = G[p(P,Q),q(P,Q)]$.

E' evidentemente possibile dimostrare la (15) con un calcolo diretto (che lo studente è invitato a svolgere per completezza), ma in effetti non è necessario svolgere calcoli: infatti è sufficente ricordare le Osservazioni 3 (espressione della parentesi di Poisson in termini della matrice K) e 6 (conservazione di K sotto una trasformazione canonica). Consideriamo quindi la (15) come dimostrata.

Osservazione 8. E' anche possibile evitare di svolgere calcoli – senza invocare la matrice K e quindi implicitamente il formalismo simplettico – ragionando come segue (e come suggerito da Landau).

Le funzioni F e G sullo spazio delle fasi sono funzioni scalari, cioè associano ad ogni punto x dello spazio delle fasi R^{2n} un numero. Se interpretiamo F come una Hamiltoniana, la parentesi di Poisson $\{F,G\}$ rappresenta la derivata dG/dt sotto il flusso generato da F, ovvero il gradiente di G nel punto x nella direzione del campo di vettori X_F. Se cambiamo coordinate, la rappresentazione in coordinate sia del punto x che del campo di vettori X_F cambia, ma il punto x stesso, la direzione del campo di vettori, e la quantità "fisica" che è la variazione temporale della funzione G (che nelle nuove coordinate diventa la $\widetilde{G}$) nel tempo restano invariate. D'altra parte, *se* (e solo se) il flusso è espresso nelle nuove coordinate ancora da equazioni di Hamilton (sia pure rispetto ad una diversa espressione della Hamiltoniana in coordinate), allora nelle nuove coordinate questa quantità sarà proprio $d\widetilde{G}/dt = \{\widetilde{F},\widetilde{G}\}_{(P,Q)}$. Trattandosi di una quantità "fisica", essa è indipendente dalla sua rappresentazione in coordinate, cioè deve essere $dG/dt = d\widetilde{G}/dt$, ovvero deve essere verificata la (15). $\odot$

4.3 Il moto come successione di trasformazioni canoniche

Consideriamo la trasformazione di variabili che porta da $q = q(t)$, $p = p(t)$ a $Q = q(t+\tau)$, $P = p(t+\tau)$, dove $q(t)$, $p(t)$ rappresentano il flusso delle variabili canoniche sotto le equazioni di Hamilton.

Evidentemente possiamo considerare questa come una trasformazione di variabili[11]; in effetti, si tratta di una trasformazione canonica – come ora mostreremo – e quindi il flusso Hamiltoniano puo' essere visto come un susseguirsi di trasformazioni canoniche, o meglio come un *gruppo ad un parametro* (parametro che poi è il tempo) di trasformazioni canoniche.

[11] A rigore, questa affermazione richiede il teorema di Liouville sulla conservazione del volume nello spazio delle fasi, per garantirci che la trasformazione sia invertibile.

Consideriamo l'azione; sappiamo che $dS/dt = L = p_i \dot{q}^i - H$, e quindi

$$-dS \ = \ H\,dt \ - \ p_i\,dq^i \ . \tag{16}$$

Se consideriamo il differenziale dell'azione tra i due punti $q(t)$ e $q(t+\tau)$ abbiamo

$$-dS \ = \ -\,p_i(t+\tau)\ dq^i(t+\tau) \ + \ p_i(t)\ dq^i(t) \ ; \tag{17}$$

confrontando questa con le formule (10) otteniamo che la trasformazione canonica con funzione generatrice $-S$ (che va considerata come funzione di $q(t) = q$ e di $q(t+\tau) = Q$) fornisce proprio la trasformazione tra (p,q) e (P,Q).

Osservazione 9. Possiamo giungere alla stessa conclusione anche in altro modo: è evidente che l'evoluzione di $(Q,P) = (q(t+\tau), p(t+\tau))$ è governata ancora dalle equazioni di Hamilton, dunque la trasformazione da $(q = q(t), p = p(t))$ alle $(Q = q(t+\tau), P = p(t+\tau))$ è per definizione canonica.

Osservazione 10. Abbiamo visto in precedenza come la canonicità di una trasformazione sia associata alla conservazione della matrice simplettica K. Se consideriamo il flusso, definito in questa notazione (come in alcune delle Osservazioni precedenti) da $\dot{x} = -K\nabla H$, e la trasformazione che corrisponde ad un atto infinitesimo di moto (su un tempo $dt = \varepsilon$),

$$y^i \ = \ x^i \ - \ \varepsilon\,K^{ij}\,\nabla_j H \ .$$

In questo caso (ricordando che K è costante)

$$A^i{}_j \ := \ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \ = \ \delta^i{}_j \ - \ \varepsilon\,K^{im}\ (\triangle_{mj}\,H) \ := \ \delta^i{}_j \ - \ \varepsilon\,K^{im}\,S_{mj} \ := \ \delta^i{}_j \ - \ \varepsilon\,B^i{}_j \ .$$

Notiamo anche che K è antisimmetrica, S è simmetrica; inoltre evidentemente $K^2 = -I$, $K^T K = K K^T = I$.

Ora la condizione (14) fornisce

$$\begin{aligned} A^T\,K\,A \ &= \ (I - \varepsilon B^T)\ K\ (I - \varepsilon B) \\ &= \ K \ - \ \varepsilon\ \big(B^T\,K \ + \ K\,B\big) \\ &= \ K \ - \ \varepsilon\ \big(S^T\,K^T\,K \ + \ K\,K\,S\big) \\ &= \ K \ - \ \varepsilon\ \big(S^T \ - \ S\big) \ = \ K \ . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato – in ancora un altro modo – che il flusso Hamiltoniano fornisce un gruppo ad un parametro di trasformazioni canoniche.[12] $\odot$

[12] Qui, come anche in precedenza, stiamo in effetti dando per scontato il fatto che le trasformazioni canoniche formano un *gruppo*. Questo è evidente se consideriamo che esse preservano una struttura (la forma simplettica, o la matrice ad essa associata, o le parentesi di Poisson, o la forma funzionale delle equazioni di Hamilton), e quindi anche la combinazione di (un numero finito di) tali trasformazioni la preserva.

4.4 Criteri per la canonicità di un cambio di variabili

Nel corso della nostra discussione abbiamo da una parte visto come generare una trasformazione canonica (in particolare la Tabella I dice come generare *tutte* le possibili trasformazioni canoniche), ma abbiamo anche visto – in particolare nelle Osservazioni – vari modi per determinare se una data trasformazione è canonica. Vogliamo qui ricordarli brevemente – trascurando il metodo "elementare" menzionato nella Osservazione 5. Considereremo sempre una trasformazione $(p, q; t) \to (P = P(p, q), Q = Q(p, q); t)$.

1. Possiamo invertire una delle due trasformazioni, ad esempio scrivendo $p = \alpha(q, Q; t)$, $P = \beta(q, Q; t)$ (stiamo quindi considerando (q, Q) come variabili, e siamo nel caso della prima riga della Tabella I). Se la trasformazione è canonica, esiste una $F(q, Q; t)$ per cui

   $$p_i = \alpha_i(q, Q; t) = (\partial F/\partial q^i) \ , \quad P_i = \beta_i(q, Q; t) = -(\partial F/\partial Q^i) \ .$$

   Questo è possibile se e solo se le derivate in croce sono uguali, ossia se e solo se

   $$\frac{\partial \alpha_i}{\partial Q^j} \ = \ - \ \frac{\partial \beta_j}{\partial q^i} \ .$$

   Relazioni analoghe devono valere se scegliamo invece di considerare altre coppie di variabili, si veda la Tabella I.

2. Possiamo utilizzare il criterio della invarianza della matrice K (Osservazione 7). In altre parole, calcoliamo $(\partial P_i/\partial q^j)$ etc., e con esse lo Jacobiano $A^i{}_j$; con questo possiamo verificare se la (14) è verificata o meno.

3. In modo equivalente, possiamo considerare il pull-back della forma simplettica $\widetilde{\omega} = dP_i \wedge dQ^i$, e verificare se esso è uguale a $dp_i \wedge dq^i$.

4. Un altro criterio, (di norma) sostanzialmente più semplice da verificare se abbiamo le trasformazioni in forma esplicita $P_i = P_i(p, q; t)$, $Q^i = Q^i(p, q; t)$, è quello basato sulla parentesi di Poisson, ed in particolare sulle parentesi di Poisson tra le variabili canoniche. In questo caso dobbiamo verificare che

   $$\{P_i, P_j\}_{(p,q)} \ = \ 0 \ = \ \{Q^i, Q^j\}_{(p,q)} \ ; \ \ \{P_i, Q^j\}_{(p,q)} \ = \ \delta_i^j \ .$$

5. Se la trasformazione è indipendente dal tempo, possiamo verificare se la differenza

   $$p_i \, dq^i \ - \ P_i \, dQ^i$$

   tra le azioni abbreviate espresse nei due sistemi di coordinate è un differenziale esatto o meno.

Sarà più conveniente usare l'uno o l'altro di questi criteri a seconda della forma in cui la trasformazione di coordinate è nota.

Esercizio 15. Determinare se la trasformazione

$$P \;=\; \frac{1}{2}\,\left(p^2 \,+\, q^2\right)\;\;,\;\;\; Q \;=\; \arctan(q/p)$$

è canonica.

Esercizio 16. Riconsiderare alla luce di queste considerazioni l'esercizio 12, ossia determinare se

$$P \;=\; \ln[\sin(p)]\;\;,\;\;\; Q \;=\; q\;\tan(p)$$

è una trasformazione canonica. In caso affermativo, determinarne una funzione generatrice.

Esercizio 17. Determinare se

$$p \;=\; \sqrt{m\,P\,\sqrt{k}}\;Q\;\;,\;\;\; q \;=\; \sqrt{P/\sqrt{k}}\;\sin Q$$

definisce una trasformazione canonica, ed in caso affermativo determinarne una funzione generatrice $F(q, Q)$.

Esercizio 18. Applicare la trasformazione dell'esercizio precedente alla Hamiltoniana dell'oscillatore armonico

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; \frac{k}{2}\,q^2\;.$$

Integrare le equazioni del moto nelle variabili (P, Q), e da queste risalire alla soluzione delle equazioni del moto nelle variabili (p, q).

5 Equazione di Hamilton-Jacobi

All'inizio di questa dispensa abbiamo osservato che

$$dS \;=\; p_i\,dq^i \;-\; H\,dt \tag{18}$$

implica le relazioni (2), che riscriviamo qui per comodità di riferimento:

$$H \;=\; -\,\frac{\partial S}{\partial t}\;\;;\;\;\; p_i \;=\; \frac{\partial S}{\partial q^i}\;. \tag{19}$$

La prima di queste relazioni permette di scrivere immediatamente (qui la S va pensata come funzione di p, q, oltre che di t)

$$\frac{\partial S}{\partial t} \;+\; H(q, p; t) \;=\; 0\;; \tag{20}$$

usando anche la seconda delle (19), possiamo scrivere

$$\frac{\partial S}{\partial t} \;+\; H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}; t\right) \;=\; 0\;. \tag{21}$$

Questa è nota come *equazione di Hamilton-Jacobi*; si tratta di una PDE del primo ordine per $S = S(q, p, t)$, la cui soluzione è evidentemente della forma

$$S \;=\; A_0 \;+\; \Phi(q^1, ..., q^n; \alpha_1, ..., \alpha_n; t)\;,$$

in cui A_0 e le α_j sono delle costanti.[13]

Consideriamo ora la trasformazione canonica generata dalla funzione Φ, in cui le α_k sono viste come i nuovi momenti (quindi $\alpha_k = P_k$ per collegarci alla nostra notazione nel discutere le trasformazioni canoniche; denoteremo con β^k le coordinate ad essi coniugate, cioè le nuove coordinate sono $Q^k = \beta^k$), e quindi, secondo le (11), con

$$p_i \ = \ \frac{\partial \Phi}{\partial q^i} \ , \ \ \beta^k \ = \ \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} \ . \tag{22}$$

Ancora dalle formule (11) relative alle trasformazioni canoniche con funzione generatrice dipendente dalle vecchie coordinate e dai nuovi momenti, abbiamo che la nuova Hamiltoniana sarà

$$K \ = \ H \ + \ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \ = \ H \ + \ \frac{\partial S}{\partial t} \ . \tag{23}$$

Quindi la nuova Hamiltoniana è *identicamente zero*, come segue dalle (2). Naturalmente questo implica che le α_k e β^k sono anch'esse costanti, come segue dalle equazioni del moto relative alla nuova Hamiltoniana $K = 0$.

Dunque risolvere l'equazione di Hamilton-Jacobi corrisponde ad integrare il moto; va da sé che in generale risulta impossibile risolvere questa equazione, ed anzi solitamente la sua soluzione, quando possibile, passa attraverso la separazione delle coordinate, cioè la scomposizione della Hamiltoniana in n Hamiltoniane (ognuna relativa ad un solo grado di libertà), che si possono integrare separatamente.

5.1 Esempio. L'oscillatore armonico

Consideriamo l'oscillatore armonico in una dimensione, quindi

$$H \ = \ \frac{p^2}{2m} \ + \ \frac{k}{2} \, q^2 \ . \tag{24}$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi (21) è quindi

$$\frac{\partial S}{\partial t} \ + \ \left[\frac{1}{2m} \ \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 \ + \ \frac{k}{2} \, q^2 \right] \ = \ 0 \ . \tag{25}$$

Cerchiamo (come suggerito dal fatto che la derivata temporale appare solo nel primo termine) una soluzione del tipo

$$S(q, \alpha; t) \ = \ W(q, \alpha) \ - \ \alpha \, t \ ;$$

con questa posizione, che beninteso implica $H = -(\partial S / \partial t) = \alpha$, l'equazione diviene

$$\frac{1}{2m} \ \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 \ + \ \frac{k}{2} \, q^2 \ = \ \alpha \ , \tag{26}$$

[13] A questo proposito, osserviamo anche che segue dalla (18) che $\partial S / \partial p_i = 0$.

che naturalmente si riscrive come

$$\frac{\partial W}{\partial q} \ = \ \sqrt{m\,k}\ \sqrt{\frac{2\alpha}{k} \ - \ q^2} \ .$$

A sua volta questa è integrata per separazione di variabili, fornendo

$$W \ = \ \sqrt{m\,k}\ \int \sqrt{\frac{2\alpha}{k} \ - \ q^2}\ dq \ ,$$

e quindi[14]

$$S \ = \ \left[\sqrt{m\,k}\ \int \sqrt{\frac{2\alpha}{k} \ - \ q^2}\ dq \right] \ - \ \alpha\ t \ . \tag{27}$$

Possiamo ora determinare la trasformazione corrispondente: scrivendo per comodità $\omega := \sqrt{m/k}$, abbiamo

$$Q \ = \ \beta \ = \ \frac{\partial S}{\partial \alpha} \ = \ \omega \ \int \sqrt{\frac{k}{2\alpha - kq^2}}\ dq \ - \ t \ = \ -\,\omega\ \arccos\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}\ q \right) \ - \ t \ .$$

Segue da questa che

$$q \ = \ \sqrt{\frac{2\,\alpha}{k}}\ \cos[\omega\,(\beta + t)] \ , \tag{28}$$

che è proprio la soluzione per l'oscillatore armonico. Questa è completata da

$$p \ = \ \frac{\partial S}{\partial q} \ = \ k\,\omega\ \sqrt{\frac{2\,\alpha}{k} \ - \ q^2} \ .$$

Se al tempo $t = t_0$ si ha $p(t_0) = p_0 = 0$ e $q(t_0) = q_0 > 0$ (il che è sempre vero pur di scegliere opportunamente t_0), allora $\alpha = (k/2) q_0^2 = (m\omega^2/2) q_0^2$, ovvero

$$q_0 \ = \ \sqrt{2\,\alpha\,/\,m}\ \omega \ = \ \sqrt{2\,\alpha\,/\,k} \ .$$

La soluzione diventa allora, come deve,

$$q(t) \ = \ \sqrt{2\,\alpha\,/\,k}\ \cos[\omega(\beta + t)] \ , \quad p(t) \ = \ \sqrt{2\alpha m}\ \sin[\omega(\beta + t)] \ .$$

Si tratta, come ben noto, del moto lungo una ellisse di semiassi $\sqrt{2\alpha/m}$ e $\sqrt{2\alpha m}$, percorsa con velocità angolare costante ω (cioè la posizione è identificata dall'angolo $\varphi(t) = \omega(\beta + t)$), come indicato nelle formule esplicite.

Vediamo che le due costanti α, β hanno l'una il significato dell'energia totale del sistema, $\alpha = H$, e l'altra il significato della fase iniziale del sistema.

[14] L'integrale che appare in questa espressione si potrebbe calcolare facilmente, ma non è necessario farlo. Lo studente desideroso di avere tutti i dettagli puo' comunque ricordare che

$$\int \sqrt{A^2 - x^2} dx \ = \ \frac{1}{2}\ \left[x\,\sqrt{A^2 - x^2} \ + \ A^2\ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{A^2 - x^2}} \right) \right] \ .$$

Osservazione 11. Quando H non dipende esplicitamente dal tempo (come nel caso che abbiamo appena considerato), l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$\frac{\partial S}{\partial t} \ + \ H \left(q^1, ..., q^n; \frac{\partial S}{\partial q^1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q^n} \right) \ = \ 0 \ . \tag{29}$$

Possiamo quindi sempre separare la variabile t ponendo

$$S(q^1, ..., q^n, \alpha_1, ..., \alpha_n; t) \ = \ W(q^1, ..., q^n, \alpha_1, ..., \alpha_n) \ - \ \alpha_1 \, t \ .$$

Questa W è anche nota come *funzione caratteristica di Hamilton*, è soluzione di

$$H \left(q, \frac{\partial W}{\partial q} \right) \ = \ \alpha_1 \ ,$$

e genera una interessante trasformazione canonica: la nuova Hamiltoniana $K = \widetilde{H}$ non dipende dalle nuove coordinate $Q = \beta$, e quindi permette di integrare immediatamente il moto. Va da sé che questo implica, per il ben noto "principio di conservazione delle difficoltà", che determinare la funzione caratteristica di Hamilton è tanto difficile quanto integrare le equazioni di Hamilton.[15] $\odot$

Esercizio 19. Integrare l'equazione del moto di una particella inizialmente in quiete sotto l'azione della forza di gravità usando il metodo di Hamilton-Jacobi.

Esercizio 20. Integrare l'oscillatore armonico a due gradi di libertà usando il metodo di Hamilton-Jacobi.

5.2 Equazioni di Hamilton-Jacobi e variabili azione-angolo

E' probabile che lo studente abbia incontrato nei corsi precedenti il concetto di *sistema integrabile*; un sistema è integrabile se puo' essere trasformato in un sistema di oscillatori, ovvero se ammette *coordinate azione-angolo*

$$\{I_1, ..., I_n; \varphi^i, ...\varphi^n\}$$

(qui le $I_k \in R$ sono le azioni, e vanno pensate come momenti, e le $\varphi^k \in S^1$ sono gli angoli, e vanno pensati come le coordinate) per cui la Hamiltoniana sia

$$H \ = \ \omega^k \ I_k \ ,$$

con $\omega^k \in R$ le *frequenze*.

Per un tale sistema le equazioni di Hamilton sono semplicemente

$$\dot{I}_k \ = \ -\frac{\partial H}{\partial \varphi^k} \ = \ 0 \ , \ \ \dot{\varphi}^k \ = \ \frac{\partial H}{\partial I_k} \ = \ \omega^k \ ;$$

la loro soluzione è ovviamente

$$I_k(t) \ = \ I_k(0) \ , \ \ \varphi^k(t) \ = \ \varphi^k(0) \ + \ \omega^k \, t \ . \tag{30}$$

[15] In effetti abbiamo qui una situazione simile a quella incontrata nel risolvere una PDE quasi-lineare o il sistema caratteristico associato. Non è questo il corso in cui entrare nella discussione di una affermazione del genere, per cui si rimanda a testi di Meccanica Analitica.

In questo caso, l'equazione di Hamilton-Jacobi si scrive come

$$\frac{\partial S}{\partial t} \ + \ \omega^k \frac{\partial S}{\partial \varphi^k} \ = \ 0 \ ;$$

questa si risolve immediatamente con il metodo delle caratteristiche[16], ottenendo

$$S \ = \ f\left(\varphi^1 - \omega^1 t, ..., \varphi^n - \omega^n t\right) \ := \ f(z^1, ..., z^n) \ .$$

Qui f è una funzione arbitraria dei suoi argomenti.

La richiesta di avere $\alpha_k = \partial S/\partial q^k$ costante (ricordiamo che qui $q^k = \varphi^k$) fornisce

$$\alpha_k \ = \ \frac{\partial f}{\partial z^j} \frac{\partial z^j}{\partial \varphi^k} \ = \ \frac{\partial f}{\partial z^k} \ = \ \text{costante}$$

e quindi

$$S \ = \ f(z^1, ..., z^n) \ = \ \alpha_k \, z^k \ = \ \alpha_k \ \left(\varphi^k \ - \ \omega^k \, t\right) \ .$$

D'altra parte,

$$\beta^k \ = \ \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \ = \ \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} \ = \ z^k \ = \ \varphi^k \ - \ \omega^k \, t \ ;$$

ne segue che, come già sapevamo,

$$\varphi^k \ = \ \beta^k \ + \ \omega^k \, t \ .$$

La Hamiltoniana nelle nuove variabili (α, β) è quindi

$$H \ = \ -\frac{\partial S}{\partial t} \ = \ -\frac{\partial f}{\partial t} \ = \ \alpha_k \omega^k \ ,$$

e le equazioni del moto, ricordando che le variabili canoniche sono ora le (I_k, φ^k), sono proprio

$$\dot{a}_k \ = \ 0 \ , \ \ \dot{\omega}^k \ = \ 0 \ .$$

Bibliografia

Tra gli infiniti testi dedicati alla formulazione canonica della Meccanica, ne segnalo due di impostazione abbastanza diversa ma ambedue ottimi. Qui ho seguito l'impostazione del primo, mentre quella del secondo è più geometrica.

- L.D. Landau and I.M. Lifsits, *Meccanica*, Editori Riuniti
- V.I. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti

`G. Gaeta, 09/05/2019`

[16] Che si suppone ben noto dai corsi di Analisi o dal corso di Fisica Matematica 2; si veda anche la nota precedente.