Assiomi ed aspetti fondamentali della Meccanica Quantistica

Corso di Fisica Matematica 3, a.a. 2018/19
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

28/5/2019

Questa dispensa richiama molto brevemente gli assiomi e gli aspetti fondamentali della Meccanica Quantistica come sono stati discussi a lezione; si raccomanda di usarla in connessione ad un testo (ad esempio quello di Picasso che stiamo utilizzando, od il Landau-Lifshitz). Una dispensa con più dettagli su spazi di Hilbert ed operatori lineari in questi è anche disponibile.

1 Notazioni

Iniziamo richiamando alcune notazioni (e nozioni) di base riguardo agli spazi di Hilbert.

Ricordiamo che se H è uno spazio di Hilbert, in esso è definito un prodotto scalare

$$(.,.) : \ H \times H \ \to \ \mathbf{C} \ ;$$

si tratta di una operazione sesquilineare, ossia (per $\mathbf{u},\mathbf{v} \in H$, $\alpha \in \mathbf{C}$, ed indicando con α^* il complesso coniugato di α)

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{v},\mathbf{u}) &=& (\mathbf{u},\mathbf{v})^* \ ; \\ (\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}) &=& (\mathbf{u},\mathbf{v}) \ + \ (\mathbf{u},\mathbf{w}) \ ; \\ (\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}) &=& \alpha \ (\mathbf{u},\mathbf{v}) \ ; \\ (\alpha\mathbf{u},\mathbf{v}) &=& \alpha^* \ (\mathbf{u},\mathbf{v}) \ . \end{array}$$

Come ben noto, la presenza di un prodotto scalare permette di definire una *norma* associata ad esso in modo naturale:

$$||\mathbf{u}|| \ := \ [(\mathbf{u},\mathbf{u})]^{1/2} \ .$$

Dati due spazi di Hilbert H, H' ed un operatore lineare $L : H \to H'$ con dominio $D(L) \subseteq H$, il suo *aggiunto* (detto anche *hermitiano coniugato*) L^+ con dominio $D(L^+) \subseteq H'$ è l'operatore (lineare) tale che, per ogni $\mathbf{v} \in D(L) \subseteq H$ e $\mathbf{u} \in D(L^+) \subseteq H'$, si ha[1]

$$(\mathbf{u}, L\mathbf{v}) \ = \ (L^+\mathbf{u},\mathbf{v}) \ .$$

[1] E' chiaro che questa definizione identifica L^+ sul range di L, non in tutto H'.

Quando $H' = H$, abbiamo

$$(\mathbf{u}, L\mathbf{v}) \ = \ (L^+\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in D(L), \ \mathbf{v} \in D(L^+) \ .$$

Si dice che L è *hermitiano* (o *simmetrico*) se

$$(\mathbf{u}, L\mathbf{v}) \ = \ (L\mathbf{u}, \mathbf{v}) \ \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D(L) \ .$$

Solitamente saremo interessati al caso in cui $D(L)$ è *denso* in H. Se inoltre $D(L) = D(L^+)$, diremo che l'operatore è *autoaggiunto*.[2]

Consideriamo infine il concetto di *base* in H; in particolare vogliamo considerare spazi di Hilbert *separabili*, dunque che ammettono una base *numerabile* $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$.

Allora ogni vettore $\varphi \in H$ si scrive come (utilizziamo qui come al solito la convenzione secondo cui è implicita la somma su indici ripetuti)

$$\varphi \ = \ c^k \ \psi_k \ ;$$

sottolineamo che l'uguaglianza va intesa nel senso della norma (indotta dal prodotto scalare) su H; ad esempio se $H = L^2(R)$, l'uguaglianza non implica che le due funzioni siano uguali in ogni punto, ma solo a meno di un insieme di misura nulla.

I coefficienti $c^k \in \mathbf{C}$ sono detti *coefficienti di Fourier* per φ (rispetto alla base $\{\psi_k\}$). Essi sono dati da

$$c^k \ = \ (\psi_k, \varphi) \ .$$

Infine ricordiamo che in uno spazio di Hilbert vale la *disuguaglianza triangolare* (Cauchy-Schwarz)

$$|(\varphi, \psi)|^2 \ \leq \ (\varphi, \varphi) \ (\psi, \psi) \ .$$

Per ulteriori dettagli sugli spazi di Hilbert, rimandiamo alla apposita dispensa o ad uno dei testi citati in bibliografia.

2 Assiomi

Possiamo ora definire un sistema di assiomi, che legano concetti ed oggetti fisici a oggetti matematici.

Oseerviamo che il sistema di assiomi puo' essere (leggermente) diverso da un testo all'altro; lo studente non deve quindi stupirsi se trova assiomi (leggermente) diversi in testi diversi.

1. Stati. Gli stati fisici sono in corripondenza con classi di equivalenza di uno spazio di Hilbert separabile H; la relazione di equivalenza è data dal prodotto per un fattore scalare (complesso).[3]

[2] Lo studente è invitato ad identificare esempi di operatori che sono simmetrici ma non autoaggiunti, ad esempio in $H = L^2(R)$.

[3] Dunque gli stati fisici sono in corrispondenza dei *raggi* in H.

2. Osservabili. Le osservabili, ossia le quantità fisiche suscettibili di essere misurate, sono in corrispondenza con operatori lineari autoaggiunti – e quindi in particolare Hermitiani – su H che abbiano la proprietà di ammettere un *sistema completo* di autovettori.[4]

3. Processo di misura. La misura dell'osservabile (rappresentata dall'operatore) A su uno stato generico $\varphi \in H$ produrrà come risultato uno degli autovalori $\lambda_{(k)}$ di A. Immediatamente dopo la misura lo stato del sistema è descritto da uno degli autovettori di A appartenenti all'autospazio identificato da $\lambda_{(k)}$.

4. Probabilità di transizione. La probabilità che per effetto della misura dell'osservabile A lo stato del sistema, inizialmente descritto da φ, passi ad essere ψ (un autovettore di A), è fornita da

$$P(\varphi \mapsto \psi) \ = \ \frac{|(\psi, \varphi)|^2}{(\varphi, \varphi)\ (\psi, \psi)} \ .$$

Notiamo che nel caso di osservabili degeneri, il risultato del processo di misura *non* identifica completamente lo stato del sistema dopo la misura (ma solo che esso appartiene all'autospazio identificato da $\lambda_{(k)}$, vedi sopra). Gli assiomi su elencati vengono quindi completati con un postulato non necessario matematicamente ma molto ragionevole fisicamente:

Postulato di von Neumann. Se $\lambda_{(k)}$ identifica un autospazio $H_{(k)}$ degenere, lo stato del sistema dopo la misura sarà (descritto da) quello tra i vettori $\psi \in H_{(k)}$ che rende minimo il cambiamento rispetto a φ.

E' facile vedere che (utilizzando la metrica in H indotta dal prodotto scalare) indicando con $\pi_{(k)}$ la proiezione ortogonale su $H_{(k)}$, lo stato prescritto dal postulato di von Neumann corrisponde allo stato

$$\widetilde{\varphi} \ = \ \pi_{(k)} \, \varphi \ \in \ H_{(k)} \ ,$$

cioè alla proiezione dello stato originario φ sull'autospazio identificato dal risultato della misura.

[4] In altre parole, H ammette una base (numerabile, trattandosi di uno spazio separabile) costituita da autovettori dell'osservabile; a questi corrisponde uno *spettro* (l'insieme degli autovalori) discreto.

3 Probabilità di transizione

Non è immediatamente ovvio che la definizione di probabilità di transizione fornita poco sopra sia sodisfacente. Perché lo sia dobbiamo infatti richiedere (o meglio verificare)

1. Una condizione "matematica", ossia che la somma delle diverse probabilità su tutti i possibili stati finali sia uno (il fatto che siano tutte positive è evidente, e che siano minori di uno segue dalla disuguaglianza triangolare);
2. Ed una condizione *fisica*: dato che i vettori φ ed $\alpha\varphi$ (per $\alpha \in \mathbf{C}$) rappresentano lo stesso stato fisico, così come i vettori ψ e $\beta\psi$ (per ogni coppia di numeri complessi ambedue non nulli α, β), questa definizione deve essere indipendente dalla scelta del rappresentativo degli stati (iniziale e finale) fisici.

Queste proprietà sono facilmente verificate.

1. Per verificare la prima è utile la *relazione di completezza* (qui $\mathbf{1}$ è l'operatore identità, $\mathbf{1}\phi = \phi \ \forall \phi \in H$) per un sistema completo in H,

$$\mathbf{1} \ = \ \sum_k \psi_k \ (\psi_k, .) \ = \ \sum_k |\psi_k\rangle \ \langle\psi_k| \ .$$

Ricordiamo che per definizione di osservabile esiste una base di H costituita da autovettori di A, che indichiamo con ψ_k; supponiamo per comodità che sia $|\psi_k|^2 = 1$ per ogni k, e che $\langle\psi_k|\psi_m\rangle = \delta_{km}$ ossia che si tratti di una base ortonormale (il che è sempre possibile).

Sviluppando ϕ in termini di questa base, abbiamo (si tratta naturalmente della scrittura di ϕ come serie di Fourier nella base $\{\psi_k\}$)

$$|\phi\rangle \ = \ \mathbf{1}\,|\phi\rangle \ = \ \sum_k \langle\psi_k|\phi\rangle \ |\psi_k\rangle \ := \ \sum_k c_k\,|\psi_k\rangle$$

Possiamo ora facilmente calcolare (ricordiamo che $\langle\psi_k|\psi_k\rangle = 1$)

$$\mathcal{P} \ := \ \sum_k P(\phi \mapsto \psi_k) \ = \ \sum_k \frac{|\langle\phi|\psi_k\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} \ .$$

Naturalmente (come ben noto dal corso introduttivo sugli spazi di Hilbert e le serie di Fourier, o dalla dispensa dedicata a questi)

$$\langle\phi|\phi\rangle \ = \ \sum_{k,j} c_k^* c_j \ \langle\psi_k|\psi_j\rangle \ = \ \sum_k |c_k|^2 \ .$$

(Si tratta della identità di Parseval.)

Quanto al numeratore che appare nella espressione di $\mathcal{P}$, abbiamo

$$\langle\phi|\psi_k\rangle \ = \ \sum_j c_j^* \langle\psi_j|\psi_k\rangle \ = \ \sum_j c_j^* \ \delta_{jk} \ = \ c_k^* \ ;$$

ne segue che
$$\sum_k |\langle\phi|\psi_k\rangle|^2 \;=\; \sum_k |c_k|^2 \;,$$
ed infine
$$\mathcal{P} \;=\; \frac{\sum_k |c_k|^2}{\sum_j |c_j|^2} \;=\; 1.$$

2. Quanto alla verifica della seconda proprietà, questa si riduce ad un semplice calcolo per mostrare che
$$P(\alpha\varphi \mapsto \beta\psi) \;=\; P(\varphi \mapsto \psi) \;.$$
Infatti, dalla definizione e con α, β arbitrari numeri complessi non nulli,
$$\begin{aligned} P(\alpha\varphi \mapsto \beta\psi) \;&=\; \frac{|\langle\alpha\varphi|\beta\psi\rangle|^2}{\langle\alpha\varphi|\alpha\varphi\rangle\;\langle\beta\psi|\beta\psi\rangle} \\ &=\; \frac{|\alpha^*\beta\;\langle\varphi|\psi\rangle|^2}{(|\alpha|^2\langle\varphi|\varphi\rangle)\;(|\beta|^2\langle\psi|\psi\rangle)} \\ &=\; \frac{|\alpha\beta|^2\;|\langle\varphi|\psi\rangle|^2}{|\alpha|^2\,|\beta|^2\;\langle\varphi|\varphi\rangle\;\langle\psi|\psi\rangle} \\ &=\; \frac{|\langle\varphi|\psi\rangle|^2}{\langle\varphi|\varphi\rangle\;\langle\psi|\psi\rangle} \\ &=\; P(\varphi \mapsto \psi) \;. \end{aligned}$$

4 Valor medio e dispersione

Se disponiamo di un grande numero di sistemi identici, tutti "preparati" nello stato ϕ, ha senso chiedersi quale sarà la media statistica $\langle A\rangle_\phi$ delle misure di A su queste copie dello stato ϕ.

Risulta che
$$\langle A\rangle_\phi \;=\; \frac{(\phi, A\phi)}{(\phi,\phi)} \;. \tag{1}$$
Infatti, detti ψ_k gli autovettori (normalizzati, per comodità) di A, λ_k i corrispondenti autovalori, e
$$p_k \;=\; \frac{|\langle\phi|\psi_k\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle}$$
la probabilità di osservare il valore λ_k, abbiamo per definizione
$$\langle A\rangle_\phi \;=\; \sum_k p_k\,\lambda_k \;.$$

D'altra parte, usando la relazione di completezza e l'ortonormalità[5] della base $\{\psi_k\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\langle\phi|A\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} &= \frac{\sum_{jk}\langle\phi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|A|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \\
&= \frac{\sum_{jk}\lambda_k\langle\phi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \\
&= \frac{\sum_{k}\lambda_k\langle\phi|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \\
&= \sum_k \lambda_k \frac{|\langle\psi_k|\phi\rangle|^2}{\langle\phi|\phi\rangle} \ = \ \sum_k p_k \ \lambda_k \ .
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato la validità della relazione (1) su enunciata.

Allo stesso modo, possiamo chiederci quale sarà la *dispersione* di queste misure. Come nel caso classico, la dispersione (sullo stato ϕ) sarà data da

$$[\sigma^2(A)]_\phi \ = \ \langle A^2\rangle_\phi \ - \ \langle A\rangle_\phi^2 \ .$$

E' facile verificare che la dispersione è nulla se e solo se ϕ è un autostato di A. Per vedere questo, si puo' ricorrere ad un calcolo esplicito (fornito nel seguito), o ricordare che la definizione *ab initio* di dispersione è

$$\left[\sigma^2(A)\right]_\phi \ := \ \langle (A - \langle A\rangle_\phi)^2\rangle_\phi \ ; \tag{2}$$

quindi abbiamo la media di un quadrato, che è sempre positiva o nulla, e nulla se e solo se $A = \langle A\rangle$ sullo stato ϕ, il che avviene solo se ϕ è un autostato di A.

Calcolo esplicito

Puo' essere utile ottenere lo stesso risultato per mezzo di un calcolo esplicito, per familiarizzarsi con il formalismo. Sia come al solito $\{\psi_k\}$ una base di H costituita da autostati dell'osservabile A. Possiamo quindi scrivere

$$|\phi\rangle \ = \ \sum_k \langle\psi_k|\phi\rangle \ |\psi_k\rangle \ = \ \sum_k c_k \ |\psi_k\rangle \ ;$$

inoltre segue da questa che

$$A \ |\phi\rangle \ = \ \sum_k \langle\psi_k|\phi\rangle \ A|\psi_k\rangle \ = \ \langle\psi_k|\phi\rangle \ \lambda_{(k)} \ |\psi_k\rangle \ .$$

[5]Sottolineamo ancora una volta che tutti i risultati valgono anche senza supporre che la base sia ortonormale (resta comunque valido il teorema per cui autofunzioni di un operatore Hermitiano corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra di loro), la assunzione di ortonormalità serve solo ad evitare una notazione inutilmente pesante, dato che ci si puo' sempre ricondurre a questo caso.

Allora da una parte

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle_\phi &= \langle \phi | A | \phi \rangle \;=\; \sum_{k,j} \langle \phi | \psi_j \rangle \, \langle \psi_j | A | \psi_k \rangle \, \langle \psi_k | \phi \rangle \\
&= \sum_{k,j} \lambda_k \langle \phi | \psi_j \rangle \, \langle \psi_j | \psi_k \rangle \, \langle \psi_k | \phi \rangle \\
&= \sum_{k,j} \lambda_k \langle \phi | \psi_j \rangle \, \delta_{jk} \, \langle \psi_k | \phi \rangle \\
&= \sum_k \lambda_k |\langle \phi | \psi_k \rangle|^2 \\
&= \sum_k \lambda_k \, |c_k|^2 \ ;
\end{aligned}$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned}
\langle A^2 \rangle_\phi &= \langle \phi | A^2 | \phi \rangle \;=\; \langle A\phi | A\phi \rangle \\
&= \sum_{j,k} \lambda_j^* \lambda_k \, \langle \phi | \psi_j \rangle \, \langle \psi_j | \psi_k \rangle \, \langle \psi_k | \phi \rangle \\
&= \sum_{j,k} \lambda_j^* \lambda_k \, \langle \phi | \psi_j \rangle \, \delta_{jk} \, \langle \psi_k | \phi \rangle \\
&= \sum_k |\lambda_k|^2 \, |\langle \psi_k | \phi \rangle|^2 \\
&= \sum_k |\lambda_k|^2 \, |c_k|^2 \ .
\end{aligned}$$

Da questo calcolo ricaviamo che

$$[\sigma^2(A)]_\phi \;=\; \langle A^2 \rangle_\phi \;-\; [\langle A \rangle_\phi]^2 \;=\; \sum_k |\lambda_k|^2 \, |c_k|^2 \;-\; \left[\sum_k \lambda_k |c_k|^2 \right]^2 \ .$$

Se ϕ è un autostato di A, diciamo corrispondente all'autovalore λ_n, allora tutti i c_k con $k \neq n$ sono nulli, e segue da $|\psi|^2 = 1$ che $|c_n|^2 = 1$ se λ_n è non degenere, oppure nel caso di λ_n degenere[6] la somma dei c_k corrispondenti soddisfa

$$\sum_m |c_m|^2 \;=\; 1 \ .$$

In ambedue i casi, abbiamo

$$\langle A \rangle_\phi \;=\; \lambda_n \ ; \quad \langle A^2 \rangle_\phi \;=\; |\lambda_n|^2 \ ;$$

dato che inoltre λ_n è sicuramente reale, abbiamo $|\lambda_n|^2 = \lambda_n^2$ e

$$[\sigma^2(A)]_\phi \;=\; \lambda_n^2 \;-\; \lambda_n^2 \;=\; 0 \ .$$

[6] Nel qual caso potremmo sempre cambiare la base nell'autospazio corrispondente, in modo che ϕ coincida con uno degli autovettori corrispondenti a questo autospazio.

Procedendo in direzione contraria, l'eguaglianza delle due somme che identificano $\langle A^2 \rangle$ ed $\langle A \rangle^2$ è possibile (usando ancora la condizione $|\phi|^2 = 1$) solo se

$$\sum_k \lambda_k |c_k|^2 \; = \; \lambda_n \sum_m |c_m|^2 \; = \; \lambda_n \; ,$$

ossia solo se ϕ è un autostato.

5 Osservabili compatibili

Due osservabili A e B si dicono *compatibili* se ammettono un sistema completo di autovettori comuni. E' possibile dimostrare che questa richiesta è equivalente alla condizione

$$[A, B] \; = \; 0 \; .$$

Infatti, sia $\{\psi_k\}$ il sistema completo di autovettori in comune, con autovalori rispettivamente α_k e β_k per le osservabili A e B ; allora per ogni $\phi \in H$ abbiamo

$$\begin{aligned} A\,B\,|\phi\rangle \; &= \; \sum_k A\,B\,\langle\psi_k|\phi\rangle\,|\psi_k\rangle \; = \; \sum_k \beta_k\,\langle\psi_k|\phi\rangle\; A|\psi_k\rangle \\ &= \; \sum_k \alpha_k\,\beta_k\,\langle\psi_k|\psi\rangle\,|\psi_k\rangle \; ; \\ B\,A\,|\phi\rangle \; &= \; \sum_k B\,A\,\langle\psi_k|\phi\rangle\,|\psi_k\rangle \; = \; \sum_k \alpha_k\,\langle\psi_k|\phi\rangle\; B|\psi_k\rangle \\ &= \; \sum_k \alpha_k\,\beta_k\,\langle\psi_k|\psi\rangle\,|\psi_k\rangle \; . \end{aligned}$$

Dunque $AB|\phi\rangle = BA|\phi\rangle$ per qualsiasi vettore $|\phi\rangle \in H$, e pertanto

$$A\,B \; = \; B\,A \; ; \quad [A, B] \; = \; 0 \; .$$

Viceversa, sia $[A, B] = 0$ e siano ψ_k gli autovettori di A; indicheremo inoltre con $H_k \subseteq H$ l'autospazio di A corrispondente all'autovalore λ_k. Mostriamo che necessariamente $B : H_k \to H_k$, e $B : H_k^\perp \to H_k^\perp$.

Infatti, per $\varphi \in H_k$ abbiamo

$$A\,(B|\varphi\rangle) \; = \; BA|\varphi\rangle \; = \; \lambda_k \; (B\,|\varphi\rangle) \; ;$$

dunque effettivamente $B : H_k \to H_k$.

Allo stesso modo, se $\eta \in H_k^\perp$, ossia $\langle\eta|\varphi\rangle = 0 \; \forall\varphi \in H_k$ deve essere $\eta \in H_m$ con $m \neq k$; dunque[7] $B : H_m \to H_m$, ed a maggior ragione lascia invariante

$$H_k^\perp \; = \; \bigoplus_{m \neq k} H_m \; .$$

[7] Si giunge alla stessa conclusione notando che $\langle B\eta|\varphi\rangle = \langle\eta|B\varphi\rangle = \langle\eta|\widetilde{\varphi}\rangle$ per qualche $\widetilde{\varphi}$ in H_k, dato che $B : H_k \to H_k$; ma per ipotesi $\langle\eta|\varphi\rangle = 0$ per ogni $\varphi \in H_k$, quindi in effetti $B\eta \in H_k^\perp$.

Allora sia $\{\psi_k\}$ la base ortonormale di autovettori di A. Se A è non degenere, dunque gli spazi H_k sono uno-dimensionali, segue immediatamente da $B : H_k \to H_k$ che $B|\psi_k\rangle = \beta_k|\psi_k\rangle$. Se invece A è degenere (diciamo con H_k di dimensione d_k), ogni vettore $\varphi_k \in H_k$ è autovettore di A (con autovalore α_k); dato che H_k è invariante sotto B, B ammetterà d_k autovettori indipendenti appartenenti ad H_k; è allora sufficiente scegliere come elementi della base in H_k quei (o certi tra i) d_k vettori ψ_k che oltre ad essere autovettori di A siano anche autovettori di B[8]. Questo completa la dimostrazione dell'equivalenza tra l'esistenza di una base di autovettori comuni e la condizione di commutazione.

Sottolineiamo infine che nel caso di osservabili compatibili *non degeneri* ogni autovettore di A è anche autovettore di B (e viceversa); questo invece non è in generale vero per osservabili compatibili degeneri.[9]

6 Stati puri e miscele statistiche

Abbiamo finora considerato sempre degli stati (che chiameremo *stati puri*) descritti da un vettore (o piu' precisamente da un raggio) $|\phi\rangle$ in uno spazio di Hilbert; la misura di una osservabile A su questo stato fornisce dei valori (gli autovalori $\lambda_{(i)}$ di A) con certe probabilità p_i; dunque la conoscenza dello stato $|\phi\rangle$ fornisce una informazione *statistica* sul risultato di una misura di A.

Una situazione simile – ma non uguale! – si ha se *non* conosciamo lo stato ϕ ma sappiamo che esso ha determinate probabilità di essere uno di certi stati φ_m (questi possono essere degli autostati di A, ma non è necessario che sia così).

Detto in altro modo, la meccanica quantistica ci fornisce le frequenze dei possibili risultati di una misura di A (analoghe alle probabilità su indicate) quando effettuiamo la misura su un ensemble costituito da un gran numero di copie del sistema tutte preparate nello stesso stato (ad esempio dei fotoni che sono tutti passati attraverso un filtro polaroid con orientamento determinato e quindi sono tutti nello stesso stato di polarizzazione). Possiamo però avere una situazione in cui non tutte le N copie del sistema sono nello stesso stato, ma ve ne sono n_i (con ovviamente $n_1 + n_2 + ... = N$) in ognuno dei possibili stati φ_i; ad esempio n_1 tra i fotoni di cui sopra vengono fatti passare alcuni attraverso un filtro polaroid con un certo orientamento, ed n_2 attraverso un filtro con orientamento ortogonale a quello usato per gli altri.

E' importante capire che queste situazioni sono profondamente diverse tra di loro, anche se in alcuni casi specifici possono dare le stesse statistiche per i possibili risultati della misura di una determinata osservabile A.

Consideriamo per semplicità il caso in cui ϕ è la sovrapposizione di due soli stati (il caso generale è analogo ma con sommatorie più complesse; lo studente

[8] Si noti che questa dimostrazione è insensibile al problema della possibile degenerazione di B ristretta agli autospazi H_k di A.

[9] Il caso limite è rappresentato da $\mathbf{1}$ ed A; dato che ogni vettore di H è autovettore di $\mathbf{1}$ (con autovalore 1), queste osservabili sono sicuramente compatibili (è sufficente scegliere la base di autovalori di A); ed ovviamente $[\mathbf{1}, A] = 0$. Ma non tutti gli autovettori di $\mathbf{1}$ sono autovettori di A!

è invitato a considerarlo per esercizio), che assumeremo per ulteriore semplicità di notazione essere normalizzati (ma non necessariamente ortogonali):

$$\phi \ = \ \alpha \varphi_1 \ + \ \beta \varphi_2 \ , \tag{3}$$

dove abbiamo

$$\langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle \ = \ 1 \ = \ \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle \ ; \ \ \langle \phi | \phi \rangle \ = \ 1 \ .$$

La miscela statistica S "corrispondente" (apparentemente simile ma in effetti diversa) sarà descritta dallo stato φ_1 con probabilità $p_1 = |\alpha|^2$ e dallo stato φ_2 con probabilità $p_2 = |\beta|^2$; scriviamo anche

$$S \ = \ \{ \varphi_1, p_1 ; \varphi_2, p_2 \} \ . \tag{4}$$

Allora dalle formule generali segue che

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\phi \ &= \ \langle \phi | A | \phi \rangle \\ &= \ (\alpha^* \langle \varphi_1 | \ + \ \beta^* \langle \varphi 2 |) \ (\alpha A | \varphi_1 \rangle \ + \ \beta A | \varphi_2 \rangle) \\ &= \ |\alpha|^2 \ \langle \varphi_1 | A | \varphi_1 \rangle \ + \ |\beta|^2 \ \langle \varphi_2 | A | \varphi_2 \rangle \\ &\quad + \ (\alpha^* \beta \ \langle \varphi_1 | A | \varphi_2 \rangle \ + \ \alpha \beta^* \ \langle \varphi_2 | A | \varphi_1 \rangle) \ . \end{aligned}$$

Sulla miscela statistica abbiamo ovviamente

$$\langle A \rangle_S \ = \ p_1 \ \langle A \rangle_{\varphi_1} \ + \ p_2 \ \langle A \rangle_{\varphi_2} \ = \ |\alpha|^2 \langle \varphi_1 | A | \varphi_1 \rangle \ + \ |\beta|^2 \langle \varphi_2 | A | \varphi_2 \rangle \ .$$

E' immediato verificare che in generale, cioè a meno di non avere

$$\mathrm{Re} \left[\langle \varphi_1 | A | \varphi_2 \rangle \right] \ = \ 0 \ ,$$

si ha

$$\langle A \rangle_\phi \ \neq \ \langle A \rangle_S \ . \tag{5}$$

Possiamo esprimere il risultato dei nostri calcoli anche in un modo piu' suggestivo, cioè dicendo che: in uno stato puro le diverse componenti possono interferire tra di loro[10], mentre in una miscela statistica i diversi stati che compongono la miscela non interferiscono.

7 Traccia di una osservabile

Vogliamo ora definire il concetto di *traccia* di un operatore in uno spazio di Hilbert[11] (o almeno di una osservabile). Per $\Psi = \{ \psi_1, \pi_2, ... \}$ una base ortonormale nello spazio di Hilbert H, definiamo

$$\mathtt{Tr}(A) \ := \ \sum_k \langle \psi_k | A | \psi_k \rangle \ ; \tag{6}$$

[10]Quindi lo stato puro puo' "interferire con sé stesso"; questa proprietà corrisponde al concetto popolarizzato sotto il nome di *entanglement*.

[11]In effetti, questa sezione avrebbe dovuto essere inserita nella dispensa dedicata agli spazi di Hilbert; non avendolo fatto neanche a lezione, la inserisco qui cioè dove il concetto è usato. Con la prossima revisione delle dispense, potrebbe trasmigrare nell'altra dispensa.

si noti che qui la somma è sugli elementi di una *qualsiasi* base ortonormale per H (senza relazione con A).

Naturalmente nel caso di spazi finito-dimensionali gli operatori lineari si riducono a matrici, e la nostra definizione di traccia corrisponde a quella usuale di traccia di una matrice.

Abbiamo già sottolineato che nella nostra definizione abbiamo usato una determinata base ortonormale $\{\psi_k\}$. Come ben noto la traccia di una matrice è pari alla somma dei suoi autovalori, ed è quindi invariante sotto un cambio di base; lo stesso avviene in questo caso, come dimostriamo.

Infatti, sia $\{\psi_k\}$ una base ortonormale di autovettori per l'osservabile A (questa esiste per definizione di osservabile); allora la traccia calcolata in questa base è

$$\mathtt{Tr}(A) \ = \ \sum_k \langle\psi_k|A|\psi_k\rangle \ = \ \sum_k \lambda_{(k)} \langle\psi_k|\psi_k\rangle \ = \ \sum_k \lambda_{(k)} \ .$$

Sia ora $\{\eta_k\}$ un'altra base ortonormale, e calcoliamo la traccia attraverso questa. Usando la relazione di completezza, cioè

$$|\eta_i\rangle \ = \ \sum_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\eta_i\rangle \ = \ \sum_k \langle\psi_k|\eta_i\rangle \, |\psi_k\rangle \ := \ \sum_k c_{ik}|\psi_k\rangle \ ,$$

abbiamo immediatamente che

$$\begin{aligned} \sum_i \langle\eta_i|A|\eta_i\rangle \ &= \ \sum_{i,j,k} \langle\eta_i|\psi_k\rangle\langle\psi_k|A|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\eta_i\rangle \ = \ \sum_{i,j,k} c^*_{ik} \ c_{ij} \ \langle\psi_k|A|\psi_j\rangle \\ &= \ \sum_{ijk} c^*_{ik} \ c_{ij} \ \lambda_{(j)} \ \langle\psi_k|\psi_j\rangle \ = \ \sum_{ijk} c^*_{ik} \ c_{ij} \ \lambda_{(j)} \ \delta_{jk} \\ &= \ \sum_j \lambda_{(j)} \sum_i |c_{ij}|^2 \ = \ \sum_j \lambda_{(j)} \ = \ \sum_j \langle\psi_j|A|\psi_j\rangle \ , \end{aligned}$$

e la dimostrazione è così completa.

Notiamo che nella dimostrazione abbiamo usato la relazione

$$\sum_i |c_{ij}|^2 \ = \ 1$$

che è sempre valida se c_{ij} sono i coefficienti di Fourier dei vettori di una base ortonormale in termini di un'altra base ortonormale.[12]

Sottolineamo infine che altre proprietà della traccia di matrici *non* si estendono al caso generale di operatori lineari. In particolare, in generale

$$\mathtt{Tr}(AB) \neq \ \mathtt{Tr}(BA) \qquad \text{per } [A,B] \neq 0 \ .$$

[12]In effetti, la nostra discussione usa l'esistenza di una base "di riferimento" per A, che esiste in quanto A è una osservabile. Lo studente è invitato a riflettere se l'indipendenza della traccia dalla base in cui è definita è verificata anche per operatori in H che *non* sono osservabili, e che quindi non possiedono le proprietà di essere autoaggiunti e di ammettere una base di autovettori in H.

8 Matrice Densità

Consideriamo ancora la miscela statistica

$$S \;=\; \{p_1, \phi_1; p_2, \phi_2; ...\} \;;$$

gli stati ϕ_i sono normalizzati, $\langle \phi_i | \phi_i \rangle = 1$, ma non necessariamente ortogonali.

Definiamo allora gli operatori di proiezione[13] (qui naturalmente *non* si somma sull'indice i, anche se ripetuto)

$$\pi_i \;=\; |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \;,$$

e tramite questi l'operatore

$$\varrho \;=\; \varrho_S \;=\; \sum_i p_i \, \pi_i \;; \tag{7}$$

è evidente che $\pi_i^+ = \pi_i$, e quindi l'operatore ϱ è hermitiano:

$$\varrho \;=\; \varrho^+ \;.$$

L'operatore ϱ è noto come *matrice densità* (o anche come *operatore statistico*). La sua rilevanza è dovuta al fatto che per un'osservabile A, e con ψ_k una base ortonormale in H, il *valor medio di A sulla miscela statistica S* è dato da

$$\langle A \rangle_S \;=\; \mathtt{Tr}(\varrho_S A) \;:=\; \sum_k \langle \psi_k | \varrho_S A | \psi_k \rangle \;. \tag{8}$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
\mathtt{Tr}(\varrho_S A) \;&=\; \sum_k \langle \psi_k | \varrho_S A | \psi_k \rangle \\
&=\; \sum_k \sum_i \langle \psi_k | p_i | \phi_i \rangle \, \langle \phi_i | A | \psi_k \rangle \\
&=\; \sum_k \sum_i p_i \; \langle \psi_k | \phi_i \rangle \, \langle A\phi_i | \psi_k \rangle \\
&=\; \sum_k \sum_i p_i \; \langle A\phi_i | \psi_k \rangle \; \langle \psi_k | \phi_i \rangle \\
&=\; \sum_i p_i \; \langle A\phi_i | \phi_i \rangle \;=\; \sum_i p_i \; \langle \phi_i | A\phi_i \rangle \\
&=\; \sum_i p_i \, \langle A \rangle_{\phi_i} \;=\; \langle A \rangle_S \;.
\end{aligned}$$

Come abbiamo visto in precedenza, la traccia è indipendente dalla base $\{\psi_k\}$ in cui è calcolata.

[13] Notiamo che gli operatori di proiezione sono delle osservabili: essi sono evidentemente hermitiani ed anzi autoaggiunti, hanno come autovalori $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, con autospazi il raggio identificato dal vettore su cui si proietta ed il suo complemento ortogonale.

9 Proprietà della matrice densità

Notiamo ora alcune proprietà di ϱ e dei suoi autovalori, che indicheremo con σ_i (questi, ricordiamo, sono necessariamente reali essendo ϱ un operatore hermitiano):

1. $\mathtt{Tr}(\varrho) = 1$;
2. $\langle\varphi|\varrho|\varphi\rangle \geq 0 \ \forall\varphi \in H$;
3. $\sigma_i \geq 0$;
4. $\mathtt{Tr}(\varrho^2) \leq 1$;
5. $\mathtt{Tr}(\varrho^2) = 1$ implica $\varrho^2 = \varrho$ e questo a sua volta comporta che S è in realtà uno stato puro.

Queste sono dimostrate con alcuni semplici calcoli.

1. Con $\mathtt{Tr}(\varrho)$ intendiamo evidentemente $\mathtt{Tr}(\varrho\mathbf{1})$; dalla definizione, questo è il valor medio dell'operatore $\mathbf{1}$ sulla miscela statistica S, ossia

   $$\langle\mathbf{1}\rangle_S \ = \ \sum_i p_i \ \langle\phi_i|\phi_i\rangle \ ;$$

   dato che per ipotesi $\langle\phi_i|\phi_i\rangle = 1$, questo si riduce alla somma delle p_i, che rappresentano le frequenze dei diversi stati ϕ_i nella miscela. Ovviamente la somma delle frequenze deve essere pari all'unità, e quindi effettivamente $\mathtt{Tr}(\varrho) = 1$.[14]

2. Per un qualsiasi stato $\varphi \in H$,

   $$\varrho|\varphi\rangle \ = \ \sum_i p_i \ \langle\phi_i|\varphi\rangle \ |\phi_i\rangle \ ,$$

   e quindi

   $$\langle\varphi|\varrho|\varphi\rangle \ = \ \sum_i p_i \ \langle\phi_i|\varphi\rangle \ \langle\varphi|\phi_i\rangle \ = \ \sum_i p_i \ |\langle\varphi|\phi_i\rangle|^2 \ .$$

   Ricordando che $p_i \geq 0$, segue che questa somma è non negativa.

3. Gli autovalori σ_k ed autovettori η_k di ϱ soddisfano

   $$\varrho\,|\eta_k\rangle \ = \ \sum_i p_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\eta_k\rangle \ = \ \sigma_k\,|\eta_k\rangle \ .$$

[14] Alternativamente, per quanto mostrato in precedenza $\mathtt{Tr}(\varrho)$ è il valor medio dell'operatore $\mathbf{1}$ sulla miscela statistica S; ma naturalmente il valore di $\mathbf{1}$ su qualsiasi stato (e quindi il suo valor medio su qualsiasi S) è sempre uguale ad 1.

Il valor medio di ϱ su un autostato (normalizzato, per comodità di scrittura) è

$$\langle \eta_k | \varrho | \eta_k \rangle \;=\; \sigma_k \, \langle \eta_k | \eta_k \rangle \;=\; \sigma_k \, |\eta_k|^2 \;=\; \sigma_k \; .$$

Come abbiamo visto in precedenza $\langle \varrho \rangle_\varphi \geq 0$ per ogni $\varphi \in H$. Specializzando questo risultato agli autostati, $\varphi = \eta_k$, otteniamo

$$\langle \eta_k | \varrho | \eta_k \rangle \;=\; \sigma_k \;\geq\; 0 \; .$$

4. Come abbiamo visto, la traccia di un operatore è la somma dei suoi autovalori. E' chiaro che se σ_i sono gli autovalori di ϱ, allora gli autovalori di ϱ^2 sono $\mu_i = \sigma_i^2$; ne segue che

$$\mathtt{Tr}(\varrho^2) \;=\; \sum_i \mu_i \;=\; \sum_i \sigma_i^2 \; .$$

Abbiamo visto in precedenza che $\sigma_i \geq 0$, e che

$$\mathtt{Tr}(\varrho) \;=\; \sum_i \sigma_i \;=\; 1 \; ;$$

ne segue che

$$0 \;\leq\; \sigma_i \;\leq\; 1 \; ,$$

e questo implica anche che $\sigma_i^2 \leq \sigma_i$, dove il segno di uguaglianza si ha solo se $\sigma_i = 0$ o $\sigma_i = 1$. Quindi,

$$\mathtt{Tr}(\varrho^2) \;=\; \sum_i \sigma_i^2 \;\leq\; \sum_i \sigma_i \;=\; \mathtt{Tr}(\varrho) \;=\; 1 \; .$$

5. Nella relazione precedente si ha il segno di uguaglianza se e solo se tutti i σ_i assumono valore 0 od 1. Dato che la somma dei σ_i vale 1, questo è possibile solo se tutti i σ_i sono zero tranne un solo σ_i pari all'unità. D'altra parte è chiaro che tutti gli stati ϕ_k che entrano nella miscela statistica sono autovettori di ϱ; quindi la richiesta di avere un solo autovettore con autovalore non nullo corrisponde a quella di avere un solo stato presente nella miscela, che a questo punto si riduce ad uno stato puro.

10 Postulato di quantizzazione

Abbiamo finora parlato di sistemi quantistici generali (ed in modo abbastanza astratto). Per la *meccanica* quantistica, vogliamo quantizzare dei sistemi meccanici classici[15].

In altre parole, dovremmo considerare sistemi in cui le osservabili classiche p e q sono sostituite da operatori, e la Hamiltoniana $H(p,q)$ è ora espressa da

[15] Sebbene a rigore la Natura sia quantistica, quindi al più potremmo procedere nell'altra direzione e discutere il limite classico di sistemi quantistici.

un operatore $\widehat{H}$ che ha le caratteristiche richieste per essere una osservabile e che si esprime in termini degli operatori (hermitiani) corrispondenti a p e q, che indicheremo con $\widehat{p}$ e $\widehat{q}$.

Notiamo intanto che non sempre scrivere $\widehat{H}$ è banale. In alcuni casi non c'è problema ad esprimere semplicemente $\widehat{H}$ come la stessa funzione formale di $\widehat{p}$ e $\widehat{q}$ come H di p e q; ad esempio per l'oscillatore armonico, con $H = (p^2 + q^2)/2$ possiamo scrivere $\widehat{H} = (1/2)(\widehat{p}^2 + \widehat{q}^2)$.

Ma in altri casi la richiesta di avere un operatore hermitiano, $\widehat{H}^+ = \widehat{H}$, pone dei problemi. Ad esempio se $H = pq$ l'operatore $\widehat{H}$ non puo' essere espresso semplicemente come $\widehat{H} = \widehat{pq}$. Infatti, così facendo, avremmo

$$\widehat{H}^+ \;=\; \widehat{q}^+\,\widehat{p}^+ \;=\; \widehat{q}\,\widehat{p} \;\neq\; \widehat{p}\,\widehat{q} \;=\; \widehat{H}\ .$$

Questo tipo di problemi è però facilmente risolto ricordando che classicamente $pq = qp = (1/2)(pq + qp)$; possiamo quindi cercare la combinazione lineare dei vari modi di scrivere un prodotto ordinato che risulti essere hermitiana. Nel caso semplice considerato poco sopra, è sufficente scegliere

$$\widehat{H} \;=\; \frac{1}{2}\ (\widehat{p}\,\widehat{q} \;+\; \widehat{q}\,\widehat{p})$$

per ottenere $\widehat{H}^+ = \widehat{H}$.

Resta il problema di definire gli operatori $\widehat{p}$ e $\widehat{q}$, ossia di scegliere una *rappresentazione*. Questi operatori non sono completamente arbitrari, ma devono soddisfare delle relazioni che permettano di ottenere il caso classico nel limite opportuno. Sottolineamo che questa è una condizione indipendente dalla specifica rappresntazione che verrà scelta, ed anzi qualifica una determinata scelta degli operatori $\widehat{p}$ e $\widehat{q}$ come accettabile o meno.

Postulato di quantizzazione. *I commutatori tra gli operatori che rapprentano le osservabili corrispondenti alle variabili canoniche devono essere proporzionali alle parentesi di Poisson tra le variabili canoniche stesse.*

Ricordiamo che

$$\{q_i, q_j\} \;=\; 0\ ,\ \ \{p_i, p_j\} \;=\; 0\ ;\ \ \{q_i, p_j\} \;=\; \delta_{ij}\ .$$

Quindi il postulato di quantizzazione richiede di avere

$$[\widehat{q}_i, \widehat{q}_j] \;=\; 0\ ,\ \ [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] \;=\; 0\ ;\ \ [\widehat{q}_i, \widehat{p}_j] \;=\; \gamma\ \delta_{ij}\ .$$

La costante di proporzionalità γ deve in effetti essere immaginaria pura. Infatti $\widehat{p}$ e $\widehat{q}$ sono[16] osservabili, quindi in particolare soddisfano

$$\widehat{p}_i^+ \;=\; \widehat{p}_i\ ,\ \ \widehat{q}_i^+ \;=\; \widehat{q}_i\ ;$$

[16]Devono essere, perchè possa aver senso parlare di "meccanica" quantistica!

allora

$$([\widehat{q}_i,\widehat{p}_i])^+ \;=\; (\widehat{q}_i\widehat{p}_i - \widehat{p}_i\widehat{q}_i)^+ \;=\; \widehat{p}_i\widehat{q}_i - \widehat{q}_i\widehat{p}_i \;=\; -\,[\widehat{q}_i,\widehat{p}_i] \ .$$

Quindi se vogliamo che il commutatore sia hermitiano, dobbiamo avere una costante γ immaginaria pura; inoltre questa costante ha le dimensioni fisiche di $[p][q]$, cioè quelle di una *azione*. Scriviamo allora

$$\gamma \;=\; i\,\hbar \ .$$

La costante $\hbar := h/2\pi$ (con h la costante di Planck) che appare in essa è la stessa che appare nelle relazioni di indeterminazione di Heisenberg[17]

$$\Delta p_i \; \Delta q_i \;\geq\; \frac{1}{2}\,\hbar \ .$$

11 Il momento angolare

Un esempio rilevante di operatori quantistici che corrispondono ad osservabili classiche "non elementari" (cioè che non si riducono alle variabili canoniche p,q) è fornito dal *momento angolare*. Come ben noto, si tratta di un vettore $\mathbf{L}$ le cui componenti, nel sistema di coordinate cartesiano standard $(x,y,z)=(q_1,q_2,q_3)$, sono date da

$$L_i \;=\; \epsilon_{ijk}\,q_j\,p_k \ .$$

I corrispondenti operatori quantistici sono dunque

$$\widehat{L}_i \;=\; \epsilon_{ijk}\,\widehat{q}_j\,\widehat{p}_k \ .$$

Notiamo innanzi tutto che si tratta di operatori hermitiani. Infatti,

$$\widehat{L}_i^+ \;=\; \epsilon_{ijk}\widehat{p}_k^+\widehat{q}_j^+ \;=\; \epsilon_{ijk}\widehat{p}_k\widehat{q}_j \;=\; \epsilon_{ijk}\widehat{q}_j\widehat{p}_k \;=\; L_i \ ;$$

abbiamo qui usato il fatto che $\widehat{p}$ e $\widehat{q}$ sono hermitiani, e la commutazione degli operatori corrispondenti a variabili canoniche non coniugate.

Vediamo ora le relazioni di commutazione tra le diverse componenti del momento angolare; d'ora in poi per comodità di scrittura omettiamo il segno che distingue tra osservabili classiche ed operatori quantistici corrispondenti (cioè scriviamo p_i anzichè $\widehat{p}_i$ e q^i per $\widehat{q}^i$), ed intendiamo come al solito la somma su indici ripetuti:

$$\begin{aligned}
[L_\mu, L_\nu] \;&=\; [\epsilon_{\mu ij}q_ip_j, \epsilon_{\nu km}q_kp_m] \\
&=\; \epsilon_{\mu ij}\,\epsilon_{\nu km}\ \ [q_ip_j, q_kp_m] \\
&=\; \epsilon_{\mu ij}\,\epsilon_{\nu km}\ \ (q_i[p_j,q_k]p_m + q_iq_k[p_j,p_m] + q_k[q_i,p_m]p_j + [q_i,q_k]p_mp_j) \\
&=\; \epsilon_{\mu ij}\,\epsilon_{\nu km}\ \ (q_i[p_j,q_k]p_m + q_k[q_i,p_m]p_j) \\
&=\; \epsilon_{\mu ij}\,\epsilon_{\nu km}\ i\,\hbar\ \ (-q_i\delta_{jk}p_m + q_k\delta_{im}p_j) \\
&=\; i\hbar\ \ (-\,\epsilon_{\mu ik}\,\epsilon_{\nu km}\ q_ip_m \ +\ \epsilon_{\mu ij}\,\epsilon_{\nu ki}\ q_kp_j)
\end{aligned}$$

[17] Per la cui discussione fisica rimandiamo al testo di Picasso.

$$
\begin{aligned}
&= i\hbar \left(-\,\epsilon_{\mu ik}\,\epsilon_{\nu kj}\; q_i p_j \;+\; \epsilon_{\mu kj}\,\epsilon_{\nu ik}\; q_i p_j\right) \\
&= i\hbar \left(-\,\epsilon_{\mu ik}\,\epsilon_{\nu kj} \;+\; \epsilon_{\mu kj}\,\epsilon_{\nu ik}\right)\; q_i\, p_j \\
&= i\hbar \left(-\,\epsilon_{\mu ik}\,\epsilon_{j\nu k} \;+\; \epsilon_{j\mu k}\,\epsilon_{\nu ik}\right)\; q_i\, p_j \\
&= i\hbar \left(-\left(\delta_{\mu j}\delta_{i\nu} - \delta_{\mu\nu}\delta_{ij}\right) \;+\; \left(\delta_{j\nu}\delta_{\mu i} - \delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\right)\; q_i\, p_j\right. \\
&= i\hbar \left(-\,q_\nu p_\mu \;+\; \delta_{\mu\nu} q_i p_i \;+\; q_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} q_i p_i\right) \\
&= i\hbar \left(-\,q_\nu p_\mu \;+\; q_\mu p_\nu\right) \;=\; i\hbar\; \epsilon_{\mu\nu\sigma}\, L_\sigma \ .
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi mostrato che

$$
[L_\mu \, , \, L_\nu] \;=\; i\,\hbar\; \epsilon_{\mu\nu\sigma}\; L_\sigma \ . \tag{9}
$$

Si sarebbe potuti giungere alla stessa conclusione (tutto sommato, più velocemente) calcolando esplicitamente $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ ed usando le proprietà di simmetria di L (e dei commutatori) sotto permutazioni cicliche. Infatti,

$$
\begin{aligned}
[L_x, L_y] \;&=\; \left[(q_y p_z - q_z p_y)\, , \, (q_z p_x - q_x p_z)\right] \\
&=\; [q_y p_z, q_z p_x] \;-\; [q_y p_z, q_x p_z] \;-\; [q_z p_y, q_z p_x] \;+\; [q_z p_y, q_x p_z] \\
&=\; [q_y p_z, q_z p_x] \;+\; [q_z p_y, q_x p_z] \\
&=\; q_y\, [p_z, q_z]\, p_x \;+\; q_x\, [q_z, p_z]\, p_y \\
&=\; i\hbar\, (q_x p_y \;-\; q_y p_z) \;=\; i\hbar\; L_z \ .
\end{aligned}
$$

Lo studente è invitato a convincersi che nessun passaggio è stato omesso in questo calcolo (in altre parole, a verificare che il calcolo è non solo corretto ma evidente), e che le proprietà cicliche permettono di dedurre da questo calcolo le proprietà di commutazione tra le diverse componenti del momento angolare.

Notiamo che definendo gli operatori (anti-hermitiani)

$$
M_\mu \;:=\; -\,(i/\hbar)\; L_\mu \ ,
$$

questi soddisfano le relazioni di commutazione

$$
[M_\mu, M_\nu] \;=\; \epsilon_{\mu\nu\sigma}\; M_\sigma \ , \tag{10}
$$

come segue da un semplice calcolo:

$$
[M_\mu, M_\nu] \;=\; -\frac{1}{\hbar^2}\; [L_\mu, L_\nu] \;=\; -\frac{1}{\hbar^2}\; \frac{i}{\hbar}\; \epsilon_{\mu\nu\sigma}\, L_\sigma \;=\; -\frac{i}{\hbar}\, \epsilon_{\mu\nu\sigma}\, L_\sigma \;=\; \epsilon_{\mu\nu\sigma}\; M_\sigma \ .
$$

Lo studente è invitato a cercare di ricordare se in corsi precedenti non ha già incontrato degli oggetti che soddisfano le stesse proprietà di commutazione degli operatori L_i o degli operatori M_i.

12 Relazioni di indeterminazione

Come abbiamo visto in precedenza, date due osservabili A e B su uno spazio di Hilbert H, se queste sono *compatibili*, cioè se

$$
[A, B] \;=\; 0 \ ,
$$

esse ammettono un sistema copleto di autostati, e quindi è possibile la misura contemporanea di A e B.

Questa affermazione può essere formulata in modo leggermente diverso. Ricordiamo che daa una osservabile A ed uno stato ϕ, possiamo definire la *dispersione* (delle misure) di A su ϕ come

$$\left[\sigma^2(A)\right]_\phi \ = \ (\Delta A)_\phi^2 \ = \ \langle A^2\rangle_\phi \ - \ \langle A\rangle_\phi^2 \ .$$

Allora è chiaro che se A e B sono compatibili,e sistono degli stati ϕ (quelli della base comune di autostati per A e B) su cui si ha

$$(\Delta A)_\phi \ = \ 0 \ = \ (\Delta B)_\phi \ ;$$

del resto questa relazione dice proprio che ϕ è autostato sia di A che di B.

Sottolineamo che se prendiamo uno stato generico $\eta \in H$, questa relazione non sarà soddisfatta; quindi se consideriamo tutto H possiamo solo affermare che[18]

$$(\Delta A)\ (DeltaB) \ \geq \ 0 \ , \ \ (\Delta A)^2 \ + \ (\Delta B)^2 \ \geq \ 0 \ .$$

La nostra discussione precedente mostra che *se* $[A,B] \ = \ 0$ allora la disuguaglianza è saturata, cioè esistono stati per cui effettivamente

$$(\Delta A)^2 \ + \ (\Delta B)^2 \ = \ 0 \ .$$

Vogliamo ora discutere cosa succede per A e B *non* compatibili[19], cioè se abbiamo

$$[A,B] \ = \ C \ \neq \ 0 \ . \tag{11}$$

12.1 Caso generale

Consideriamo ora due osservabili che soddisfano la relazione (**??**). Vale il seguente risultato

$$(\Delta A)\ (\Delta B) \ \geq \ \frac{1}{2}\ |\langle [A,B]\rangle| \ . \tag{12}$$

Per dimostrarlo, introduciamo gli operatori

$$\alpha \ := \ A \ + \ i\,x\,B \ , \ \ \alpha^+ \ := \ A \ - \ i\,x\,B \ ,$$

con $x \in R$ un parametro reale. Otteniamo immediatamente che

$$\alpha^+\,\alpha \ = \ (A - ixB)\ (A + ixB) \ = \ A^2 \ + \ x^2\,B^2 \ + \ i\,x\ [A,B] \ .$$

[18]Quando, come in questa formula, non è indicato su quale stato sono calcolate le medie o le dispersioni, si intende che l'affermazione vale su uno stato generico di H.

[19]La nostra discussione segue da vicino quella proposta da Picasso, ed è inserita qui solo per completezza.

Notiamo che l'operatore $i[A, B]$ è hermitiano (come del resto deve, dato che $\alpha^+\alpha$ lo è sicuramente). Infatti, usando il fatto che A e B sono osservabili e quindi hermitiani,

$$\begin{aligned} (i\ [A, B])^+ &= (iAB - iBA)^+ \ = \ -iB^+A^+ + iA^+B^+ \\ &= iAB - iBA \ = \ i\ [A, B]\ . \end{aligned}$$

Questo assicura che il valor medio di $i[A, B]$ su qualsiasi stato è reale.

Ora, sia $\phi\ inH$ un qualunque stato normalizzato, $\langle\phi|\phi\rangle = 1$, e consideriamo gli stati

$$\eta = \alpha|\phi\rangle\ ,\quad \xi = \langle\phi|\alpha|\phi\rangle\ |\phi\rangle\ .$$

Usando la disuguaglianza di Schwartz su questi, otteniamo che

$$\langle\phi|\alpha^+\alpha|\phi\rangle\ \geq\ \langle\phi|\alpha^+|\phi\rangle\ \langle\phi|\alpha|\phi\rangle\ . \tag{13}$$

Ora il membro di sinistra di questa relazione si scrive usando l'espressione determinata in precedenza per $\alpha^+\alpha$ come

$$\langle\phi|\alpha^+\alpha|\phi\rangle\ =\ \langle\phi|(A^2 + x^2B^2 + ix[A, B])|\phi >\ =\ \langle A^2\rangle + x^2\langle B^2\rangle + x\langle i[A, B]\rangle\ .$$

D'altra parte, il membro di destra della (13) si scrive, ricordando la definizione di α ed α^+, come

$$(\langle\phi|(A - ixB)|\phi\rangle)\ (\langle\phi|(A + ixB)|\phi\rangle)\ =\ (\langle A\rangle - ix\langle B\rangle)\ (\langle A\rangle + ix\langle B\rangle)\ =\ \langle A\rangle^2 + x^2\ \langle B\rangle^2\ .$$

Usando queste due espressioni, la (13) si riscrive come

$$\langle\phi|\alpha^+\alpha|\phi\rangle\ =\ \langle\phi|(A^2+x^2B^2+ix[A, B])|\phi >=\ \langle A^2\rangle+x^2\langle B^2\rangle+x\langle i[A, B]\rangle\ \geq\ \langle A\rangle^2 + x^2\ \langle B\rangle^2\ ,$$

e quindi otteniamo che

$$P(x)\ :=\ \left(\langle A^2\rangle\ -\ \langle A\rangle^2\right)\ +\ x^2\ \left(\langle B^2\rangle\ -\ \langle B\rangle^2\right)\ +\ x\ \langle i[A, B]\rangle\ \geq\ 0\ .$$

Questa disuguaglianza deve valere per qualsiasi valore del parametro reale x; ma $y = P(x)$ descrive una parabola nel piano (x, y) e quindi, per $P(x) \geq 0$, questa non deve mai intersecare l'asse delle x. La condizione perché sia così è che il discriminante sia negativo, ossia deve essere

$$\langle i[A, B]\rangle^2\ -\ 4\ (\Delta A)^2\ (\Delta B)^2\ \leq\ 0\ ,$$

che naturalmente si riscrive come

$$(\Delta A)^2\ (\Delta B)^2\ \geq\ \frac{1}{4}\ \langle i[A, B]\rangle^2$$

ed infine, prendendo le radici quadrate di ambo i membri,

$$(\Delta A)\ (\Delta B)\ \geq\ \frac{1}{2}\ |\langle i[A, B]\rangle|\ .$$

Abbiamo così dimostrato la validità della (12).

Gli stati per cui la disuguaglianza (12) è saturata (cioè vale il segno di uguaglianza) sono detti *stati di minima dispersione* per le osservabili (A, B).

12.2 Variabili canoniche

Un caso particolare di questo risultato si ha quando le osservabili considerate sono proprio (gli operatori che rappresentano) le variabili canoniche p_i, q^i.

In questo caso il postulato di quantizzazione richiede di avere

$$\left[q^i, p_i\right] \ = \ i\,\hbar \ ;$$

applicando direttamente la (12) otteniamo quindi

$$(\Delta p_i)\ (\Delta q^i) \ \geq \ \frac{1}{2}\ |\langle i(i\hbar)\rangle| \ = \ \frac{\hbar}{2}\ .$$

Questa è la *relazione di indeterminazione di Heisenberg*, che vediamo quindi essere un caso particolare della relazione di indeterminazione generale (12).

In questo caso, cioè quando le osservabili considerate sono una coppia di (osservabili che rappresentano) variabili canonicamente coniugate, gli stati di minima dispersione sono anche detti *stati coerenti*.

Bibliografia

Tra gli innumerevoli ottimi testi dedicati alla formulazione della Meccanica Quantistica, ne segnalo solo due (uno breve ed uno più completo e complesso), i primi due della lista seguente. Gli altri due testi (anch'essi uno semplice ed uno più complesso) contengono l'apparato matematico – in particolare, spazi di Hilbert ed operatori su questi – necessario.

L'ultimo testo è infine di natura assai diversa: si tratta di un libro al confine tra un libro di testo ed un libro di divulgazione, che riporta un corso tenuto da Susskind. Di questo testo esiste anche una traduzione italiana (edita da Cortina), ma sopratutto il corso a cui fa riferimento – tenuto a Stanford – è disponibile in rete (come documenti video), sia attraverso il server di Stanford[20] che direttamente su Youtube.

- L.E. Picasso, *Lezioni sui Fondamenti della Meccanica Quantistica*; ETS 2017
- L.D. Landau and I.M. Lifsits, *Meccanica Quantistica*, Editori Riuniti
- G. Cicogna, *Metodi Matematici della Fisica*, Springer Italia 2015
- A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Edizioni MIR 1980
- L. Susskind, *Quantum Mechanics: The Theoretical Minimum*, Penguin 2015

`G. Gaeta, 28/5/2019`

[20] `https://theoreticalminimum.com/courses/quantum-mechanics/2012/winter`