Le distribuzioni

Corso di Fisica Matematica 3, a.a. 2018/19
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

27/5/2019

Nella discussione della rappresentazione degli operatori che rappresentano le variabili canoniche nello spazio $L^2(R)$ abbiamo visto (o piuttosto si è visto studiando il Picasso) come questi non sono definiti su tutto lo spazio, ma solo nel sottoinsieme denso delle funzioni (di Schwartz) rapidamente decrescenti. Questo è intimamente connesso alle *distribuzioni*[1], e di queste avremo bisogno per studiare gli *stati di scattering* – quindi problemi quantistici in cui il potenziale non cresce all'infinito. La presente dispensa[2] tratta appunto di una breve introduzione agli aspetti salienti della teoria delle distribuzioni; nella Bibliografia rimanderemo a testi che forniscono una trattazione più esauriente.

Ci limiteremo a considerare l'ambito di funzioni (e funzioni generalizzate) di una sola variabile reale.

1 Funzioni rapidamente decrescenti e distribuzioni temperate

Considereremo lo spazio[3] $\mathcal{S}$ delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ di classe C^∞ e *rapidamente decrescenti* con tutte le loro derivate; con ciò si intende che

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left(\left| x^k \ \frac{d^h f}{dx^h} \right| \right) \ < \ \infty \quad \forall k, h \in \mathbf{N} \ . \tag{1}$$

Le funzioni $f \in \mathcal{S}$ sono anche note come *funzioni test* o *funzioni di prova*, ed a volte lo spazio $\mathcal{S}$ è detto *spazio di prova*; la ragione di questa nomenclatura sarà chiara tra poche righe.

[1] La delta di Dirac, che lo studente ha molto probabilmente incontrato in corsi precedenti, è un esempio di *funzione generalizzata*, ovvero di *distribuzione* (i due termini sono da considerare equivalenti).

[2] Preparata in realtà per il corso di Fisica Matematica 2, e che quindi non farà riferimento alla Meccanica Quantistica.

[3] Il nome dello spazio si riferisce al creatore della teoria delle distribuzioni; per i francesi si tratta di Laurent Schwartz nel 1944, mentre per i russi di Sergei Sobolev (si tratta dello stesso Sobolev degli spazi di Sobolev) nel 1935; fortunatamente le iniziali di questi due autori coincidono, cosicché la notazione risulta uniforme in letteratura.

Consideriamo una successione di funzioni $f_n(x) \in \mathcal{S}$; diremo che la successione converge ad $f_*(x)$ se la successione delle funzioni

$$\varphi_n(x) \ := \ f_*(x) \ - \ f_n(x)$$

è tale che, per qualsiasi interi h e k fissati, la successione

$$|A_n(x)| \ = \ \left| x^k \ \frac{d^h \varphi_n}{dx^h} \right| \tag{2}$$

converge *uniformemente* a zero per $n \to \infty$. Lo spazio $\mathcal{S}$ risulta completo rispetto a questa nozione di convergenza (ossia rispetto alla topologia che questa definisce), cioè se la successione f_n di elementi di $\mathcal{S}$ converge ad un limite f_*, necessariamente $f_* \in \mathcal{S}$.

Consideriamo ora i funzionali lineari e continui su $\mathcal{S}$, ossia le applicazioni

$$\Lambda \ : \ \mathcal{S} \to \mathbf{C} \tag{3}$$

lineari rispetto alla struttura di spazio lineare di $\mathcal{S}$, e continue rispetto alla topologia introdotta poco sopra. Quest'ultima condizione, in particolare, significa che se $f_n \to f_*$, allora si avrà

$$\Lambda(f_n) \ \to \ \Lambda(f_*) \ .$$

Lo spazio (lineare) di questi funzionali costituisce lo spazio duale di $\mathcal{S}$, e si indica quindi come $\mathcal{S}^*$. Lo spazio $\mathcal{S}^*$ è anche detto spazio delle *distribuzioni temperate* su $\mathcal{S}$. Qui indicheremo $\mathcal{S}^*$ come spazio delle distribuzioni, ed i suoi elementi come distribuzioni, omettendo l'aggettivo "temperate" per facilità di scrittura.

Osservazione 1. Mentre in uno spazio di Hilbert L abbiamo sempre $L^* \simeq L$, lo spazio delle distribuzioni $\mathcal{S}^*$ differisce sostanzialmente dallo spazio delle funzioni di prova $\mathcal{S}$. ⊙

Esempio 1. Consideriamo lo spazio delle funzioni $u : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ che siano limitate, dunque tali che

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x)| \ < \ \infty \ ,$$

e localmente sommabili, cioè tali che per ogni insieme compatto (dunque intervallo limitato) $[a, b]$ di $\mathbf{R}$ sia

$$u \ \in \ L^1[a, b] \ .$$

Consideriamo allora il funzionale definito da

$$\Lambda_{[u]}(f) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \ f(x) \ dx \ . \tag{4}$$

Per ogni $f \in \mathcal{S}$, si ha che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \ f(x) \ dx$$

è limitato; inoltre è facile vedere che si tratta di un funzionale lineare su $\mathcal{S}$. Per di più, sia $f_n \to f_*$ una successione convergente in $\mathcal{S}$; abbiamo in generale

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \ [f_n(x) - f_*(x)] \ dx \right| \ \le \ \left(\sup_{x \in \mathbf{R}} |u(x)| \right) \ \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f_*(x)| \ dx \ ;$$

d'altra parte se $f_n \to f_*$ (e ricordando che ambedue le funzioni sono a decrescenza rapida), sicuramente $(f_n - f_*)$ è sommabile (ossia in $L^1[\mathbf{R}]$); segue da questa che se $f_n \to f_*$, allora

$$\Lambda_{[u]}(f_n) \ \to \ \Lambda_{[u]}(f_*) \ .$$

In altre parole, per ogni u limitata e localmente sommabile, l'operatore $\Lambda_{[u]}$ definisce un funzionale $\Lambda_{[u]} : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ che appartiene ad $\mathcal{S}^*$; ossia una distribuzione. $\triangle$

Esempio 2. Procedendo sostanzialmente allo stesso modo, e definendo l'operatore $\Lambda_{[u]}$ sempre attrraverso la (4), si vede che la conclusione vale anche nel caso di funzioni $u(x)$ che siano in $L^1[\mathbf{R}]$, ed anche in $L^2[\mathbf{R}]$; in quest'ultimo caso $\Lambda_{[u]}(f) = (u, f)$ nel senso del prodotto scalare in L^2. $\triangle$

Esempio 3. Grazie alla proprietà di decrescenza rapida delle $f \in \mathcal{S}$, risulta inoltre che (come è facile controllare, essenzialmente integrando per parti) l'operatore $\Lambda_{[u]}$ appartiene ad $\mathcal{S}^*$ anche nel caso $u(x)$ sia un polinomio. Si ha anzi che se Λ è una qualsiasi distribuzione su $\mathcal{S}$ e $P(x)$ un polinomio, allora anche $\widehat{\Lambda} = P(x)\Lambda$, intesa come il funzionale definito da

$$\widehat{\Lambda}[f(x)] \ = \ \Lambda[P(x)\, f(x)] \ , \tag{5}$$

è una distribuzione su $\mathcal{S}$. $\triangle$

Esempio 4. Un esempio che si discosta da quelli precedenti, ossia di un funzionale $T \in \mathcal{S}^*$ che non è associato (tramite la (4)) a nessuna funzione $u : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, è proprio quello da cui siamo partiti, ossia la *delta di Dirac*. Ricordiamo che questa è definita da

$$\int_a^b \delta(x - x_0) f(x) \ dx \ = \ f(x_0) \quad \forall a < x_0, \ \forall b > x_0 \ . \tag{6}$$

Che questa non sia associata a nessuna funzione ordinaria è evidente; è anche evidente che la (6) definisce un funzionale lineare (per le proprietà di linearità dell'integrale) e continuo (qui la continuità si riduce alla continuità in x_0, sicuramente implicata dalla convergenza in $\mathcal{S}$). Le distribuzioni che non sono associate a nessuna funzione ordinaria – nel senso della (4) – sono dette *distribuzioni singolari.* $\triangle$

2 Convergenza nello spazio delle distribuzioni temperate

Abbiamo osservato in precedenza che lo spazio $\mathcal{S}$ è completo pur di definire la topologia in modo appropriato. Vogliamo ora analizzare da questo punto di vista lo spazio $\mathcal{S}^*$ delle distribuzioni temperate su $\mathcal{S}$.

Data una successione $\Lambda_n \in \mathcal{S}^*$, diremo che Λ_n converge a Λ_* (e noteremo in breve $\Lambda_n \to T$) se

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(f) \ = \ \Lambda_*(f) \qquad \forall f \in \mathcal{S} \ . \tag{7}$$

Ricordiamo che $\Lambda_n(f) \in \mathbf{C}$, dunque nella formula precedente stiamo (per ogni $f \in \mathcal{S}$ fissato) considerando semplicemente la convergenza di una successione di numeri complessi e richiedendo che $|\Lambda_n(f) - \Lambda_*(f)| \to 0$.

La nozione di convergenza definita dalla (7) è detta *convergenza debole*, o *convergenza nel senso delle distribuzioni*.

Lo spazio $\mathcal{S}^*$ dotato della topologia definita da questa nozione risulta uno spazio completo: in altre parole, se la successione di elementi $\Lambda_n \in \mathcal{S}^*$ converge ad un operatore $\Lambda_* : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$, allora $\Lambda_* \in \mathcal{S}^*$.

Osservazione 2. Come il suo nome suggerisce, la convergenza debole è implicata da diverse altre nozioni di convergenza; in particolare questo è vero per distribuzioni associate a funzioni ordinarie nel senso della (4). $\odot$

Esempio 5. Consideriamo una successione di funzioni $u_n(x) \in L^2[\mathbf{R}]$ che converga ad $u_*(x)$ nel senso della norma L^2. Allora la successione delle distribuzioni $\Lambda_n = \Lambda_{[u_n]}$ associate a queste tramite la (4) è debolmente convergente. $\triangle$

Esempio 6. Consideriamo una successione di funzioni $u_n(x) \in L^1[\mathbf{R}]$ che converga uniformemente quasi ovunque ad $u_*(x)$ e per cui valga la condizione di convergenza dominata di Lebesgue[4], ossia esista una funzione sommabile $F(x)$ tale che $|f_n(x)| \leq |F(x)|$ per ogni n (e per ogni x). Allora la successione delle distribuzioni $\Lambda_n = \Lambda_{[u_n]}$ associate alle $u_n(x)$ tramite la (4) è debolmente convergente. $\triangle$

Esempio 7. Si giunge alla stessa conclusione se le $u_n(x)$ convergono uniformemente ad $u(x)$ e se le $u_n(x)$, ed il limite $u(x)$, sono funzioni localmente sommabili e limitate o almeno a crescita non più che polinomiale (sempre grazie al fatto che vanno integrate contro funzioni a decrescenza rapida), come segue dal fatto che

$$|\Lambda_n(f) - \Lambda_*(f)| \ = \ \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [u_n(x) - u_*(x)]\, f(x)\, dx \right| \ \leq \ \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| [u_n(x) - u_*(x)]\, f(x) \Big|\, dx \ ;$$

infatti sotto le ipotesi che abbiamo fatto, esiste una funzione $F(x) \in L^1[\mathbf{R}]$ tale che

$$\Big| [u_n(x) - u_*(x)]\, f(x) \Big| \ \leq \ |F(x)| \ .$$

$\triangle$

Esempio 8. Ancora una volta abbiamo iniziato considerando distribuzioni associate a funzioni ordinarie (ancorché non derivabili o discontinue); naturalmente queste non

[4] Ricordiamo brevemente di cosa si tratta. Se si ha una successione di funzioni sommabili $f_n \in L^1[\mathbf{R}]$ che converge quasi ovunque a $f_*(x)$, ed inoltre esiste una funzione $F(x) \in L^1[\mathbf{R}]$ tale che $|f_n(x)| \leq |F(x)|$ per ogni n (e per tutti gli $x \in \mathbf{R}$), allora $f_*(x) \in L^1[\mathbf{R}]$; inoltre, per qualsiasi intervallo $[a,b] \subset \mathbf{R}$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx \ = \ \int_a^b f_*(x)\ dx \ .$$

La stessa conclusione vale anche se invece di una successione abbiamo una famiglia ad un parametro di funzioni $f_z(x)$ che converge, per $z \to \infty$, ad $f_*(x)$.

esauriscono l'insieme delle distribuzioni. In effetti, anche una successione di funzioni $u_n(x)$ che *non* siano convergenti (né in senso L^1 né in senso L^2) puntualmente in tutti i punti possono individuare delle distribuzioni. Abbiamo già visto questa situazione nel considerare la definizione della δ come "limite" (in un senso che verrà ricordato tra poco) di funzioni ordinarie; infatti nella dispensa dedicata alla funzione delta abbiamo mostrato che, con la nozione di limite introdotta in essa,

$$\begin{aligned}
\delta(x) \ &= \ \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) \ = \ \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \ e^{-kx^2} \ ; \\
\delta(x) \ &= \ \lim_{m\to\infty} \psi_m(x) \ = \ \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \ \left[\frac{m}{1+m^2x^2} \right] \ ; \\
\delta(x) \ &= \ \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \ \left[\frac{\sin(nx)}{x} \right] \ .
\end{aligned}$$

In effetti, il "limite" introdotto in quella dispensa era stato definito nel senso che per ogni funzione ordinaria $f(x)$ si avesse

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx \ = \ \lim_{k\to\infty} \int_a^b \varphi_k(x) \ f(x) \ dx \ ,$$

ed analogamente per le ψ_m e σ_n. E' ora chiaro che si trattava di una definizione nel senso delle distribuzioni: le successioni

$$\Lambda_k \ := \ \Lambda_{[\varphi_k]} \ , \ \ \Lambda_m \ := \ \Lambda_{[\psi_m]} \ , \ \ \Lambda_n \ := \ \Lambda_{[\sigma_n]}$$

convergono tutte e tre alla $\delta(x)$ nel senso delle distribuzioni.

Più in generale è possibile mostrare (lo studente è invitato a controllarlo) che per ogni funzione $\beta(x) \in L^1[\mathbf{R}]$ per cui l'integrale $I[\beta]$ di β sulla retta soddisfa $I[\beta] \neq 0$, definendo la successione di funzioni $u_n(x) = (1/I[\beta])n\beta(nx)$, si ha che la successione delle distribuzioni associate alle u_n, cioè delle $\Lambda_n = \Lambda_{[u_n]}$, converge alla $\delta(x)$ nel senso delle distribuzioni. $\triangle$

3 Derivazione delle distribuzioni temperate

E' possibile definire una operazione di derivazione sulle distribuzioni; nuovamente per fare ciò ci si "appoggia" alle proprietà molto favorevoli delle funzioni di prova $f \in \mathcal{S}$, e si opera integrando per parti.

Definiamo quindi la derivata Λ' di una distribuzione $\Lambda \in \mathcal{S}^*$ come la distribuzione che, per ogni $f \in \mathcal{S}$, soddisfa

$$\Lambda'(f) \ = \ - \ \Lambda(f') \ . \tag{8}$$

Per una distribuzione associata ad una funzione ordinaria, $\Lambda = \Lambda_{[u]}$ abbiamo quindi (integrando per parti ed usando la decrescita rapida di f)

$$\begin{aligned}
\Lambda'_{[u]}[f] \ &= \ - \ \Lambda_{[u]}(f') \ = \ - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \ f'(x) \ \mathrm{d}x \\
&= \ - \ [u(x) \ f(x)]_{-\infty}^{+\infty} \ + \ \int_{-\infty}^{+\infty} u'(x) \ f(x) \ dx \\
&= \ \Lambda_{[u']}(f) \ .
\end{aligned}$$

In altre parole, abbiamo

$$\Lambda'_{[u]} \ = \ \Lambda_{[u']} \ .$$

Per distribuzioni singolari, la derivata della distribuzione è appunto definita dalla (8).

Notiamo che nella nostra definizione di $\mathcal{S}$ abbiamo richiesto che le funzioni $f \in \mathcal{S}$ fossero infinitamente derivabili; questo implica immediatamente, in vista della (8) che le distribuzioni temperate sono infinitamente derivabili. Ad esempio, per ogni k abbiamo

$$\delta^{(k)}(x - x_0) \ = \ \frac{d^k}{dx^k}\,\delta(x - x_0) \ = \ (-1)^k\,\delta(x - x_0)\ \frac{d^k}{dx^k} \ ;$$

ovvero, in altre parole, che per ogni $f \in \mathcal{S}$ ed ogni $a < x_0$, $b > x_0$ si ha

$$\int_a^b [\delta^{(k)}(x - x_0)] \ f(x) \ dx \ = \ (-1)^k \ f^{(k)}(x_0) \ .$$

4 La notazione di Dirac per le distribuzioni

Lo studente avrà notato che usiamo un doppio standard di notazione per l'azione di una distribuzione sulle funzioni di prova.

Infatti, per le distribuzioni regolari (associate ad una funzione u) scriviamo $\Lambda_{[u]}(f)$, mentre per la δ usiamo la notazione con l'integrale, in quanto scrivere cose del tipo $\delta(x)(f)$ si presterebbe facilmente a confusione.

Possiamo migliorare in parte la situazione introducendo la notazione

$$\delta_a \ := \delta(x - a) \ ;$$

allora noteremo la δ_a in quanto distribuzione anche come Λ_{δ_a}.

La notazione di Dirac risulta molto conveniente a questo proposito. Infatti, ricordando che $\mathcal{S}^*$ è lo spazio duale ad $\mathcal{S}$, scriveremo

$$\Lambda_{[u]}(f) \ = \ \langle \Lambda_{[u]} \ , \ f \rangle \ := \ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \ f(x) \ dx \ .$$

venendo alle distribuzioni singolari, possiamo usare la stessa notazione senza rischio di confusione; avremo ad esempio

$$\langle \delta(x - x_0) \ , \ f \rangle \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \ f(x) \ dx \ = \ f(x_0) \ .$$

5 Traformata di Fourier delle distribuzioni temperate

Nella dispensa dedicata alle trasformate di Fourier abbiamo notato esplicitamente che l'operatore T di trasformata[5] è lineare e continuo.

[5]Nel seguito ci occupiamo solo della trasformata, e non della antitrasformata, ma unicamente per non ripetere la discussione: infatti è chiaro che quanto si dirà riguardo alla

Inoltre segue dalle proprietà discusse in quella dispensa che per ogni $f \in \mathcal{S}$ si avrà necessariamente $T[f] \in \mathcal{S}$. Resta da dimostrare che T sia anche continuo rispetto alla topologia introdotta poc'anzi in $\mathcal{S}$.

Consideriamo ora le trasformate di Fourier per le distribuzioni $\sigma \in \mathcal{S}^*$. In questo caso definiamo la trasformata $T[\sigma]$ *ex-novo* tramite la richiesta che, $\forall f \in \mathcal{S}$, si abbia

$$\langle T[\sigma] \ , \ f \rangle \ = \ \langle \sigma \ , \ T[f] \rangle \ . \tag{9}$$

Osserviamo che per distribuzioni regolari, cioè associate a funzioni ordinarie tramite la (4), si ottiene in questo modo

$$T[\Lambda_{[u]}] \ = \ \Lambda_{T[u]} \ . \tag{10}$$

In questo senso, la (9) risulta la definizione naturale per la trasformata di una distribuzione.

La (10) si dimostra attraverso un semplice calcolo (in cui l'unica difficoltà è quella di non farsi confondere dalla notazione). Infatti, usando la definizione appena introdotta, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle T[\Lambda_{[u]}] \ , \ f \rangle \ &= \ \langle \Lambda_{[u]} \ , \ T[f] \rangle \ = \ \langle \Lambda_{[u]} \ , \ \widehat{f} \rangle \\ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \ \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \ e^{-ixy} \ dy \right] \ dx \\ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \ \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \ e^{ixy} \ dx \right] \ dy \\ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(y) \ f(y) \ dy \ = \ \langle \Lambda_{[T[u]} \ , \ f \rangle \ . \end{aligned}$$

Vediamo ora cosa succede nel caso di distribuzioni singolari, e più in particolare per la δ. Procedendo secondo la nostra definizione (9), abbiamo

$$\begin{aligned} \langle T[\delta_0] \ , \ f \rangle \ &= \ \langle \delta_0 \ , \ T[f] \rangle \\ &= \ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \ \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \ e^{-ixy} \ dy \right] \ dx \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \ \left[\delta(x) \ e^{-ixy} \, dx \right] \ dy \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \ dy \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ f(x) \ dx \\ &= \ \langle \Lambda_{[1/\sqrt{2\pi}]} \ , \ f \rangle \ . \end{aligned}$$

Dunque, otteniamo nuovamente il risultato già visto nella dispensa sulle trasformate di Fourier. Più precisamente, abbiamo mostrato che la trasformata di

trasformata si applica altrettanto bene alla antitrasformata; del resto gli operatori T ed A si scambiano uno con l'altro sotto l'inversione spaziale $x \to -x$.

Fourier della δ (intesa come distribuzione) è la distribuzione regolare associata – sempre tramite la (4) – alla funzione $u(x) = 1/\sqrt{2\pi}$.[6]

Dalla nostra definizione discende anche che per $\Lambda \in \mathcal{S}^*$,

$$T[D_x^k(\Lambda)] \ = \ (i\omega)^k \ T[\Lambda] \ , \tag{11}$$

$$T[(-i\omega)^k \ \Lambda] \ = \ D_x^k \, (T[\Lambda]) \ ; \tag{12}$$

in queste formule abbiamo usato la notazione introdotta nella (5), ed indicato con ω la variabile coniugata ad x (in altre parole, se f è una funzione di x, allora $T[f] = \widehat{f}$ è una funzione di ω). La dimostrazione di queste formule è lasciata allo studente come utile esercizio.

Segue anche da questa definizione che T è un operatore continuo in $\mathcal{S}^*$; vale a dire che se la successione Λ_n converge (nel senso delle distribuzioni) a Λ_*, allora anche la successione delle $T[\Lambda_n]$ converge a $T[\Lambda_*]$. Questa proprietà è non solo interessante in sé, ma fornisce anche uno strumento di calcolo concreto per $T[\Lambda]$ quando Λ è una distribuzione singolare. Ad esempio, possiamo in questo modo calcolare ancora una volta[7] $T[\delta_0]$ ricordando che δ_0 è il limite (nel senso delle distribuzioni) della successione delle distribuzioni Λ_n associate alle funzioni ordinarie

$$f_n(x) \ = \ \frac{\sin(nx)}{\pi x} \ .$$

Viceversa, la definizione può anche essere utile per calcolare dei limiti in $\mathcal{S}^*$. Infatti, noi conosciamo già $T[\delta_0]$; dunque il fatto che $T[\Lambda_n] \to T[\delta_0]$ mostra che in effetti $\Lambda_n \to \delta_0$ nel senso delle distribuzioni.

6 Altre distribuzioni (di Schwartz)

All'inizio di questa dispensa abbiamo definito $\mathcal{S}$ come lo spazio delle funzioni $f : R \to C$ che sono infinitamente derivabili ed inoltre rapidamente decrescenti insieme a tutte le loro derivate.

Possiamo considerare altri due spazi di funzioni (che saranno denotati $\mathcal{E}$ e $\mathcal{K}$) definiti in modo simile ma con caratteristiche diverse. Introduciamo inoltre delle opportune nozioni di convergenza in ognuno di questi spazi.

(a) Indicheremo con $\mathcal{E} \equiv \mathcal{C}^\infty$ lo spazio delle funzioni infinitamente derivabili; naturalmente $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.

Diremo che una successione f_n di funzioni appartenenti ad $\mathcal{E}$ converge (sottinteso, "in $\mathcal{E}$") alla funzione f_* se la successione di funzioni

$$\varphi_n \ = \ (f_n - f_*)$$

[6] Beninteso, questo con la convenzione che abbiamo scelto riguardo al fattore costamte che appare nella trasformata di Fourier; una convenzione diversa avrebbe prodotto una diversa costante, ma in ogni caso la trafsormata della δ è sempre una costante.

[7] Lo studente può essere seccato dal fatto che si consideri ancora la δ; però noi non conosciamo al momento – né incontreremo nel resto del corso – altre distribuzioni singolari!

soddisfa, per ogni fissato $h \in \mathbf{N}$ e per ogni compatto K,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^h \varphi_n}{dx^h} \ = \ 0$$

e questo uniformemente in K.

(b) Indicheremo con $\mathcal{K}$ le spazio delle funzioni infinitamente derivabili ed a supporto compatto, cioè che si annullano al di fuori di un compatto; naturalmente se $f \in \mathcal{K}$, e K_f è il supporto di f, allora anche tutte le derivate di f si annullano al di fuori di K_f. Ne segue che $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$.

Diremo che una successione f_n di funzioni appartenenti a $\mathcal{K}$ converge (sottinteso, "in $\mathcal{K}$") alla funzione f_* se, definendo le funzioni

$$\varphi_n \ = \ (f_n - f_*)$$

ed indicando con K_n il supporto di φ_n, esiste un compatto K_∞ tale che $K_n \subset K_\infty$ per ogni n, e se la successione di funzioni φ_n soddisfa, per ogni fissato $h \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d^h \varphi_n}{dx^h} \ = \ 0$$

e questo uniformemente in K_0.

Abbiamo dunque

$$\mathcal{K} \ \subset \mathcal{S} \ \subset \mathcal{E} \ . \tag{13}$$

Questa relazione si estende alle topologie introdotte nei tre spazi: infatti se una successione φ_n in $\mathcal{K}$ converge a zero in $\mathcal{K}$, allora converge a zero anche in $\mathcal{S}$; ed allo stesso modo, se una succesione φ_n in $\mathcal{S}$ converge a zero in $\mathcal{S}$, allora converge a zero anche in $\mathcal{E}$.

Consideriamo ora gli spazi duali a $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, e $\mathcal{K}$, cioè gli spazi dei funzionali lineari continui (rispetto alla topologia dello spazio corrispondente[8]) dallo spazio considerato in C. Segue allora da (13) che si ha[9]

$$\mathcal{E}^* \ \subset \ \mathcal{S}^* \ \subset \ \mathcal{K}^* \ . \tag{14}$$

Ci concentreremo naturalmente sul nuovo spazio $\mathcal{K}^*$ che estende lo spazio delle distribuzioni temperate; esse è anche noto come spazio delle *distribuzioni di Schwartz*.

Per ogni funzione $u(x)$ localmente sommabile possiamo definire una distribuzione $\Lambda_{[u]} \in \mathcal{K}^*$, dunque una distribuzione di Schwartz, attraverso la (4); naturalmente ora questa si scrive anche come

$$\Lambda_{[u]}(f) \ = \ \int_{K_u} u(x) \ f(x) \ dx \ , \tag{15}$$

[8]Dunque chiederemo che $L(\varphi_n) \to 0$ nel senso della convergenza di una successione in C se $\varphi_n \to 0$ nel senso della convergenza nello spazio che stiamo considerando.

[9]Infatti, se L è definito su $\mathcal{E}$, allora è ben definito anche sul sottospazio $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$; e se è definito su $\mathcal{S}$ allora è ben definito anche sul sottospazio $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$.

dove K_u è il supporto (compatto per ipotesi) di $u(x)$. Che questo funzionale sia lineare è ovvio; per convincerci che è anche continuo è sufficiente notare che se $\varphi_n \to 0$ e $K_n \subset K_0$ $\forall n$, allora

$$\begin{aligned} |\Lambda_{[u]}(\varphi_n)| &= \Big| \int_{K_0} u(x)\ \varphi_n(x)\ dx \Big| \\ &\le \sup_{x \in K_0} |\varphi_n(x)| \ \cdot \ \Big| \int_{K_0} u(x)\ dx \ \Big| \ \to \ 0 \ . \end{aligned}$$

E' evidente, ma è utile osservare esplicitamente, che questa è una distribuzione in $\mathcal{K}^*$, ma in generale *non* è anche una distribuzione in $\mathcal{S}^*$ (né, *a fortiori*, in $\mathcal{E}^*$); ad esempio questo è il caso (lo studente è invitato a controllare questa affermazione) per

$$u(x) \ = \ e^x \ .$$

Diremo che la distribuzione $\Lambda \in \mathcal{K}^*$ è uguale a zero in un insieme aperto B se per ogni $f \in \mathcal{K}$ con supporto $K_f \subset B$, si ha $\Lambda(f) = 0$. Consideriamo ora l'unione B_Λ degli insiemi B con questa proprietà (per una fissata distribuzione Λ); il complementare di B_Λ è detto essere il supporto di Λ. E' facile mostrare che se $\Lambda = \Lambda_{[u]}$, allora il supporto di $\Lambda_{[u]}$ coincide con il supporto di u.

Osservazione 3. Risulta, che se non lo dimostreremo, che le distribuzioni in $\mathcal{E}^*$ sono tutte e sole le distribuzioni a supporto compatto. Segue immediatamente da questa affermazione che $\Theta \notin \mathcal{E}^*$, dato che il suo supporto non è compatto; e che viceversa $\delta_a \in \mathcal{E}^*$ avendo supporto compatto (il solo punto $x = a$). In effetti, le uniche distribuzioni il cui supporto si riduce ad un punto sono le $\delta_a^{(h)}$ (con $h \in \mathbf{N}$), ossia le δ e le loro derivate (o multipli di queste). $\odot$

Osservazione 4. Evidentemente, ogni funzione $u \in \mathcal{K}$ individua una distribuzione $\Lambda_{[u]} \in \mathcal{K}^*$, attraverso la solita relazione, che ora si legge anche come

$$\Lambda_{[u]}(f) \ = \ \int_{K_u} u(x)\ f(x)\ dx \ .$$

Inoltre, risulta che l'insieme delle distribuzioni così ottenute (che possiamo chiamare "regolari in $\mathcal{K}^*$") è *denso in* $\mathcal{K}^*$; dunque ogni distribuzione in $\mathcal{K}^*$ può essere ottenuta come limite di – e quindi approssimata con la precisione voluta attraverso – una successione di distribuzioni regolari. Qui il limite va inteso nel senso della topologia in $\mathcal{K}^*$. Risulta inoltre che oltre ad $\mathcal{S}^*$, anche gli spazi $\mathcal{E}^*$ e $\mathcal{K}^*$ sono completi. $\odot$

Osservazione 5. La discussione riguardante la convergenza e le derivate delle distribuzioni temperate resta valida anche per le distribuzioni di Schwartz. $\odot$

Infine, osserviamo in conclusione che la trasformata di Fourier *non* può essere introdotta per $\mathcal{K}^*$: infatti, avere una funzione $f \in \mathcal{K}$ *non* implica che $T[f]$ sia anch'essa in $\mathcal{K}$.

In effetti abbiamo visto poco sopra che la trasformata della δ (che ha supporto che si riduce ad un punto) è una costante e dunque ha come supporto tutta la retta reale, e non decresce in alcun modo. Volendo restare nell'ambito delle funzioni ordinarie, abbiamo visto (nella dispensa sulle trasformate di Fourier) che per la funzione

$$f(x) \ = \ \chi_A(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{per } |x| \leq A \\ 0 & \text{per } |x| \text{ ¿ A} \end{cases}$$

si ha

$$\widehat{f}(\omega) \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{\sin(\omega x)}{\omega} \ ,$$

che non ha supporto compatto e che non è a decrescenza rapida.

7 Commenti

Vorrei concludere questa dispensa, e la breve discussione delle funzioni generalizzate o distribuzioni (che lo studente interessato potrà conoscere in maggior dettaglio attraverso i corsi di Analisi) riportando due brevi commenti sul tema da parte di matematici che certo vale la pena di ascoltare.

1. Nel testo di Kolmogorov & Fomin si legge, al momento di introdurre le distribuzioni (pag.200 della edizione italiana, da cui estraggo la citazione): "Sottolineiamo ancora una volta che l'introduzione delle distribuzioni non è dovuta a un'estensione possibilmente massima dei concetti dell'Analisi, bensì a problemi molto concreti. Infatti le distribuzioni trovano applicazione in Fisica già da un pezzo, in ogni caso da prima che sia stata costruita una teoria matematica rigorosa delle distribuzioni."

2. Ecco invece quanto dice L. Schwartz nella sua autobiografia, che in Inglese appare sotto il titolo di *"A mathematician grappling with his century"*, pubblicata da Birkhauser (non si tratta di un racconto della sola attività matematica; Schwartz è anche stato molto impegnato politicamente); nel capitolo VI racconta dell'origine della teoria delle distribuzioni, avvenuta molto precisamente in una notte ad inizio novembre 1944 (mentre si nascondeva, in quanto ebreo residente nella Francia occupata, sotto falsa identità). Il capitolo si chiude con una brevissima sintesi sulle critiche ricevute a proposito delle distribuzioni: "Ho ricevuto due tipi di critiche: alcuni hanno trovato che l'idea fosse così semplice da non poter certamente essere di nessuna utilità, ed altri che la generalizzazione delle funzioni attraverso le forme lineari continue su uno spazio vettoriale topologico fosse così complicata da non poter certamente essere di nessuna utilità".[10]

Lo studente interessato agli inizi della teoria delle distribuzioni può consultare ad esempio i seguenti articoli:

[10] "I received two kinds of criticisms: some people found that the whole idea was so simple that it couldn't possibly be useful, and others that the generalization of functions by continuous linear forms on a topological vector space was so complicated that it couldn't possibly be useful".

◦ S.L. Sobolev, “Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales”, *Mat. Sborn. USSR* **1** (1936), 39-72

◦ L. Schwartz, “Théorie des distributions”, *Bull. AMS* **58** (1952), 78-85

◦ G. Temple, “Theories and Applications of Generalized Functions”, *J. London Math. Soc.* **s1-28** (1953), 134-148

◦ G. Temple, “The theory of generalized functions”, *Proc. R. Soc. Lond. A* **228** (1955), 175-190

◦ L. Ehrenpreis, “On the theory of kernels of Schwartz”, *Proc. A.M.S.* **7** (1956), 713-718

8 Bibliografia

Lo studente desideroso di approfondire la sua conoscenza delle funzioni generalizzate, può consultare ad esempio i testi nella lista qui di seguito (l’ultima referenza è beninteso fornita solo per completezza), in particolare quello di Kolmogorov & Fomin e quello di Reed & Simon; quest’ultimo introduce la trasformata di Fourier direttamente lavorando sulle distribuzioni.

- G. Cicogna, *Metodi Matematici della Fisica*, Springer Italia 2008
- Ph. Dennery & A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Dover 1996
- F.W. Byron & R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover 1992
- L. Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Dover 2008
- M. Reed & B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I: Functional Analysis*, Academic Press 1980
- A.N. Kolmogorov & S.V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, MIR 1980
- Yu. Egorov, “A contribution to the theory of generalized functions”, *Russ. Math. Surv.* **45** (1990), 1-49
- I.M. Gel’fand, G.E. Shilov & N.Ya. Vilenkin, *Generalized Functions* (5 voll.), Academic Press, 1964–1968

`G. Gaeta, 27/5/2019`