Corso di Fisica Matematica 3 – a.a. 2018/19

Esame scritto (parte di Meccanica Quantistica) 09/07/2019

Esercizio 1. Si consideri l'oscillatore armonico descritto dalla Hamiltoniana

$$H_0 \ = \ \frac{p^2}{2m} \ + \ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ ,$$

e siano $|n\rangle$ $(n \geq 0)$ gli autostati dell'Hamiltoniana.

Si consideri ora lo stato

$$\phi(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ (|1\rangle \ + \ |3\rangle \ + \ |7\rangle) \ .$$

Sia $\psi(x,t)$ lo stato dipendente dal tempo che evolve secondo l'equazione di Schroedinger a partire da $\psi(x,0) = \phi(x)$. Per questo stato si calcolino:

1. Il periodo dello stato;
2. I valori medi $k(t)$ e $v(t)$ al tempo t degli operatori $K = p^2/2m$ e $V = (m\omega^2/2)q^2$, corrispondenti ad energia cinetica ed energia potenziale;
3. I periodi di $k(t)$ e di $v(t)$.

Esercizio 2. Si consideri l'oscillatore armonico descritto dalla Hamiltoniana

$$H_0 \ = \ \frac{p^2}{2m} \ + \ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ ,$$

e siano $|n\rangle$ $(n \geq 0)$ gli autostati dell'Hamiltoniana. Siano $\phi_k(t)$ gli stati che evolvono nel tempo a partire da $\phi_k(0) = |k\rangle$.

Si consideri ora la miscela statistica

$$S(t) \ = \ \{\phi_1(t), 1/3; \phi_3(t), 1/3; \phi_7(t), 1/3\} \ .$$

Si calcolino

1. I valori medi $k(t)$ e $v(t)$ al tempo t sulla miscela statistica S degli operatori $K = p^2/2m$ e $V = (m\omega^2/2)q^2$, corrispondenti ad energia cinetica ed energia potenziale;
2. I periodi di $k(t)$ e di $v(t)$.

Formule utili

- Relazioni di commutazione canoniche

$$[q_i, q_j] = 0,\ [p_i, p_j] = 0;\ [q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}\ .$$

- Equazione di Schroedinger

$$H\ \psi\ =\ \lambda\ \psi$$

- Equazione di Schroedinger dipendente dal tempo

$$i\,\hbar\partial_t\psi\ =\ H\ \psi$$

- Operatori di salita e discesa per l'oscillatore armonico

$$\eta^+\ =\ \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\ (p + im\omega q)\ ;\quad \eta\ =\ \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\ (p - im\omega q)\ .$$

$$p\ =\ \sqrt{\frac{m\,\omega\,\hbar}{2}}\ \left(\eta^+\ +\ \eta\right)\ ;\quad q\ =\ -\,i\ \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\ \left(\eta^+\ -\ \eta\right)\ .$$

$$\eta^+\ \eta\ =\ \frac{1}{\hbar\omega}\,H\ -\ \frac{1}{2}\ ;\quad \eta\ \eta^+\ =\ \frac{1}{\hbar\omega}\,H\ +\ \frac{1}{2}\ .$$

$$[\eta, \eta^+]\ =\ 1\ ,\quad \{\eta, \eta^+\}\ =\ \frac{2}{\hbar\omega}\,H\ ;$$

$$[H, \eta] = -\hbar\omega\eta,\ [H, \eta^+] = \hbar\omega\eta^+\ .$$

$$|n\rangle\ =\ \frac{1}{\sqrt{n!}}\ (\eta^+)^n\ |0\rangle\ .$$

$$\eta^+\,|k\rangle\ =\ \sqrt{k+1}\,|k+1\rangle\ ,\quad \eta\,|k+1\rangle\ =\ \sqrt{k+1}\,|k\rangle\ .$$

- Matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE

1.1 Le energie per gli autostati $\psi_n(x)$ dell'oscillatore armonico di frequenza ω sono

$$E_n \ = \ \left(n \ + \ \frac{1}{2} \right) \ \hbar \, \omega \ .$$

Indichiamo con $\eta_n(x,t)$ gli evoluti da $\psi_n(x)$, cioè gli stati che soddisfano $\eta_n(x,0) = \psi_n(x)$. Questi stati evolvono secondo l'equazione di Schroedinger dipendente dal tempo, quindi

$$i\hbar \partial_t \eta_n \ = \ H \, \eta_n \ = \ E_n \, \eta_n \ ,$$

da cui ovviamente

$$\eta_n(x,t) \ = \ \exp \left[- \frac{i}{\hbar} \, E_n \, t \right] \ \eta_n(x,0) \ = \ \exp \left[- \frac{i}{\hbar} \, E_n \, t \right] \ \psi_n(x) \ .$$

Lo stato $\psi(x,t)$ che evolve a partire da

$$\psi(x,0) \ = \ \phi(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \left(|1\rangle \ + \ |3\rangle \ + \ |7\rangle \right)$$

è quindi descritto da

$$\begin{aligned} \psi(x,t) \ &= \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \left(e^{-(i/\hbar) E_1 t} \, \psi_1(x) \ + \ e^{-(i/\hbar) E_3 t} \, \psi_3(x) \ + \ e^{-(i/\hbar) E_7 t} \, \psi_7(x) \right) \\ &= \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ e^{-(i/\hbar) E_1 t} \ \left(\psi_1(x) \ + \ e^{-(i/\hbar)(E_3 - E_1) t} \, \psi_3(x) \ + \ e^{-(i/\hbar)(E_7 - E_1) t} \, \psi_7(x) \right) \ . \end{aligned}$$

Questo rappresenta lo stesso stato che al tempo $t = 0$ ogni qual volta si ha

$$\psi(x,T) \ = \ \alpha \ \psi(x,0)$$

per qualche costante complessa α. In considerazione della formula precedente, dobbiamo quindi avere

$$e^{-(i/\hbar)(E_3 - E_1) T} \ = \ 1 \ = \ e^{-(i/\hbar)(E_7 - E_1) T} \ ;$$

a loro volta queste uguaglianze richiedono che sia

$$(1/\hbar)(E_3 - E_1) T \ = \ 2 \, m \, \pi \ , \quad (1/\hbar)(E_7 - E_1) T \ = \ 2 \, n \, \pi$$

per qualche coppia di interi m, n.

Ricordando l'espressione per E_n, abbiamo

$$(1/\hbar)(2\hbar\omega) T \ = \ 2 \, m \, \pi \ , \quad (1/\hbar)(6\hbar\omega) T \ = \ 2 \, n \, \pi \ ;$$

ovvero

$$\omega \, T \ = \ m \, \pi \ , \quad 3 \, \omega \, T \ = \ n \, \pi \ .$$

Possiamo sempre scegliere $n = 3m$, ed il periodo (che si ottiene ponendo $m = 1$) risulta essere

$$T \ = \ \frac{\pi}{\omega} \ ;$$

questo è *la metà* del periodo dell'oscillatore classico di frequenza ω.

1.2 Scriviamo $\beta = -\omega/2$. Allora lo stato risulta essere, con una notazione più compatta,

$$|\psi\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{3}} \ \left(e^{i3\beta t}|1\rangle + e^{i7\beta t}|3\rangle + e^{i15\beta t}|7\rangle \right) \ .$$

Il valor medio di un operatore A su questo stato (che soddisfa $\langle\psi|\psi\rangle = 1$) è quindi

$$\begin{aligned} \langle A\rangle_\psi \ &= \ <\psi|\, A\, |\psi\rangle \\ &= \ \frac{1}{3} \ \Big(\langle 1|A|1\rangle + \langle 3|A|3\rangle + \langle 7|A|7\rangle \ + \ e^{(i/\hbar)(E_3-E_1)t}\langle 1|A|3\rangle \\ &\quad + e^{(i/\hbar)(E_7-E_1)t}\langle 1|A|7\rangle + e^{(i/\hbar)(E_7-E_3)t}\langle 3|A|7\rangle + e^{-(i/\hbar)(E_3-E_1)t}\langle 3|A|1\rangle \\ &\quad + e^{-(i/\hbar)(E_7-E_1)t}\langle 7|A|1\rangle + e^{-(i/\hbar)(E_7-E_3)t}\langle 7|A|3\rangle \Big) \ . \end{aligned}$$

Nel nostro caso però gli operatori da considerare sono quadratici in p e q, quindi in η ed η^+: l'elemento di matrice A_{mn} di A è allora automaticamente nullo a meno che $|m-n| = 0, 2$. Dobbiamo quindi calcolare solo

$$\begin{aligned} \langle A\rangle_\psi \ &= \ <\psi|\, A\, |\psi\rangle \\ &= \ \frac{1}{3} \ \Big(\langle 1|A|1\rangle + \langle 3|A|3\rangle + \langle 7|A|7\rangle \ + \ e^{(i/\hbar)(E_3-E_1)t}\langle 1|A|3\rangle \ + \ e^{-(i/\hbar)(E_3-E_1)t}\langle 3|A|1\rangle \Big) \ . \end{aligned}$$

Inoltre, è sufficiente calcolare gli elementi di matrice tra gli stati stazionari. Possiamo quindi scrivere

$$\langle A\rangle_\psi \ = \ \frac{1}{3} \ \left(A_{11} + A_{33} + A_{77} \ + \ e^{2i\omega t}A_{13} \ + \ e^{-2i\omega t}A_{31} \right) \ .$$

Ricordiamo ora quali sono gli operatori da considerare.

Per $A = K$ abbiamo

$$A \ = \ \frac{p^2}{2m} \ = \ \frac{1}{2m}\frac{m\hbar\omega}{2} \ (\eta^+ + \eta)^2 \ = \ \frac{1}{2m}\frac{m\hbar\omega}{2} \ [(\eta^+)^2 \ + \ (\eta^+\eta + \eta\eta^+) \ + \ (\eta)^2] \ ;$$

in questo caso gli elementi diagonali sono

$$A_{nn} \ = \ \frac{1}{2m}\frac{m\hbar\omega}{2} \ (2\,n \ + \ 1) \ ;$$

invece

$$A_{13} \ = \ \frac{1}{2m}\frac{m\hbar\omega}{2}\sqrt{6} \ = \ A_{31} \ .$$

In conclusione,

$$\langle\psi|K|\psi\rangle \;=\; \frac{1}{3}\,\frac{1}{2m}\,\frac{m\hbar\omega}{2}\,\Big[3 \;+\; 7 \;+\; 15 \;+\; \sqrt{6}\,\cos(2\omega t)\Big] \;=\; \frac{\hbar\omega}{12}\,\Big[25 \;+\; \sqrt{6}\,\cos(2\omega t)\Big]\;.$$

Per $A = V$ abbiamo $A = (m\omega^2/2)q^2$, e quindi

$$A \;=\; -\frac{m\omega^2}{2}\,\frac{\hbar}{2m\omega}\,(\eta^+ - \eta)^2 \;=\; -\frac{m\omega^2}{2}\,\frac{\hbar}{2m\omega}\,\big[(\eta^+)^2 \;-\; (\eta^+\eta + \eta\eta^+) \;+\; (\eta)^2\big]\;;$$

in questo caso gli elementi diagonali sono

$$A_{nn} \;=\; +\frac{m\omega^2}{2}\,\frac{\hbar}{2m\omega}\,(2\,n \;+\; 1)\;;$$

invece

$$A_{13} \;=\; -\frac{m\omega^2}{2}\,\frac{\hbar}{2m\omega}\,\sqrt{6}\;.$$

In conclusione,

$$\langle\psi|V|\psi\rangle \;=\; \frac{1}{3}\,\frac{m\omega^2}{2}\,\frac{\hbar}{2m\omega}\,\Big[3 \;+\; 7 \;+\; 15 \;+\; \sqrt{6}\,\cos(2\omega t)\Big] \;=\; \frac{\hbar\omega}{12}\,\Big[25 \;+\; \sqrt{6}\,\cos(2\omega t)\Big]\;.$$

Osserviamo che, come naturale dato che l'energia è conservata,

$$\langle K\rangle \;+\; \langle V\rangle \;=\; \frac{25}{3}\,\hbar\,\omega \;=\; \text{costante} \;=\; \langle H\rangle\;.$$

1.3 I periodi di $k(t)$ di $v(t)$, ovviamente uguali (anche perché l'energia è costante), risultano immediatamente dal calcolo esplicito precedente. E' sufficiente richiedere

$$2\,\omega\,T \;=\; 2\,\pi\;,$$

e quindi otteniamo

$$T \;=\; \pi/\omega\;;$$

questo coincide con il periodo dello stato.

2.1 Possiamo utilizzare i calcoli svolti in precedenza. Infatti

$$\begin{aligned}\langle K \rangle_S &= \frac{1}{3}\ (\langle K \rangle_1\ +\ \langle K \rangle_3\ +\ \langle K \rangle_7) \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{1}{2m}\,\frac{m\hbar\omega}{2}\,(2\ +\ 6\ +\ 14) \\ &= \frac{\hbar\omega}{12}\ 22\ =\ \frac{11}{6}\ \hbar\,\omega\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle V \rangle_S &= \frac{1}{3}\ (\langle V \rangle_1\ +\ \langle V \rangle_3\ +\ \langle V \rangle_7) \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{m\omega^2}{2}\,\frac{\hbar}{2m\omega}\,(2\ +\ 6\ +\ 14) \\ &= \frac{\hbar\omega}{12}\ 22\ =\ \frac{11}{6}\ \hbar\,\omega\ .\end{aligned}$$

2.2 In una miscela statistica non si verificano fenomeni di interferenza tra i diversi stati; quindi (nel caso la miscela statistica sia costituita da stati stazionari, come è qui) i valori medi degli operatori sono stazionari.