Corso di Fisica Matematica 3 – a.a. 2018/19

Esame scritto (parte di Meccanica Quantistica) 19/06/2019

Si consideri l'Hamiltoniana uno-dimensionale

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; V(x)\;, \quad V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{per } |x| \geq L/2 \\ -A & \text{per } |x| < L/2\;, \end{cases}$$

dove L ed A sono costanti reali positive.

1. Si chiede di determinare l'equazione trascendente le cui soluzioni forniscono gli autovalori E_n dello spettro discreto; e le corrispondenti autofunzioni $\psi_n(x)$ (in rappresentazione di Schroedinger) per questa Hamiltoniana.
2. Si determini in particolare se l'equazione di cui sopra ammette almeno uno stato legato $\psi_0(x)$ con energia E_0.
3. Si consideri ora il caso $A = 1/L$, ed il limite per $L \to 0$ dei risultati ottenuti in precedenza. Si confrontino E_0 e $\psi_0(x)$ in questo limite con quelli relativi al problema con $V(x) = -\delta(x)$.

Pagina intenzionalmente bianca

SOLUZIONE

Osserviamo preliminarmente che il potenziale è *pari*; quindi le autofunzioni saranno a parità definita (pari o dispari).

1.

Scriviamo la funzione d'onda decomponendola nelle tre regioni in cui il potenziale è costante:

$$\psi(x) \ = \ \begin{cases} \psi_-(x) & \text{per } x \le -L/2 \\ \psi_0(x) & \text{per } -L/2 \le x \le L/2 \\ \psi_+(x) & \text{per } x \ge L/2 \ \ . \end{cases}$$

Dato che la funzione d'onda deve essere continuainsieme alla sua derivata, abbiamo quattro condizioni di raccordo:

$$\begin{cases} \psi_+(L/2) \ = \ \psi_0(L/2) \ , \\ \psi'_+(L/2) \ = \ \psi'_0(L/2) \ ; \\ \psi_0(-L/2) \ = \ \psi_-(-L/2) \ , \\ \psi'_0(-L/2) \ = \ \psi'_-(-L/2) \ . \end{cases} \qquad (*)$$

Quanto agli autovalori E, sappiamo che per lo spettro discreto deve valere

$$-A \ < \ E \ < \ 0 \ ;$$

in particolare questo significa che $E = -|E|$.

Per le diverse parti della funzione d'onda, abbiamo che l'equazione di Schroedinger (stazionaria) si scrive come

$$\begin{aligned} \psi''_\pm \ &= \ \frac{2m}{\hbar^2} \ |E| \ \psi_\pm \ := \ k^2 \ \psi_\pm \ , \\ \psi''_0 \ &= \ \frac{2m}{\hbar^2} \ [-A + |E|] \ \psi_0 \ := \ -\omega^2 \ \psi_0 \ ; \end{aligned}$$

sia k che ω sono parametri *reali*. Più precisamente,

$$k \ = \ \sqrt{\frac{2\,m\,|E|}{\hbar^2}} \ ; \quad \omega \ = \ \sqrt{\frac{2\,m\,(A-|E|)}{\hbar^2}} \ . \qquad (**)$$

Osserviamo che al variare di $|E|$ tra0 ed A, queste due costanti variano tra zero e $\sqrt{2mA}/\hbar$.

Le soluzioni sono evidentemente

$$\psi_0(x) \ = \ a \ e^{i\omega x} \ + \ b \ e^{-i\omega x} \ ;$$

$$\psi_\pm(x) \ = \ \alpha_\pm \ e^{-kx} \ + \ \beta_\pm \ e^{kx} \ .$$

La richiesta di avere funzioni in L^2 porta però ad imporre $\alpha_m = 0$, $\beta_+ = 0$; scriviamo allora semplicemente

$$\psi_+(x) \ = \ \alpha \ e^{-kx} \ ; \quad \psi_-(x) \ = \ \beta \ e^{kx} \ .$$

Le condizioni di raccordo (*) si possono allora scrivere come un sistema omogeneo di quattro equazioni lineari per i coefficienti α, β, a, b. Risulta più comodo trattare separatamente il caso di funzioni pari e dispari (questo permette di avere a che fare con matrici 2×2 anziché 4×4).

Autofunzioni pari.

Per le autofunzioni pari, abbiamo

$$\psi_\pm(x) \ = \ \alpha \ \exp[\mp kx] \ ; \quad \psi_0(x) \ = \ \gamma \ \cos(\omega x) \ .$$

Le condizioni di raccordo sono allora

$$\begin{cases} \alpha \ \exp[-k(L/2)] \ = \ \gamma \ \cos[\omega(L/2)] \\ -k \ \alpha \ \exp[-k(L/2)] \ = \ -\gamma\,\omega \ \sin[\omega(L/2)] \end{cases}$$

e ponendole a sistema otteniamo

$$k \ = \ \omega \ \tan[\omega(L/2)] \ , \qquad (***)$$

che diventa una equazione per $|E|$ usando le (**). Scrivendo inoltre

$$|E| \ = \ \eta \ A \ ,$$

le (**) diventano

$$k \ = \ \sqrt{\eta} \ \sqrt{\frac{2\,m\,A}{\hbar^2}} \ , \quad \omega \ = \ \sqrt{1-\eta} \ \sqrt{\frac{2\,m\,A)}{\hbar^2}} \ ; \quad k \ = \ \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} \ .$$

Scrivendo per semplicità di notazione

$$B \ := \ \sqrt{\frac{m\,A\,L^2}{2\,\hbar^2}} \ ,$$

l'equazione (***) diventa quindi,

$$\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} \ = \ \tan\left[\sqrt{1-\eta}\sqrt{\frac{2\,m\,A}{\hbar^2}} \ \frac{L}{2}\right] \ := \ \tan[B\,\sqrt{1-\eta}] \ . \qquad (P)$$

La funzione a sinistra vale zero in $\eta = 0$, ha derivata sempre positiva per $\eta \in [0,1)$ e diverge per $\eta = 1$; quella a destra vale $\tan(B) > 0$ in $\eta = 0$, ha derivata negativa (possibilmente con delle singolarità), e si annulla per $\eta = 1$. Dunque è evidente che l'equazione ammette (almeno) una soluzione.

Autofunzioni dispari.

Per le autofunzioni dispari, abbiamo

$$\psi_{\pm}(x) \ = \ \pm\alpha \ \exp[\mp kx] \ ; \ \ \psi_0(x) \ = \ \gamma \ \sin(\omega x) \ .$$

Le condizioni di raccordo sono allora

$$\begin{cases} \alpha \ \exp[-k(L/2)] \ = \ \gamma \ \sin[\omega(L/2)] \\ -k \ \alpha \ \exp[-k(L/2)] \ = \ \gamma\,\omega \ \cos[\omega(L/2)] \end{cases}$$

e ponendole a sistema otteniamo

$$k \ = \ -\omega \ \cot[\omega(L/2)] \ ;$$

Procedendo come sopra, questa diviene

$$\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} \ = \ - \ \cot[B\sqrt{1-\eta}] \ , \qquad (D)$$

e l'esistenza di soluzioni non è assicurata; in particolare, per $L \to 0$ e quindi $B \to 0$, nel membro di destra è negativa e non si hanno soluzioni.

2. Come abbiamo già osservato, esiste sempre almeno una soluzione per l'equazione (P), corrispondente ad una autofunzione pari, e quindi uno stato legato. Nel limite $L \to 0$ (e quindi $B \to 0$) si avrà una sola soluzione e quindi un solo stato legato.

Più precisamente, per $A = 1/L$ abbiamo

$$B \ := \ \sqrt{\frac{m\ A\,L^2}{2\,\hbar^2}} \ = \ \sqrt{\frac{m\ L}{2\,\hbar^2}} \ ,$$

e quindi per $L \to 0$ anche $B \to 0$.

Al primo ordine in B abbiamo

$$\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} \ = \ B \ \sqrt{1-\eta}$$

3. Nel caso del potenziale $V(x) = -\delta(x)$, la funzione d'onda si scrive (con le stesse notazioni) come

$$\psi_{\pm}(x) \ = \ \alpha_{\pm} \ \exp[-k|x|] \ ;$$

le condizioni di raccordo sono

$$\psi_+(0) = \psi_-(0) \ ; \quad \psi'_+(0) = \psi'_-(0) + \frac{2m}{\hbar^2}\psi(0) \ .$$

Lavorando direttamente con una funzione *pari*, e con $E < 0$, queste sono

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \alpha_- := \alpha \ , \\ -k\alpha &= k\alpha - \frac{2m}{\hbar^2}\alpha \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente

$$k = m/\hbar^2$$

ed infine, ricordando che $k = \sqrt{2m|E|}/\hbar$,

$$|E| = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{m^2}{\hbar^4} = \frac{m}{2\hbar^2} \ .$$

[NB: Non era richiesto di discutere in dettaglio la procedura di limite per cui il problema considerato in precedenza si riduce a quello con il potenziale delta.]