Esercizi FisMat3 – MQ

24 Aprile 2018

Gli esercizi proposti sono quasi tutti estratti dalla collezione di esercizi (con soluzioni) a cura di E. d'Emilio e L. Picasso (ETS, 2011).

Alcuni di questi sono stati o saranno svolti a lezione; degli altri *non* si fornirà lo svolgimento. La loro soluzione è comunque una utile preparazione all'esame.

Gli argomenti trattati sono:

1. Fondamenti, proprietà generali, oscillatore armonico
2. Sistemi uno-dimensionali, spettro discreto
3. Sistemi uno-dimensionali, spettro continuo
4. Evoluzione temporale
5. Momento angolare e forze centrali
6. Spin
7. Campo magnetico
8. Teoria delle perturbazioni

Al termine lo studenta troverà alcune *formula utili*.

Il file è stato preparato per l'edizione 2016/17 del corso. Gli argomenti trattati potrebbero non essere tutti coperti nel corso di quest'anno.

1 Fondamenti, proprietà generali, oscillatore armonico

Esercizio 1. Della luce polarizzata verticalmente viene fatta passare attraverso un apparato costituito da n filtri polaroid ideali disposti in modo tale che la luce uscente dall'apparato sia polarizzata orizzontalmente (dunque l'ultimo filtro è necessariamente con polarizzazione orizzontale).

1. Per $n = 2$, determinare quale deve essere l'angolo del primo filtro in modo da massimizzare l'intensità del fascio uscente.

2. Per $n = 3$, determinare quale devono essere gli angoli dei filtri intermedi in modo da massimizzare l'intensità del fascio uscente.

3. Per n generico ma fissato, qual è l'intensità massima del fascio uscente che si può ottenere?

4. Discutere qual è il numero ottimale n_0 per massimizzare l'intensità del fascio uscente, sia nel caso di filtri ideali che nel caso in cui la componente trasmessa subisce comunque una attenuazione γ.

Esercizio 2. Quanti diversi stati

$$\phi \; = \; a\,\psi_1 \; + \; b\,\psi_2$$

si possono ottenere come sovrapposizione degli stati ψ_1, ψ_2 con arbitrari coefficienti complessi a, b ?

Esercizio 3. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione 3, e sia $\{\psi, \phi, \eta\}$ una base in $\mathcal{H}$. Siano inoltre A e B due osservabili tali che

$$A\psi = \lambda_1\psi \ , \quad A\phi = \lambda_1\phi \ , \quad A\eta = \lambda_2\eta \ ; \quad B\psi = \mu_1\psi \ , \quad B\phi = \mu_2\phi \ , \quad B\eta = \mu_2\eta \ .$$

1. Descrivere tutte le basi di $\mathcal{H}$ costituite da autovettori simultanei delle due osservabili;

2. Calcolare $[A, B]$;

3. Se si misurano prima A e poi B, descrivere tutte le possibile coppie (a, b) di risultati ottenuti, e calcolare le relative probabilità;

4. Lo stesso se si misura prima B e poi A.

Esercizio 4. Siano ψ_i, $i = 1, 2$ stati ortonormali. So consideri la miscela statistica S costituita da stati della forma

$$|\varphi\rangle \; = \; a\,\psi_1 \; + \; b\,e^{i\varphi}\;\psi_2 \ ,$$

con a, b, φ parametri reali con $a^2 + b^2 = 1$, e φ distribuito uniformemente in $[0, 2\pi)$.

Mostrare che questa è equivalente alla miscela statistica

$$\widehat{S} \; = \; \{a^2, \psi_1; b^2, \psi_2\} \; .$$

Esercizio 5. Consideriamo gli operatori associati alle diverse componenti (in coordinate cartesiane) del momento angolare

$$L_i \; = \; \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j p_k \; .$$

Determinare se esistono operatori F scritti come funzione polinomiale di (L_1, L_2, L_3) tali che $[F, L_i] = 0$ per $i = 1, 2, 3$.

Esercizio 6. Siano A e B due osservabili, con $[A, B] = C$ tale che

$$[A, C] \; = \; 0 \; = \; [B, C] \; .$$

1. Mostrare che

$$\exp[A] \; \exp[B] \; = \; \exp\left[A + B + \frac{1}{2} C\right] \; .$$

2. Siano $\widehat{A} = \gamma A$, $\widehat{B} = \gamma B$, $\widehat{C} = [\widehat{A}, \widehat{B}]$ Mostrare che

$$\exp[\widehat{A}] \; \exp[\widehat{B}] \; = \; \exp\left[\widehat{A} + \widehat{B} + \frac{1}{2}\widehat{C}\right]$$

   a meno di termini di ordine k in γ, e determinare k.

Esercizio 7. Si consideri l'oscillatore armonico descritto dalla Hamiltoniana

$$H \; = \; \frac{p^2}{2m} \; + \; \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \; ,$$

e siano η, η^+ gli operatori di abbassamento ed innalzamento associati,

$$\eta \; = \; \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \; (p \; - \; i\, m\, \omega\, q) \;\; , \;\; \eta^+ \; = \; \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \; (p \; + \; i\, m\, \omega\, q) \; .$$

Mostrare che

$$\left[\, \eta \, , \, (\eta^+)^N \right] \; = \; N \; (\eta^+)^{N-1} \; .$$

Esercizio 8. Si consideri l'oscillatore armonico descritto dalla Hamiltoniana

$$H \; = \; \frac{p^2}{2m} \; + \; \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \; ,$$

e siano $|n\rangle$ gli autostati dell'Hamiltoniana, con autovalori $\lambda_n \; = \; (n + 1/2)\hbar\omega$.

1. Tra tutti gli stati della forma
$$\phi \;=\; |\alpha,\beta\rangle \;:=\; \alpha\,|0\rangle \;+\; \beta\,|1\rangle$$
(con α, β numeri complessi), determinare quelli per cui $\langle p\rangle_\phi$ è massimo;
2. come al punto precedente, quelli per cui $\langle q\rangle_\phi$ è massimo.
3. Calcolare $\langle H\rangle_\phi$ per ϕ gli stati determinati nei due punti precedenti.
4. Si consideri ora la miscela statistica
$$S \;=\; \{a, |0\rangle; b, |1\rangle\} \;.$$
Calcolare i valori medi di p, q ed H su S.

Esercizio 9. Siano H, $|n\rangle$ e ϕ come nell'esercizio precedente. Denotiamo con K e V l'energia cinetica e l'energia potenziale,
$$K \;=\; \frac{p^2}{2m} \;,\quad V \;=\; V(x) \;.$$

1. Si calcolino i valori medi di K e V sugli stati della forma
$$\phi \;=\; \alpha\,|0\rangle \;+\; \beta\,|1\rangle \;;$$
2. Si calcolino i valori medi di K e V sugli stati della forma
$$\chi \;=\; \alpha\,|0\rangle \;+\; \beta\,|2\rangle \;.$$

Esercizio 10. Con H, $|n\rangle$, K e V come sopra,

1. calcolare
$$[H, pq] \;;$$
2. usare quanto determinato per mostrare che
$$\langle K\rangle_n \;=\; \langle V\rangle_n \;;$$
3. verificare se questo risultato ha un analogo classico.

2 Sistemi uno-dimensionali, spettro discreto

Esercizio 1. Sia

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; V(q)$$

la Hamiltoniana di un sistema uno-dimensionale, avente solo spettro discreto. Indichiamo con S l'operatore di inversione spaziale, che quindi soddisfa

$$S^{-1} = S \;,\quad SqS^{-1} \;=\; -\,q \;,\quad SpS^{-1} \;=\; -\,p \;.$$

1. Dire se possono esistere osservabili A tali che

$$[H, A] = 0 \;,\quad [S, A] \neq 0 \;.$$

2. Indicando con λ_k $(k = 0, 1, 2, ...)$ gli autovalori di H e con $|k\rangle$ i corrispondenti autostati, dire quali degli elementi di matrice

$$A_{mn} \;:=\; \langle m|n\rangle$$

possono essere non nulli per gli operatori $A = p, q, p^2, q^2$.

Esercizio 2. Indichiamo con V_0 il potenziale corrispondente ad una "buca di potenziale",

$$V_0(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{per } |x| \geq L \\ -\,A & \text{per } |x| < L \end{cases}$$

e sia V un potenziale che soddisfa

$$V(x) \leq 0 \;\forall x \;,\quad \lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0 \;;\quad V(x) \leq V_0(x) \;\forall x \;.$$

Consideriamo inoltre le Hamiltoniane

$$H_0 \;=\; \frac{p^2}{2m} + V_0(x) \;,\quad H \;=\; \frac{p^2}{2m} + V(x) \;;$$

e sia $\psi_0(x)$ lo stato fondamentale di H_0, $H_0\psi_0 = \lambda_0\psi_0$.

1. Mostrare che

$$\langle H\rangle_{\psi_0} < 0 \;;$$

2. Mostrare che H ha almeno una autofunzione $\phi_0(x)$, $H\phi_0 = \mu_0\phi_0$ con $\mu_0 \leq \lambda_0$.

Esercizio 3. Siano V_i $(i = 1, 2)$ due potenziali tali che

$$\lim_{x\to\pm\infty} V_i(x) \;=\; 0 \;,\quad V_1(x) \leq V_2(x) \;\forall x \;,$$

ed H_i le corrispondenti Hamiltoniane

$$H_i \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; V_i(x) \;.$$

1. Mostrare che se H_2 ha uno stato legato, allora anche H_1 ha (almeno) uno stato legato.

2. Mostrare che se i potenziali sono pari, $V_i(-x) = V_i(x)$, e H_2 ha due stati legati, allora anche H_1 ha (almeno) due stati legati.

Esercizio 4. Nello studio della buca di potenziale abbiamo visto che se A è la profondità della buca e $2L$ la sua larghezza, allora ci sono M stati legati, dove M è il più piccolo intero non inferiore a

$$\sqrt{2mAL^2}\ \frac{2}{\pi\hbar} \ = \ \sqrt{\frac{8mAL^2}{\pi^2\hbar^2}} \ .$$

1. Stimare il numero di stati legati per il potenziale

$$V_1(x) \ = \ -\,3\ \frac{\hbar^2}{mb^2}\ e^{-x^2/b^2} \ ;$$

2. Stimare il numero di stati legati per il potenziale

$$V_1(x) \ = \ -\,4\ \frac{\hbar^2}{mb^2}\ e^{-x^2/b^2} \ ;$$

3. Determinare il numero $K > 0$ tale che il potenziale

$$V(x) \ = \ -\frac{K}{x^2 + b^2}$$

ammetta almeno K stati legati;

4. Determinare il numero di stati legati ammessi dal potenziale (con $\mu > 0$, $b > 0$)

$$V(x) \ = \ -\ \frac{\mu}{|x| + b} \ .$$

Esercizio 5. Si consideri il potenziale

$$V(x) \ = \ \begin{cases} +\infty & \text{per } x \leq 0 \\ -\,A & \text{per } 0 < x < L \\ 0 & \text{per } x \geq L \end{cases}$$

e la Hamiltoniana $H = p^2/(2m) + V(x)$ associata.

1. E' vero che ogni autofunzione ψ di H soddisfa $\psi(0) = 0$?

2. E' vero che ogni funzione d'onda ϕ (nello spazio di Hilbert di cui le autofunzioni di H forniscono una base completa) soddisfa $\phi(0) = 0$?

3. Discutere se esistono stati legati.

Esercizio 6. Si consideri il potenziale

$$V(x) \;=\; \begin{cases} -A & \text{per } -L < x < L \\ 0 & \text{per } |x| \geq L \end{cases}$$

e la Hamiltoniana $H = p^2/(2m) + V(x)$ associata.

Si assuma che i parametri del problema siano tali per cui H ammette n stati legati.

Possiamo dedurre da questa informazione quanti sono gli stati legati per il potenziale visto nel problema precedente?

Esercizio 7. Per il potenziale a buca dell'esercizio precedente, determinare l'energia dello stato fondamentale nei seguenti casi:

1. Un elettrone di massa $m_e \simeq 9.1 \times 10^{-28}$g in una buca di profondità $A =$ 1eV e larghezza $2L = 2\mathring{A}$;
2. un protone di massa $m \simeq 1836 m_e$ in una buca di profondità $A = 1$MeV e larghezza $2L = 2 \cdot 10^{-12}$cm.

Esercizio 8. Sia $H = p^2/(2m) + V(x)$ l'Hamiltoniana. Sappiamo che il sistema si trova in un autostato $\psi(x)$ di H con

$$|\psi(x)|^2 \;=\; \frac{n^2}{(x^2 + a^2)^2}$$

1. Scrivere la funzione d'onda $\psi(x)$ per lo stato ψ.
2. Calcolare il valor medio di p e q sullo stato ψ.
3. Determinare il potenziale $V(x)$ (usando l'equazione di Schroedinger).
4. Dire se H ammette un autostato ψ che sia dispari e corrisponda ad un autovalore dello spettro discreto.

Esercizio 9*. Consideriamo potenziali $V(x)$ per cui esiste una funzione ϕ tale da poter scrivere V come

$$V(x) \;=\; \frac{\hbar^2}{2m} \; \left[(\phi'(x))^2 - \phi''(x) \right] \; .$$

1. Mostrare che $H = p^2/(2m) + V(x)$ puo' essere scritta come

   $$H \;=\; \frac{1}{2m} \, (p + i f(x)) \, (p - i f(x)))$$

   per una opportuna funzione $f(x)$, da determinare.
2. Mostrare che se $\psi(x)$ è tale che $H\psi = 0$, allora

   $$(p - i f(x))\psi \;=\; 0 \; .$$

   Determinare $\psi(x)$, se esiste, e discutere la sua esistenza.

Esercizio 10*. Determinare la funzione $\phi(x)$ dell'esercizio precedente per il potenziale

$$V(x) \ = \ \frac{\hbar^2}{2mL^2}\left[\tanh^2(x/L) \ - \ \frac{1}{\cosh^2(x/L)}\right] \ .$$

Usando i risultati dell'esercizio 9 determinare l'energia e la funzione d'onda per lo stato fondamentale del potenziale

$$V_0(x) \ = \ - \ \frac{\hbar^2}{mL^2\cosh^2(x/L)} \ .$$

3 Sistemi uno-dimensionali, spettro continuo

Esercizio 1. Determinare gli stati di scattering, cioè le soluzioni dell'equazione di Schroedinger corrispondenti allo spettro continuo per cui $\psi(x) \to \exp[ikx]$ per $x \to \infty$, per il potenziale

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ A & \text{per } 0 \le x \le L \\ B & \text{per } x > L \end{cases}$$

con $A > B$ e per $E > A > B$.

Esercizio 2. Determinare gli stati di scattering per il potenziale

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ A & \text{per } 0 \le x \le L \\ B & \text{per } x > L \end{cases}$$

con $A > B$ e per $B > E > A$.

Esercizio 3. Determinare gli stati di scattering per il potenziale

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ -A & \text{per } 0 \le x \le L \\ -B & \text{per } x > L \end{cases}$$

con $A > B$ e per $E > 0$.

Esercizio 4. Determinare gli stati corrispondenti allo spettro continuo per il potenziale dell'esercizio 2.5.

Esercizio 5*. Determinare le soluzioni dell'equazione di Schroedinger per il potenziale

$$V(x) \;=\; A\,x$$

con $A \neq 0$ un parametro reale.

[Suggerimento: un primo cambio di variabili lineare (ma non omogeneo), cioè passare alla variabile $\xi = \alpha(x - \beta)$ con α e β parametri che lo studente puo' determinare agevolmente, permette di ridursi alla forma $\psi''(\xi) = \xi\psi(\xi)$; questa equazione, nonostante la sua apparente semplicità, si risolve in termini della cosiddetta funzione di Airy *come $\psi = A\Phi(-\xi)$, dove A è un fattore di nosmalizzazione e la funzione di Airy è*

$$\Phi(\xi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(u^2/3 \;+\; u\,\xi\right)\, du \;.$$

Una discussione di questo problema è fornita nel paragrafo 24 del Landau-Lifshitz.

4 Evoluzione temporale

Esercizio 1. Siano $|n\rangle$ gli autostati di un oscillatore armonico di frequenza ω; consideriamo al tempo $t = 0$ gli stati

$$|A, 0\rangle \;=\; a\,|0\rangle \;+\; b\,e^{i\varphi}\,|1\rangle\;;\quad B \;=\; c\,|0\rangle \;+\; d\,e^{i\varphi}\,|2\rangle\;,$$

dove a, b, c, d, sono numeri reali non nulli, tali che

$$a^2 + b^2 \;=\; 1 \;=\; c^2 + d^2\;;$$

indichiamo con $|A, t\rangle$ e $|B, t\rangle$ gli evoluti di questi stati.

1. Mostrare che $|A, t\rangle$ e $|B, t\rangle$ sono periodici, e calcolarne i periodi T_A e T_B.
2. Scegliendo le fasi dei vettori $|n\rangle$ in modo che questi siano reali, calcolare in funzione del tempo i valori medi sugli stati $|A, t\rangle$ e $|B, t\rangle$ delle osservabili p, q, H.
3. Come sopra per K (energia cinetica) e V (energia potenziale).
4. Per $a = b$ e $\varphi = 0$, graficare qualitativamente le funzioni d'onda per gli stati $|A, 0\rangle$ e $|A, T_A/2\rangle$.

Esercizio 2. Sia $\phi(x, 0)$ uno stato generico di un oscillatore armonico di frequenza ω,

$$\phi(x, 0) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\psi_n(x)$$

con $H\psi_n = \lambda_n\psi_n$.

1. Mostrare che $\phi(x, t)$ è periodico, e determinarne il periodo.
2. Stessa domanda nel caso in cui sia $c_0 = 0$.
3. Stessa domanda se tutti i coefficienti pari sono nulli $c_{2k} = 0$.
4. Stessa domanda se tutti i coefficienti dispari sono nulli, $c_{2k+1} = 0$.

Esercizio 3. Una particella di massa m si trova in una buca di potenziale infinita di larghezza L; denotiamo con $|n\rangle$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ gli autostati della corrispondente Hamiltoniana.

1. Per lo stato definito a $t = 0$ da $|A, 0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, mostrare che è periodico e determinare il periodo;
2. Mostrare che l'evoluzione temporale di ogni stato è periodica (gli stati stazionari sono un caso degenere di evoluzione periodica);
3. Trovare il periodo di $|B, 0\rangle = \alpha|n\rangle + \beta|n + 1\rangle$ per $n \gg 1$.

4. Si consideri uno stato la cui funzione d'onda $\psi(x,0)$ al tempo $t=0$ è nulla sulla metà destra della buca di potenziale. Esistono tempi $t>0$ per cui la funzione si annulla sulla metà sinistra della buca?

Esercizio 4. Si consideri l'Hamiltoniana

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; V(x) \;+\; V(x-a)$$

dove $V(x)$ è un potenziale attrattivo (cioè $V(x) \leq 0$) con supporto compatto di ampiezza $b>0$ e a è un numero reale positivo, $a>2b$. Supponiamo inoltre che V abbia un solo stato legato, di energia $E_0 = -\hbar^2 k_0^2/(2m)$.

1. Se I_x è l'operatore di inversione spaziale rispetto al punto x, mostrare che esiste un punto x_0 tale che $[H, I_{x_0}] = 0$, e determinare x_0.
2. Determinare la relazione tra I_{x_0} e I_0, esprimendo I_{x_0} in termini di I_0.
3. Mostrare che se $k_0 a \gg 0$ H ha due stati legati con energia E_1, $E_2 > E_1$.

Esercizio 5. Sia $\psi(x,t)$ una soluzione dell'equazione di Schroedinger dipendente dal tempo per una certa Hamiltoniana $H = p^2/2m + V(x)$, con V un potenziale qualsiasi.

1. Se $\psi(x,0)$ è una funzione reale, possiamo dire che $\psi(x,t)$ sarà reale ad ogni tempo $t>0$?
2. Se $\psi(x,0)$ è una funzione immaginaria pura, possiamo dire che $\psi(x,t)$ sarà immaginaria pura ad ogni tempo $t>0$?

Esercizio 6. Sia $\psi(x,t)$ una soluzione dell'equazione di Schroedinger dipendente dal tempo per una certa Hamiltoniana $H = p^2/2m + V(x)$, con V un potenziale *pari*, $V(-x) = V(x)$.

1. Se $\psi(x,0)$ è una funzione pari, $\psi(-x,0) = \psi(x,0)$, possiamo dire che $\psi(x,t)$ sarà pari ad ogni tempo $t>0$?
2. Se $\psi(x,0)$ è una funzione dispari, $\psi(-x,0) = -\psi(x,0)$, possiamo dire che $\psi(x,t)$ sarà dispari ad ogni tempo $t>0$?

Esercizio 7. Sia $\psi(x,t)$ una soluzione dell'equazione di Schroedinger dipendente dal tempo per una certa Hamiltoniana $H = p^2/2m + V(x)$.

1. Possiamo dire che $\psi^*(x,t)$ è soluzione della stessa equazione?
2. Possiamo dire che $\widetilde{\psi}(x,t) = \psi(x,-t)$ è soluzione della stessa equazione?
3. Possiamo dire che $\widehat{\psi}(x,t) = \psi^*(x,-t)$ è soluzione della stessa equazione?
4. Quale è la relazione tra $\langle q\rangle_\psi, \langle p\rangle_\psi$ e $\langle q\rangle_{\widehat{\psi}}, \langle p\rangle_{\widehat{\psi}}$?

5. Sia T la trasformazione (time reversal) che associa $\widehat{\psi}$ a ψ; determinare se T è una trasformazione unitaria.

6. Come si esprime T nella rappresentazione dei momenti ?

Esercizio 8. Sia $U(t)$ una famiglia di operatori unitari dipendente dal tempo, ed H una hamiltoniana. Ad ogni $\psi(x,t)$ che risolve l'equazione di Schroedinger

$$i\hbar\,\psi_t \;=\; H\,\psi$$

associamo la funzione

$$\widehat{\psi}(x,t) \;=\; U^{+}(t)\,\psi(x,t)\ .$$

1. Determinare $\widehat{H}$ tale che
$$i\hbar\widehat{\psi}_t \;=\; \widehat{H}\,\widehat{\psi}$$

2. Determinare l'operatore unitario $\widehat{F}(t)$ che descrive l'evoluzione temporale di $\widehat{\psi}$, cioè per cui
$$\widehat{\psi}(x,t) \;=\; \widehat{F}(t)[\widehat{\psi}(x,0)]\ ,$$
e mostrare che soddisfa l'equazione
$$i\hbar\,\frac{d\widehat{F}}{dt} \;=\; \widehat{H}\,\widehat{F}\ .$$

Esercizio 9. Consideriamo un oscillatore armonico di periodo $T = 2\pi/\omega$,

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,(x-\xi)^2\ ;$$

per $t \leq 0$ si ha $\xi = 0$ e il sistema si trova nello stato $0\rangle$. Al tempo $t = 0$ il centro di oscillazione ξ comincia a muoversi secondo $\xi = \xi(t)$ con $\xi(0) = 0$, $\xi(t) = \xi_1$ per $t \geq \tau$, e $\xi'(t) \geq 0$.

Nel caso in cui $\tau \ll 1/\omega$ determinare lo stato $\phi(x,t)$ del sistema per $t \geq 0$. Calcolare $\langle q\rangle_\phi$ e determinare se oscilla intorno a ξ.

Esercizio 10*. Nello stesso quadro dell'esercizio precedente, consideriamo il caso in cui $\tau \to \infty$; è comodo considerare $\xi(t) = f(t/\tau)$ con f una funzione differenziabile tale che $f(0) = 0$, $f(1) = \xi_1$.

1. Mostrare che in questo caso il sistema resta per ogni t nello stato fondamentale $\psi^{(t)}(x)$ di $H(t)$.

2. Verificare che $\psi^{(t)}(x,t)$ soddisfa l'equazione di Schroedinger dipendente dal tempo per $H(t)$.

5 Momento angolare e forze centrali

Esercizio 1. Mostrare che in tre dimensioni (coordinate r, θ, ϕ, elemento di volume $dV = r^2 dr d\Omega$) l'operatore

$$p_r \; = \; - \, i \hbar \; \partial_r$$

non è hermitiano. Determinare p_r^+.

Esercizio 2. Mostrare che nello stesso quadro dell'esercizio precedente, l'operatore

$$\widetilde{p_r} \; := \; r^{-1} \; p_r \; r$$

è hermitiano. Determinare la relazione tra $\widetilde{p_r}$ e p_r e la sua rappresentazione nello schema di Schroedinger.

Esercizio 3. Mostrare, usando la rappresentazione di Schroedinger, che

$$\frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} \; = \; \frac{1}{2m} \, \widetilde{p_r}^+ \, \widetilde{p_r} \; + \; \frac{\overrightarrow{L}^2}{2mr^2}$$

sugli stati di momento angolare $\ell = 0$.

Esercizio 4. Determinare gli stati di momento angolare $\ell = 0$ per la particella libera.

Esercizio 5. Si consideri una particella vincolata a muoversi all'interno di una sfera di raggio R (e libera al suo interno). Determinare autovalori ed autofunzioni per gli stati con $\ell = 0$.

Esercizio 6. Si consideri una particella nella "buca di potenziale sferica"

$$V(r) = \begin{cases} -A & \text{per } r < R \\ 0 & \text{per } r \geq R \end{cases}$$

Determinare per quali valori di A ed R esiste uno stato legato con $\ell = 0$. Se non esistono stati legati con $\ell = 0$, ne possono esistere con $\ell > 0$?

Esercizio 7. Si consideri un oscillatore armonico isotropo in dimensione due. Determinare lo spettro, le relative autofunzioni, e la degenerazione dello spettro.

Esercizio 8. Si consideri un oscillatore armonico isotropo in dimensione tre. Determinare lo spettro, le relative autofunzioni, e la degenerazione dello spettro.

Esercizio 9*. Si consideri una particella in un potenziale centrale $V(r)$. Assumendo che esista almeno uno stato legato, qual è ℓ per lo stato fondamentale?

Esercizio 10*. Si consideri una particella di massa m in due dimensioni, con coordinate polari (r, θ).

1. Determinare se $p_r = -i\hbar\partial_r$ è hermitiano;

2. determinare la rappresentazione di Schroedinger di p_r^+ e di $p_r^+ p_r$;

3. Usando la rappresentazione di Schroedinger, determinare se l'identità

$$\frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} \;=\; \frac{1}{2m}\, p_r^+\, p_r \;+\; \frac{L_z^2}{2mr^2}$$

è soddisfatta.

4. Mostrare che se l aparticella si trova in un potenziale centrale $V = V(r)$, l'equazione di Schroedinger ammette soluzioni fattorizzate

$$\psi(r,\theta) \;=\; R(r)\; \Phi(\theta)\ .$$

5. Scrivere l'equazione pere la funzione $\Phi(\theta)$ e trovarne le soluzioni.

6. Scrivere l'equazione per $R(r)$; determinare s tale che definendo $R(r) = r^{-s}u(r)$, l'equazione per $u(r)$ risulti essere una equazione di Schroedinger uno-dimensionale.

6 Spin

Esercizio 1. Si consideri una particella di spin 1/2 nello stato di spin

$$|s\rangle \; = \; \alpha\,|+\rangle \; + \; \beta\,|-\rangle \; ,$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

1. Calcolare i valori medi $\langle\sigma_i\rangle_s$ e mostrare che $\langle\vec{\sigma}\rangle_s$ è un vettore unitario;
2. Mostrare che $|s\rangle$ è un autostato (con autovalore $+1$) di una opportuna componente $\sigma_n := \vec{\sigma}\cdot\vec{n}$, e determinare $\vec{n}$.

Esercizio 2. Nel quadro dell'esercizio 1, mostrare che il valor medio sullo stato $|s\rangle$ di $\vec{\sigma}\cdot\vec{m}$, per $\vec{m}$ un arbitrario vettore unitario, è dato da $\vec{n}\cdot\vec{m}$.

Esercizio 3. Nel quadro dell'esercizio 1, scrivere l'operatore di proiezione P_+ (sullo stato $|+\rangle$) e l'operatore di proiezione P_n (sullo stato $|s\rangle$) in termini delle matrici σ_i.

Esercizio 4. Una particella di spin 1/2 è immersa in un campo magnetico costante (non sono presenti altre forze) e si trova al tempo $t_0 = 0$ nello stato $|s\rangle$; descriverne lo stato al tempo $t > 0$.

Esercizio 5. Discutere se la possibilità di scrivere ogni stato di spin come autostato di una opportuna componente $\sigma_n := \vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ (vedi l'esercizio 1) valida per spin 1/2 è presente anche nel caso di spin 1.

7 Campo magnetico

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e carica $-e$ nel campo di un potenziale $V(\vec{r})$, quindi con Hamiltoniana

$$H_0 \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; V(r) \;;$$

se questa è inoltre sottoposta ad un campo magnetico $\mathbf{B}(\vec{r})$, con $\mathbf{A}$ un potenziale vettore per $\mathbf{B} = \mathtt{rot}(\mathbf{A})$, come noto, la corrispondente Hamiltoniana H è ottenuta da H_0 atrtraverso la *sostituzione minimale*

$$\vec{p} \;\mapsto\; \left(\vec{p} \;+\; \frac{e}{c}\,\vec{A}\right) \;.$$

1. Scrivere esplicitamente H.
2. Dimostrare che due Hamiltoniane $H = H_1$ ed $H = H_2$ ottenute per diverse scelte del potenziale vettore, necessariamente legate dalla *trasformazione di gauge*
$$A_2 \;=\; A_1 \;+\; \nabla\Gamma \;,$$
sono unitariamente equivalenti (cioè esiste un operatore unitario U tale che $H_2 = U H_1 U^{-1}$).
3. Nel quadro di cui sopera, si assuma di conoscere la soluzione $\psi_1(x,t)$ dell'equazioen di Schroedinger dipendente dal tempo per l'Hamiltoniana H_1,
$$i\,\hbar\;\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \;=\; H_1\,\psi_1 \;;$$
trovare allora la soluzione ψ_2 dell'equazione per l'Hamiltoniana H_2.

Esercizio 2. Nel quadro dell'esercizio precedente, definiamo la corrente di probabilità come

$$\mathbf{j}(r,t) \;=\; -i\,\frac{\hbar}{2m}\;\left[\psi^*\left(\nabla + i\frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi \;-\; \psi\left(\nabla - i\frac{e}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi^*\right] \;.$$

1. Mostrare che $\mathbf{j}^* = \mathbf{j}$;
2. mostrare che $\mathbf{j}$ soddisfa l'equazione di continuità
$$\mathtt{div}\mathbf{j} \;+\; \frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; 0 \;.$$
Mostrare che $\mathbf{j}$ è la stessa per potenziali vettori ottenuti uno dall'altro attraverso una trasformazione di gauge.

Esercizio 3. Si consideri un elettrone in un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse z.

1. Si mostri che ipotenziali (vettore)

$$A_1 = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = \frac{B}{2}\begin{pmatrix} -y - a_2 \\ x + a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_3 = B\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

   sono equivalenti (ottenuti uno dall'altro attraverso una trasformazione di gauge).

2. Mostrare che in tutti e tre i casi la coordinata z è separabile.

Esercizio 4. Si consideri una particella di massa m, carica $-e$, spin 1/2 e momento magnetico $\vec{\mu} = -g(e/2mc)\vec{s}$, dove $\vec{s} = (1/2)\hbar\vec{\sigma}$; la particella si trova in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ (diretto lungo l'asse z). Calcolare la velocità angolare della precessione dello spin intorno all'asse z.

Esercizio 5. Nel quadro descritto nell'esercizio precedente e scrivendo $v = \dot{q}$, mostrare che per $g = 2$ l'operatore

$$\eta \ := \ \vec{\sigma} \cdot \vec{v}$$

(elicità) è una costante del moto, cioè $[H, \eta] = 0$.

8 Teoria delle perturbazioni

Esercizio 1. Calcolare le autofunzioni e gli autovalori (al primo ordine in ε) per la Hamiltoniana uno-dimensionale

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, x^2 \;+\; \varepsilon\, W(x)$$

per $W(x) = x^3/3$.

Esercizio 2. Come l'esercizio 1 per $W(x) = x^4/4$.

Esercizio 3. Come l'esercizio 1 per $W(x) = (xp + px)$.

Esercizio 4. Come l'esercizio 1 per $W(x) = (x^2p^2 + p^2x^2)$.

Esercizio 5. Come l'esercizio 1 per una forza costante,

$$W(x) \;=\; -\,F\,x \;.$$

Esercizio 6. Calcolare le autofunzioni e gli autovalori (al primo ordine in ε) per la Hamiltoniana uno-dimensionale

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; \frac{1}{2}\, m\, (\omega_0 + \varepsilon\omega_1)^2\, x^2 \;.$$

Esercizio 7. Calcolare le autofunzioni e gli autovalori (al primo ordine in ε) per la Hamiltoniana uno-dimensionale

$$H \;=\; \frac{p^2}{2m} \;+\; \frac{1}{2}\, m\, \omega_0^2\, x^2 \;+\; \varepsilon\, m\, \omega_1\, x^2 \;.$$

Esercizio 8. Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi sul segmento $[-L, L]$ e soggetta al potenziale

$$V(x) \;=\; \varepsilon\, A\, \delta(x)$$

con A una costante reale positiva e $0 < \varepsilon \ll 1$. Si determinino i livelli energetici e le autofunzioni al primo ordine in ε limitatamente allo stato fondamentale ed al primo livello eccitato.

Esercizio 9. Si consideri una particella di massa m vincolata a muoversi sul segmento $[-L, L]$ e soggetta al potenziale

$$V(x) \;=\; -\,\varepsilon\, A\, \delta(x)$$

con A una costante reale positiva e $0 < \varepsilon \ll 1$.

1. Si determinino i livelli energetici e le autofunzioni al primo ordine in ε limitatamente allo stato fondamentale ed al primo livello eccitato.

2. Si discuta se esiste un valore di ε per cui i due livelli sono degeneri, e se questo risultato è accettabile.

3. Determinare esattamente le energie $E_0(\varepsilon)$ ed $E_1(\varepsilon)$, e confrontare il risultato con quello ottenuto perturbativamente.

Esercizio 10*. Sia $H(\lambda)$ una Hamiltoniana dipendente (con dipendenza almeno C^1) dal parametro reale λ, con $H_0 = H(\lambda_0)$. Siano $E_n(\lambda)$ e $\psi_n(\lambda)$ un autovalore (non degenere) e la corrispondente autofunzione normalizzata di $H(\lambda)$, al variare di λ in un intorno di λ_0. Mostrare che

$$\left[\frac{dE_n(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0} = \langle E_n(\lambda_0)| \left(\frac{dH(\lambda)}{d\lambda}\right) |E_n(\lambda_0)\rangle \ .$$

Formule utili

- Relazioni di commutazione canoniche

$$[q_i, q_j] = 0,\ [p_i, p_j] = 0;\ [q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}\ .$$

- Equazione di Schroedinger

$$H\ \psi\ =\ \lambda\ \psi$$

- Equazione di Schroedinger dipendente dal tempo

$$i\,\hbar\partial_t\psi\ =\ H\ \psi$$

- Operatori di salita e discesa per l'oscillatore armonico

$$\eta^+\ =\ \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\ (p + im\omega q)\ ;\ \ \eta\ =\ \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\ (p - im\omega q)\ .$$

$$p\ =\ \sqrt{\frac{m\,\omega\,\hbar}{2}}\ \left(\eta^+\ +\ \eta\right)\ ;\ \ q\ =\ -\,i\,\sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\ \left(\eta^+\ -\ \eta\right)\ .$$

$$\eta^+\ \eta\ =\ \frac{1}{\hbar\omega}\,H\ -\ \frac{1}{2}\ ;\ \ \eta\ \eta^+\ =\ \frac{1}{\hbar\omega}\,H\ +\ \frac{1}{2}\ .$$

$$[\eta, \eta^+]\ =\ 1\ ,\ \ \{\eta, \eta^+\}\ =\ \frac{2}{\hbar\omega}\,H\ ;$$

$$[H, \eta] = -\hbar\omega\eta,\ [H, \eta^+] = \hbar\omega\eta^+\ .$$

$$|n\rangle\ =\ \frac{1}{\sqrt{n!}}\ (\eta^+)^n\ |0\rangle\ .$$

$$\eta^+\,|k\rangle\ =\ \sqrt{k+1}\,|k+1\rangle\ ,\quad \eta\,|k+1\rangle\ =\ \sqrt{k+1}\,|k\rangle\ .$$

- Matrici di Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$