

Il momento angolare e l'atomo di Idrogeno

Corso di Fisica Matematica 3, a.a. 2017-2018
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

10/4/2018

Il testo (di L. Picasso) che stiamo seguendo discute in dettaglio il momento angolare, ma non lo applica allo studio dell'atomo di Idrogeno. Questa breve dispensa cerca di colmare questa lacuna – limitatamente agli aspetti più semplici.

Iniziamo richiamando dei materiali che sono contenuti nel testo, per fissare la notazione e rendere la dispensa leggibile di per sé.¹

1 Momento angolare

Classicamente, il momento angolare $\vec{L} = \vec{q} \wedge \vec{p}$ è un vettore le cui componenti cartesiane² L_i ($i = 1, 2, 3$) sono

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k , \quad (1)$$

dove è implicita la somma sugli indici ripetuti ed ϵ è il tensore completamente antisimmetrico su tre indici; i corrispondenti operatori in rappresentazione di Schroedinger sono naturalmente

$$L_i = -i\hbar \epsilon_{ijk} x_j \partial_k .$$

E' facile controllare dalla (1) che le componenti (cartesiane) del momento angolare sono operatori hermitiani,

$$L_i^+ = L_i . \quad (2)$$

Segue da un calcolo esplicito³ che

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k . \quad (3)$$

¹Notiamo che Picasso indica il momento angolare “generico” con M , ed in seguito il momento angolare “orbitale” con L , mentre noi useremo solo il simbolo L ; questo non dovrebbe causare confusione.

²Confido che non si crei confusione tra i come unità immaginaria ed i come indice vettoriale!

³Riportato in dettaglio nella dispensa dedicata agli “Assiomi ed aspetti fondamentali della Meccanica Quantistica”.

dunque le diverse componenti del momento angolare *non* sono osservabili compatibili, ed anzi data una componente nessuna combinazione lineare delle altre è compatibile con questa.

Notiamo anche che le diverse componenti *anticommutano*,

$$L_i L_j + L_j L_i = 0 \quad (i \neq j) ;$$

lasciamo la dimostrazione di questo fatto allo studente.

Sempre da un calcolo esplicito segue facilmente che l'operatore

$$\mathbf{L}^2 := L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 , \quad (4)$$

che è ovviamente hermitiano ed anzi una osservabile, commuta con ognuno degli L_i ,

$$[\mathbf{L}^2, L_i] = 0 . \quad (5)$$

Il modo più semplice di vederlo è operare concretamente con una delle componenti di L , diciamo come al solito L_3 . Allora

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}^2, L_3] &= [L_1^2, L_3] + [L_2^2, L_3] + [L_3^2, L_3] \\ &= L_1 [L_1, L_3] + [L_1, L_3] L_1 + L_2 [L_2, L_3] + [L_2, L_3] L_2 \\ &= i \hbar (-L_1 L_2 - L_2 L_1 + L_2 L_1 + L_1 L_2) = 0 . \end{aligned}$$

Naturalmente lo stesso vale per ogni altra componente (o loro combinazione lineare) L_i .

Scegliamo di focalizzare la nostra attenzione sul momento angolare in una direzione data (tradizionalmente è la direzione dell'asse z), diciamo L_3 . Allora L_3 ed \mathbf{L}^2 sono *osservabili compatibili* e quindi esiste una base dello spazio di Hilbert fatta di *autofunzioni comuni*, che indicheremo con $\psi_{\mu, m} = |\mu, m\rangle$, dove

$$\mathbf{L}^2 \psi_{\mu m} = (\mu^2 \hbar^2) \psi_{\mu, m} ; \quad L_3 \psi_{\mu, m} = (m \hbar) \psi_{\mu m} . \quad (6)$$

Si noti che scegliere di scrivere gli autovalori in questo modo non ha nessuna precondizione per quanto riguarda esprimere la loro scala in termini di \hbar , mentre avere μ^2 implica che si tratti di autovalori positivi. Questo però segue immediatamente dalla forma di \mathbf{L}^2 e dal fatto che $L_i^+ = L_i$. Più in dettaglio, è evidente che per qualsiasi stato ϕ si ha

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{L}^2 \rangle_\phi &= \langle \phi | \mathbf{L}^2 | \phi \rangle = (\langle \phi | L_1^2 | \phi \rangle + \langle \phi | L_2^2 | \phi \rangle + \langle \phi | L_3^2 | \phi \rangle) \\ &= (\langle L_1 \phi | L_1 \phi \rangle + \langle L_2 \phi | L_2 \phi \rangle + \langle L_3 \phi | L_3 \phi \rangle) \geq 0 , \end{aligned}$$

e quindi tutti gli autovalori sono sicuramente non negativi.

Introduciamo ora gli operatori

$$L_\pm := L_1 \pm i L_2 ; \quad (7)$$

è evidente che

$$(L_\pm)^+ = L_\mp .$$

Inoltre, un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned}
[L_3, L_\pm] &= [L_3, L_1 \pm iL_2] = [L_3, L_1] \pm i [L_3, L_2] \\
&= i\hbar L_2 \mp i(i\hbar) L_1 \\
&= \pm\hbar L_1 + i\hbar L_2 \\
&= \pm\hbar (L_1 \pm iL_2) ;
\end{aligned}$$

vale a dire, in conclusione,

$$[L_3, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm . \quad (8)$$

Ne segue che: se ψ è autofunzione di L_3 con autovalore $\lambda = m\hbar$, allora $\phi_\pm := L_\pm\psi$ (se non è nulla) è autofunzione di L_3 con autovalore $\widehat{\lambda} = (m \pm 1)\hbar$. Infatti,

$$\begin{aligned}
L_3\phi_\pm &= L_3 L_\pm\psi = L_\pm L_3\psi + [L_3, L_\pm] \psi \\
&= L_\pm(\lambda\psi) \pm \hbar L_\pm\psi \\
&= (\lambda \pm \hbar) L_\pm\psi = (\lambda \pm \hbar) \phi_\pm .
\end{aligned}$$

Dunque gli operatori L_\pm sono operatori di salita e discesa⁴ per le autofunzioni di L_3 .

D'altra parte, se \mathbf{L}^2 ha autovalore $\mu^2\hbar^2$ su un dato stato ψ , l'autovalore $m\hbar$ di L_3 sullo stesso stato ψ non può assumere qualsiasi valore di m .

Infatti, se $L_3\psi = m\hbar\psi$ evidentemente si ha

$$L_3^2\psi = m^2\hbar^2\psi ;$$

d'altra parte,

$$L_3^2 = \mathbf{L}^2 - L_1^2 - L_2^2 .$$

E' chiaro che, in conseguenza di $L_i^+ = L_i$, dato un generico stato ϕ si ha

$$\langle\phi|L_i^2|\phi\rangle = \langle\phi|L_i|L_i|\phi\rangle \geq 0 .$$

Quindi in particolare $\langle\psi|(L_1^2 + L_2^2)|\psi\rangle \geq 0$, e dalla relazione precedente segue che

$$m^2 \leq \mu^2 .$$

Ne concludiamo che le sequenze di autofunzioni devono arrestarsi (verso il basso) per $m = m_-$ e (verso l'alto) per $m = m_+$, con $|m_\pm| \leq |\mu|$; ed ovviamente con $m_+ \geq m_-$.

In altre parole abbiamo, per determinati valori di $m = m_\pm$,

$$L_+|\mu, m_+\rangle = 0 ; \quad L_-|\mu, m_-\rangle = 0 . \quad (9)$$

⁴Come gli operatori η^+ ed η che abbiamo incontrato discutendo l'oscillatore armonico; si noti che, come anche in quel caso, in generale $L_\pm\psi_{\mu,m} \neq \psi_{\mu,m\pm 1}$, in quanto i due vettori differiscono per la normalizzazione.

Queste relazioni (ricordando ancora una volta che $L_{\pm}^{\dagger} = L_{\mp}$) implicano che si abbia

$$\begin{aligned}\langle \mu, m_- | L_-^{\dagger} | L_- | \mu, m_- \rangle &= \langle \mu, m_- | L_+ L_- | \mu, m_- \rangle = 0 ; ; \\ \langle \mu, m_+ | L_+^{\dagger} | L_+ | \mu, m_+ \rangle &= \langle \mu, m_+ | L_- L_+ | \mu, m_+ \rangle = 0 .\end{aligned}$$

Un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned}L_- L_+ &= (L_1 - iL_2) (L_1 + iL_2) \\ &= L_1^2 + L_2^2 + i [L_1, L_2] \\ &= L_1^2 + L_2^2 - \hbar L_3 \\ &= \mathbf{L}^2 - L_3^2 - \hbar L_3 ; \\ L_+ L_- &= (L_1 + iL_2) (L_1 - iL_2) \\ &= L_1^2 + L_2^2 + i [L_2, L_1] \\ &= L_1^2 + L_2^2 + \hbar L_3 \\ &= \mathbf{L}^2 - L_3^2 + \hbar L_3 .\end{aligned}$$

Applicando ora questi operatori su $|\mu, m_{\pm}\rangle$, e ricordando che questi sono autostati di \mathbf{L}^2 e di L_3 , otteniamo immediatamente

$$\begin{aligned}\langle \mu, m_- | L_-^{\dagger} | L_- | \mu, m_- \rangle &= \langle \mu, m_- | L_+ L_- | \mu, m_- \rangle \\ &= (\mu^2 - m_-^2 + m_-) \hbar^2 \langle \mu, m_- | \mu, m_- \rangle \\ &= (\mu^2 - m_-^2 + m_-) \hbar^2 ; \\ \langle \mu, m_+ | L_+^{\dagger} | L_+ | \mu, m_+ \rangle &= \langle \mu, m_+ | L_- L_+ | \mu, m_+ \rangle \\ &= (\mu^2 - m_+^2 - m_+) \hbar^2 \langle \mu, m_+ | \mu, m_+ \rangle \\ &= (\mu^2 - m_+^2 - m_+) \hbar^2 .\end{aligned}$$

In altre parole, deve essere

$$\begin{aligned}\mu^2 &= m_+ (m_+ + 1) , \\ \mu^2 &= m_- (m_- - 1) .\end{aligned}\tag{10}$$

Queste relazioni implicano, naturalmente,

$$m_+ (m_+ + 1) = m_- (m_- - 1) ,$$

che puo' essere soddisfatta per $m_- = m_+ + 1$ (che non è accettabile, dato che deve essere $m_- \leq m_+$) o per

$$m_- = -m_+ .\tag{11}$$

D'altra parte, perché la catena si interrompa sia “in basso” che “in alto”, deve essere $m_+ - m_- \in \mathbf{N}$. Ne concludiamo che $m_+ - m_- = 2\ell$ è un intero, e quindi $\ell \geq 0$ è un intero o un semidispari,

$$\ell = \frac{n}{2} ;\tag{12}$$

inoltre m assume tutti i valori

$$m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell \quad (13)$$

mentre μ è identificato da

$$\mu^2 = \ell(\ell + 1). \quad (14)$$

2 Rappresentazione di Schroedinger

Vogliamo ora lavorare non più in astratto, ma nella rappresentazione di Schroedinger, quindi con $q^i = x^i$, $p_i = -i\hbar(\partial/\partial x^i)$.

Trattando problemi a simmetria sferica, sarà conveniente usare coordinate sferiche, cioè effettuare il cambio di variabili

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

In queste coordinate, otteniamo facilmente che

$$L_3 = -i\hbar \partial_\phi. \quad (16)$$

Dunque l'equazione agli autovalori

$$L_3 \psi_m = -i\hbar \partial_\phi \psi_m = (m\hbar) \psi_m$$

fornisce immediatamente

$$\psi_m(r, \theta, \phi) = f(r, \theta) \exp[im\phi]. \quad (17)$$

Ora però stiamo parlando di momento angolare *orbitale*, e la funzione d'onda $\psi(r, \theta, \phi)$ deve corrispondere ad una funzione d'onda $\Psi(x, y, z)$ nello spazio cartesiano.

La condizione perchè questa sia ben definita sullo spazio cartesiano, cioè sia una funzione ad un valore⁵, è di avere $\exp[im(2\pi)] = 1$, quindi concludiamo che *nel caso del momento angolare orbitale m deve essere un intero.*

Questo corrisponde al caso di $\ell \in \mathbf{N}$ (e naturalmente anche $\mu^2 = \ell(\ell + 1) \in \mathbf{N}$).

L'espressione di \mathbf{L}^2 in coordinate sferiche⁶ è

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (18)$$

⁵Quando si considerano problemi con spin la situazione può essere diversa, ed ha senso considerare funzioni d'onda "a due valori" (in realtà avremo una componente spinoriale; lo studente può consultare un testo di Meccanica Quantistica per dare senso a questa affermazione.)

⁶Ottenuta ricorrendo alla definizione di L_i , e quindi a quella di \mathbf{L}^2 , nella rappresentazione di Schroedinger e quindi con le p_i come operatori differenziali, e poi passando a coordinate sferiche. Lo studente è invitato ad effettuare il calcolo.

Le soluzioni del problema

$$\begin{cases} \mathbf{L}^2 \psi_{\ell m} = \ell(\ell+1) \hbar^2 \psi_{\ell m} \\ L_3 \psi_{\ell m} = m \hbar \psi_{\ell m} \end{cases} \quad (19)$$

sono della forma

$$\psi_{\ell m}(r, \theta, \phi) = F(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi),$$

dove le funzioni $Y_{\ell m}$ sono certe funzioni speciali, note come *armoniche sferiche*.

Riportiamo a titolo di informazione l'espressione esplicita delle armoniche sferiche (normalizzate) per $\ell = 0, 1$:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \sqrt{1/4\pi}; \\ Y_{11} &= \sqrt{3/8\pi} \sin \theta e^{i\phi}, \\ Y_{10} &= \sqrt{3/4\pi} \cos \theta, \\ Y_{1-1} &= \sqrt{3/8\pi} \sin \theta e^{-i\phi}. \end{aligned}$$

Tornando alle coordinate cartesiane, abbiamo

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \sqrt{1/4\pi}; \\ Y_{11} &= (x + iy)/(\sqrt{2}r), \\ Y_{10} &= z/r, \\ Y_{1-1} &= (x - iy)/(\sqrt{2}r). \end{aligned}$$

3 Moto in un campo centrale

Finora abbiamo discusso *solo* gli operatori del momento angolare, vale a dire che non abbiamo considerato l'Hamiltoniana. Per il moto di una particella di massa M in un potenziale centrale, questa sarà della forma

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + V(r), \quad (20)$$

dove naturalmente

$$r = \sqrt{\mathbf{x}^2}.$$

Segue da un calcolo esplicito⁷ che (oltre ad avere $[\mathbf{L}^2, L_3] = 0$, come visto in precedenza) si ha

$$[H, L_3] = 0 = [H, \mathbf{L}^2]; \quad (21)$$

quindi $\{H, \mathbf{L}^2, L_3\}$ è un sistema di osservabili compatibili, e ne indicheremo le autofunzioni comuni come $|E, \ell, m\rangle$. Queste naturalmente soddisfano

$$\begin{aligned} H |E, \ell, m\rangle &= E |E, \ell, m\rangle, \\ \mathbf{L}^2 |E, \ell, m\rangle &= \ell(\ell+1) \hbar^2 |E, \ell, m\rangle, \\ L_3 |E, \ell, m\rangle &= m \hbar |E, \ell, m\rangle. \end{aligned}$$

⁷Per effettuarlo, è sufficiente ricordare che V è funzione di \mathbf{q}^2 , e controllare che $[\mathbf{L}^2, \mathbf{q}^2] = 0$ e $[L_3, \mathbf{q}^2] = 0$, oltre che naturalmente $[\mathbf{L}^2, \mathbf{p}^2] = 0$ e $[L_3, \mathbf{p}^2] = 0$. Si veda anche poco sotto l'espressione di H in termini degli operatori \mathbf{L}^2 , r e p_r .

Per utilizzare l'invarianza rotazionale di H è conveniente esprimere H stesso in coordinate sferiche; per far ciò dobbiamo esprimere in queste coordinate

$$\mathbf{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 .$$

Risulta che, con

$$p_r = -i\hbar \partial_r ,$$

si ha (lo studente è invitato a controllare l'esattezza di questa formula)

$$\mathbf{p}^2 = \frac{1}{r^2} \mathbf{L}^2 + \frac{1}{r} p_r^2 r ;$$

quindi l'Hamiltoniana si scrive come

$$H = \frac{1}{2Mr^2} \mathbf{L}^2 + \frac{1}{2Mr} p_r^2 r + V(r) . \quad (22)$$

Ricordando ora che (essendo $|E, \ell, m\rangle$ anche autofunzione comune di \mathbf{L}^2 ed L_3) $|E, \ell, m\rangle = F(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, l'equazione agli autovalori

$$H |E, \ell, m\rangle = E |E, \ell, m\rangle$$

si scrive come

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2Mr^2} F(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi) - \frac{\hbar^2}{2Mr} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rF(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)] \\ + V(r) F(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi) = E F(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi) . \end{aligned}$$

E' chiaro che $Y_{\ell m}$ si fattorizza; eliminando questa funzione, nonchè scrivendo

$$F(r) = \frac{1}{r} u(r) , \quad (23)$$

giungiamo a

$$\frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2Mr^2} u(r) - \frac{\hbar^2}{2M} u''(r) + V(r) u(r) = E u(r) . \quad (24)$$

Notiamo che la regolarità di $F(r)$ in $r = 0$ richiede di avere

$$u(0) = 0 ,$$

che è una condizione al contorno per $u(r)$, definita su $r \in [0, \infty)$.

L'equazione (24) a cui siamo giunti è nella forma

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} u(r) + W_0(r) u(r) = E u(r) , \quad (25)$$

cioè nella forma di una equazione di Schroedinger uni-dimensionale, avendo definito il *potenziale efficace*

$$W_0(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2M r^2} , \quad (26)$$

il cui secondo termine rappresenta il *potenziale centrifugo* (in analogia con il caso classico).

Più precisamente abbiamo un problema di Schroedinger unidimensionale

$$-\frac{\hbar^2}{2M}u''(r) + W(r)u(r) = E u(r) \quad (27)$$

avendo definito il potenziale

$$W(r) = \begin{cases} +\infty & \text{per } r \leq 0 \\ W_0(r) & \text{per } r > 0 \end{cases} . \quad (28)$$

Ora possiamo pensare $u(r)$ definita per $r \in \mathbf{R}$: il fatto che $W(r)$ sia infinito per $r \leq 0$ richiede di avere $u(r) = 0$ per $r \leq 0$.

Questo problema è anche equivalente alla ricerca di stati *dispari* (di cui naturalmente “utilizzeremo” solo la parte per $r > 0$) per il problema nel potenziale *pari*

$$Q(r) = W_0(|r|) . \quad (29)$$

La nostra discussione è fin qui valida per *qualsiasi* potenziale centrale.

4 L'atomo di Idrogeno

Il caso dell'atomo di Idrogeno, o più in generale del moto di un elettrone (carica $-e$) nel campo prodotto da un nucleo di carica Ze , è ottenuto specializzando il potenziale a

$$V(r) = -\frac{e^2 Z}{r} . \quad (30)$$

Il potenziale efficace è quindi nel nostro caso

$$W_0(r) = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2M r^2} - \frac{eZ}{r} ; \quad (31)$$

lo studente è invitato a graficare $W_0(r)$ per $\ell = 0$ e per $\ell = 1$ per apprezzare la differenza tra questi due casi.

Osserviamo ora che (per qualsiasi valore di ℓ) si ha

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W_0(r) = 0 ;$$

corrispondentemente, le soluzioni di energia negativa $E < 0$ avranno la forma asintotica per $r \rightarrow \infty$

$$u(r) \simeq c \exp[-kr] , \quad (32)$$

dove l'esponente k è dato da

$$k = \frac{\sqrt{2M|E|}}{\hbar} . \quad (33)$$

Scriviamo quindi

$$u(r) = f(r) e^{-kr} \quad (34)$$

dove $f(r)$ tende ad una costante per $r \rightarrow \infty$.

Sostituendo questo *ansatz* (34) per $u(r)$ nell'equazione di Schroedinger (25) o (27), troviamo che $f(r)$ deve soddisfare l'equazione

$$f''(r) - 2k f'(r) + \left[\frac{2MZ e^2}{\hbar^2 r^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f(r) = 0. \quad (35)$$

Cerchiamo $f(r)$ sotto forma di una serie di potenze

$$f(r) = r^s \sum_{q=0}^{\infty} a_q r^q, \quad (36)$$

dove assumiamo che $a_0 \neq 0$ (cioè la serie inizia effettivamente con il termine di grado s). Notiamo che, essendo $u(r) = f(r)e^{-kr}$, la richiesta di avere $u(0) = 0$ significa che deve essere $s > 0$.

Ora l'equazione (36) per f si riscrive come

$$a_0 \left[s(s-1) - \ell(\ell+1) \right] r^{s-2} + \sum_q [(s+q+1)(s+q) a_{q+1} - 2k(s+q)a_q + (2MZ e^2/\hbar^2)a_q - \ell(\ell+1)a_{q+1}] r^{s+q-1} = 0. \quad (37)$$

Naturalmente questa serie si annulla solo se sono nulli i coefficienti di tutte le potenze di r .

Il termine di grado più basso, r^{s-2} , ha un coefficiente che si annulla per

$$s(s-1) = \ell(\ell+1);$$

questa equazione ha due soluzioni, una delle quali però è $s = -\ell$, che non è accettabile dato che $\ell \geq 0$ e $s > 0$. L'altra soluzione, che è l'unica accettabile, è

$$s = \ell + 1. \quad (38)$$

L'annullarsi dei coefficienti degli altri termini r^{s-2+q} in (37) corrisponde ad una relazione di ricorrenza per i coefficienti a_q , che si scrive esplicitamente come

$$a_{q+1} = \frac{2 [k(\ell+q+1) - MZe^2/\hbar^2]}{(\ell+q+2)(\ell+q+1) - \ell(\ell+1)} a_q. \quad (39)$$

Per $q \rightarrow \infty$ questa diviene

$$a_{q+1} \simeq \frac{2k}{q} a_q$$

che naturalmente implica (per $q \rightarrow \infty$)

$$a_q \simeq \alpha_0 \frac{(2k)^q}{q!}.$$

A sua volta da questa segue che (se $\alpha_0 \neq 0$)

$$f(r) \simeq e^{2kr} .$$

Però un tale comportamento asintotico significherebbe che

$$u(r) = f(r) e^{-kr}$$

sarebbe divergente.

Dunque non è possibile che la serie sia effettivamente una serie: essa deve interrompersi ad un certo punto, cioè per un certo $q = n_0$, e questo è possibile se (e solo se) il numeratore della frazione che interviene nella relazione di ricorrenza (39) si annulla.

Se questo avviene per $q = n_0$, deve essere

$$k (\ell + 1 + n_0) = \frac{M Z e^2}{\hbar^2} ,$$

e questo a sua volta significa che deve essere

$$k = \frac{M Z e^2}{(\ell + 1 + n_0) \hbar^2} .$$

Infine, ricordando che k era già stato determinato, si veda la (33), ed è collegato agli autovalori E dell'energia, questo determina i livelli energetici:

$$E = - \frac{M Z^2 e^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{(\ell + 1 + n_0)^2} = - \frac{M Z^2 e^4}{2 \hbar^2} \frac{1}{N^2} , \quad (40)$$

dove N sono tutti gli interi a partire da $N = \ell + 1$.

Terminiamo con alcune osservazioni.

1. Le frequenze di transizione (cioè le energie tra due diversi livelli dell'atomo di idrogeno) sono quindi proporzionali alle differenze tra i reciproci di due numeri interi. Questa è proprio la struttura trovata nelle *righe spettrali* dell'atomo di Idrogeno, e questa corrispondenza rappresenta uno dei primi successi della Meccanica Quantistica.
2. Notiamo che si può ottenere la stessa energia combinando diverse coppie di numeri ℓ ed n_0 : questo corrisponde allo scegliere $\ell = 0, n_0 = N - 1$, oppure $\ell = 1, n_0 = N - 2$, oppure ... oppure $\ell = N - 1, n_0 = 0$.
3. La soluzione delle equazioni per $f_{N\ell}(r)$ corrispondente all'energia E così determinata corrisponde a delle funzioni speciali dette *polinomi di Laguerre* (a cui bisogna poi aggiungere la parte esponenziale). Le soluzioni più semplici (quelle con $\ell = 0$) sono

$$\begin{aligned} \rho_{10} &= \left(\frac{Z}{a_B} \right)^{3/2} 2 \exp \left[-Z \frac{r}{a_B} \right] , \\ \rho_{20} &= \left(\frac{Z}{2a_B} \right)^{3/2} \left(2 - \frac{r}{a_B} \right) \exp \left[-Z \frac{r}{a_B} \right] , \\ \rho_{30} &= \left(\frac{Z}{2a_B} \right)^{3/2} \frac{Z}{\sqrt{3}} \frac{r}{a_B} \exp \left[-Z \frac{r}{2a_B} \right] ; \end{aligned}$$

qui a_B è la costante (dimensionale) nota come *raggio di Bohr* dell'elettrone,

$$a_B = \frac{\hbar^2}{M e^2} . \quad (41)$$

4. Nella nostra discussione *non* abbiamo considerato lo *spin* dell'elettrone.

Bibliografia

Come già accennato, il testo di Picasso “per matematici” contiene una discussione completa del momento angolare (inclusi alcuni argomenti che qui non abbiamo neanche accennato) ma non la discussione dell'atomo di Idrogeno. Questa è invece fornita dal solito testo di Landau-Lifshits, o anche dalla versione “per fisici” del testo di Picasso.