italian italian

Il principio di minima azione, le equazioni di Eulero-Lagrange, ed il teorema di Noether

Corso di Fisica Matematica 3, a.a. 2018-2019
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

09/05/2019

In questa dispensa[1] ricordiamo come si passa da una Lagrangiana alle equazioni di Eulero-Lagrange associate. Inoltre, discutiamo la (versione elementare della) relazione tra invarianza della Lagrangiana e leggi di conservazione, come determinata dal teorema di E.Noether.

1 Dimensione finita (Meccanica, ODEs)

Consideriamo il caso in cui la Lagrangiana dipende da un numero finito di coordinate q^i e dalle loro derivate $\dot{q}^i$.

Data una Lagrangiana $L(q,\dot{q};t)$, definiamo la *azione* S come

$$S \ = \ \int L(q,\dot{q};t)\, dt \ .$$

Possiamo pensare di fissare gli estremi di integrazione; in questo caso la S è un funzionale della funzione (vettoriale) $q(t)$,

$$S[q(t);t_0,t_1] \ = \ \int_{t_0}^{t_1} L[q(t),\dot{q}(t);t)\, dt \ .$$

Il *principio di minima azione* afferma che la vera traiettoria $\bar{q}(t)$ tra i punti $\bar{q}_0 = \bar{q}(t_0)$ e $\bar{q}_1 = \bar{q}(t_1)$ del sistema è un estremale per $S[q(t)]$. In altre parole, $\bar{q}$ è tale che la variazione dell'integrale di azione al variare (vincolato) della traiettoria mantenendo fissi i punti $\bar{q}_0$ e $\bar{q}_1$ è nulla.

[1]Questa dispensa era stata preparata per il corso di Fisica Matematica 2 (di alcuni anni fa), dedicato come noto alle equazioni (lineari) a derivate parziali della Fisica Matematica. Questo spiega perché alcune sezioni (2, 4 ed in parte 5) siano dedicate ad una discussione nell'ambito della Teoria dei Campi, che a rigore non riguarda il corso di Fisica Matematica 3. D'altra parte si tratta di una estensione (dal caso della Meccanica) molto semplice e che dovrebbe far parte della cultura di base di un matematico; inoltre è già scritta. Ho quindi deciso di lasciare queste sezioni (2 e 4) nella dispensa, e mantenere la discussione della sezione 5 in termini generali (cioè per un numero qualsiasi di variabili indipendenti).

Indichiamo con δq la variazione della traiettoria: in altre parole, se $q(t)$ è la traiettoria imperturbata, quella variata sarà $\widehat{q}(t) = q(t) + \varepsilon \delta q(t)$. La richiesta di non variare i punti iniziale e finale significa

$$\delta q(t_0) \ = \ \delta q(t_1) \ = \ 0 \ . \tag{1}$$

Quanto alle derivate, avremo $d\widehat{q}/dt = \dot{q}(t) + \varepsilon(d\delta q/dt) := \dot{q} + \delta\dot{q}$; sottolineamo che questa definisce implicitamente la notazione

$$(\delta\dot{q})(t) \ = \ \frac{d}{dt} q(t) \ . \tag{2}$$

Dato che gli estremi dell'intervallo di integrazione (t_0, t_1) non cambiano, la variazione di S corrisponderà alla variazione dell'integrando; al primo ordine in ε abbiamo:

$$\delta S \ = \ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \, \delta q^i \ + \ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \, \delta \dot{q}^i \right] \ dt \ ;$$

ricordando la (2) questa si riscrive come

$$\delta S \ = \ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \, \delta q^i \ + \ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \left(\frac{d}{dt} \delta q^i \right) \right] \ dt \ .$$

Effettuando una integrazione per parti, abbiamo

$$\begin{aligned} \delta S \ &= \ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \, \delta q^i \ - \ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i \right] \ dt \ + \ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) \ dt \\ &= \ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \, \delta q^i \ - \ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i \right] \ dt \ + \ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

Ricordiamo ora la (1): questa significa che il termine di bordo si annulla, e restiamo (raccogliendo il fattore comune δq) con

$$\delta S \ = \ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} \ - \ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \ (\delta q^i) \ dt \ .$$

Perché δS si annulli per qualsiasi variazione δq, deve evidentemente annullarsi il termine in parentesi quadre. In altre parole, devono valere le equazioni

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} \ - \ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ = \ 0 \tag{3}$$

che sono dette *equazioni di Eulero-Lagrange* (per la Lagrangiana L).

Esercizio 1. Verificare che per una Lagrangiana $L = K - U$, dove K è l'energia cinetica ed U l'energia potenziale, si ottengono le equazioni di Newton.

Esercizio 2. Verificare che per una Lagrangiana della forma $L = K - U$, dove $K = (1/2) A_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ con A una matrice non-singolare e $U = U(q)$, si ottengono le equazioni

$$\ddot{q}^i \ = \ - A^{-1}_{ij} \ (\partial U / \partial q^j) \ .$$

Esercizio 3*. Determinare qual è la più generale forma della Lagrangiana perché le equazioni di Eulero-Lagrange abbiano la forma di Newton, ossia siano risolte rispetto alle derivate seconde,

$$\ddot{q}^i \ = \ f^i(q, \dot{q}) \ .$$

Esercizio 4*. Come cambiano le equazioni di Eulero-Lagrange sotto diffeomorphismi, ossia se si opera un cambio di variabili $q^i = \varphi^i(x^1, ..., x^n)$ con φ un diffeomorfismo? Qual è il più generale cambio di variabili che lascia invariante la forma delle equazioni di Eulero-Lagrange?

Esercizio 5. Come si scrivono le equazioni di Eulero-Lagrange per una Lagrangiana di secondo ordine, cioè che dipende anche dalle derivate seconde $\ddot{q}^i$? E per una Lagrangiana di ordine n arbitrario (purché finito)? *[Suggerimento: continuare ad integrare per parti.]*

2 Dimensione infinita (teoria dei campi, PDEs)

Consideriamo il caso in cui la Lagrangiana dipende non da funzioni di una sola variabile $q(t)$, ma da funzioni di più variabili, ad esempio $u^a(x, t)$ o più in generale $u^a(x_1, ..., x_n)$.[2]

Naturalmente, la Lagrangiana non dipenderà solo da u^a ma anche dalle sue derivate (parziali) rispetto alle diverse variabili indipendenti. Per concretezza, considereremo qui il caso in cui $u = u(x, t)$, e quindi $L = L(u, u_x, u_t; x, t)$.

L'azione S sarà ora definita come

$$S \ = \ \int L(u, u_x, u_t; x, t) \, dx \, dt \ .$$

Possiamo pensare di fissare il dominio $B \subset R^2$ di integrazione; in questo caso la S è un funzionale delle funzioni $u^a(x, t)$,

$$S[u(x, t); B] \ = \ \int_B L(u, u_x, u_t; x, t) \, dx \ , dt \ .$$

Il *principio di minima azione* afferma che la vera configurazione $\bar{u}(x, t)$ sul dominio B del sistema è un estremale per $S[q(t)]$. In altre parole, $\bar{u}$ è tale che la variazione dell'integrale di azione al variare del campo – vincolato, mantenendo fissi i valori nei punti di ∂B – è nulla.

Indichiamo con δu^a la variazione del campo u^a: in altre parole, se $u^a(x, t)$ è la configurazione imperturbata, quella variata sarà $\widehat{u}^a(x, t) = u^a(t) + \varepsilon \delta u^a(x, t)$. La richiesta di non variare il valore del campo nei punti della frontiera di B significa

$$[(\delta u^a)(x, t)]_{\partial B} \ = \ 0 \ . \tag{4}$$

Quanto alle derivate, avremo $\partial \widehat{u}^a / \partial t = u^a_t + \varepsilon (\partial \delta u^a / \partial t) := u^a_t + \varepsilon \delta u^a_t$ e allo stesso modo $\partial \widehat{u}^a / \partial x = u^a_x + \varepsilon (\partial \delta u^a / \partial x) := u^a_x + \varepsilon \delta u^a_x$; sottolineamo che questa

[2] Come visto per l'equazione delle onde, una tale funzione si può vedere come il limite di una sequenza infinita di funzioni (ad esempio su un reticolo) q^i.

definisce implicitamente la notazione

$$\delta u^a_t \ = \ \frac{\partial}{\partial t} \delta u^a (x,t) \ , \ \ \delta u^a_x \ = \ \frac{\partial}{\partial x} \delta u^a (x,t) \ . \tag{5}$$

Dato che il dominio di integrazione B non cambia, la variazione di S corrisponderà alla variazione dell'integrando:

$$\delta S \ = \ \int_B \left[\frac{\partial L}{\partial u^a} \, \delta u^a \ + \ \frac{\partial L}{\partial u^a_x} \, \delta u^a_x \ + \ \frac{\partial L}{\partial u^a_t} \, \delta u^a_t \right] \ dx \, dt \ ;$$

ricordando le (4) questa si riscrive come

$$\delta S \ = \ \int_B \left[\frac{\partial L}{\partial u^a} \, \delta u^a \ + \ \frac{\partial L}{\partial u^a_x} \, \left(\frac{\partial \delta u^a}{\partial x} \right) \ + \ \frac{\partial L}{\partial u^a_t} \, \left(\frac{\partial \delta u^a}{\partial t} \right) \right] \ dx \, dt \ .$$

Effettuando una integrazione per parti in x ed una in t, abbiamo

$$\begin{aligned} \delta S \ &= \ \int_B \left[\frac{\partial L}{\partial u^a} \, \delta u^a \ - \ \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u^a_t} \right) \delta u^a \ - \ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u^a_x} \right) \right] \ dx \, dt \\ & \quad + \ \int \left(\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u^a_t} \, \delta u^a \right) \, dt \right) dx \ + \ \int \left(\int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u^a_x} \, \delta u^a \right) \, dx \right) dt \\ &= \ \int_B \left[\frac{\partial L}{\partial u^a} \, \delta u^a \ - \ \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u^a_t} \right) \delta u^a \ - \ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u^a_x} \right) \right] \ dx \, dt \\ & \quad + \ \int_{\partial B_x(t)} \left(\frac{\partial L}{\partial u^a_t} \, \delta u^a \right) dx \ + \ \int_{\partial B_t(x)} \left(\frac{\partial L}{\partial u^a_x} \, \delta u^a \right) dt \ . \end{aligned}$$

Qui $B_x(t)$ è l'intersezione di ∂B con la retta $t = \mathit{cost}$, ed allo stesso modo $\partial B_x(t)$ è l'intersezione di ∂B con la retta $x = \mathit{cost}$. Dato che $\delta u^a = 0$ per qualsiasi punto di ∂B, i termini di bordo si cancellano, ed abbiamo infine

$$\delta S \ = \ \int_B \left[\frac{\partial L}{\partial u^a} \ - \ \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u^a_t} \right) \ - \ \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u^a_x} \right) \right] \, \delta u^a \ dx \, dt$$

Nuovamente, affinché δS si annulli per qualsiasi variazione δq, deve evidentemente annullarsi il termine in parentesi quadre. In altre parole, devono valere le equazioni

$$\frac{\partial L}{\partial u^a} \ - \ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial u^a_t} \ - \ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u^a_x} \ = \ 0 \tag{6}$$

che sono le *equazioni di Eulero-Lagrange* (per la Lagrangiana L).

Sottolineamo che nella (6) le derivate $(\partial / \partial t)$ e $(\partial / \partial x)$ vanno pensate applicate anche su u, u_x, u_t; si tratta così di derivate parziali "totali". A volte si preferisce introdurre, per maggior chiarezza, i simboli

$$\begin{aligned} D_x \ &= \ \frac{\partial}{\partial x} \ + \ u^a_x \, \frac{\partial}{\partial u^a} \ + \ u^a_{xx} \, \frac{\partial}{\partial u^a_x} \ + \ u^a_{xt} \, \frac{\partial}{\partial u^a_t} \ , \\ D_t \ &= \ \frac{\partial}{\partial t} \ + \ u^a_t \, \frac{\partial}{\partial u^a} \ + \ u^a_{xt} \, \frac{\partial}{\partial u^a_t} \ + \ u^a_{tt} \, \frac{\partial}{\partial u^a_t} \ ; \end{aligned}$$

con questi la (6) si riscrive come

$$\frac{\partial L}{\partial u^a} \ - \ D_t \left(\frac{\partial L}{\partial u^a_t} \right) \ - \ D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u^a_x} \right) \ = \ 0 \ . \tag{7}$$

Esercizio 6. Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange per la Lagrangiana $\mathcal{L} = \int L dx$ con $L = [(u_t^2/2) - (1 - \cos u)]$.

Esercizio 7. Come si scrivono le equazioni di Eulero-Lagrange per una Lagrangiana di secondo ordine, cioè che dipende anche dalle derivate seconde $\{u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}\}$? E per una Lagrangiana di ordine n arbitrario (purché finito)?

Esercizio 8. Come si scrivono le equazioni di Eulero-Lagrange se $u = u(x_1, ..., x_m)$ con m arbitrario (purché finito)? E nel caso di una Lagrangiana di ordine n arbitrario?

Esercizio 9*. Consideriamo una corda vibrante in cui ogni punto sia soggetto ad una forza di richiamo $F[u(x,t)]$; questa si può pensare come una catena di masse puntuali legate tra loro da molle ed inoltre soggette ad un potenziale $\Phi(y)$. Determinare la Lagrangiana (continua) e le relative equazioni di Eulero-Lagrange in questo caso. Cercare le soluzioni della forma $u(x,t) = \varphi(x - vt)$, in particolare nel caso $\Phi(x) = \cos(x)$. [Suggerimento: l'unica parte che può presentare difficoltà è l'ultima; è conveniente utilizzare la conservazione dell'energia.]

3 Il teorema di Noether (versione elementare) in Meccanica.

La descrizione in termini di un principio variazionale permette di associare immediatamente delle leggi di conservazione alle trasformazioni che lascino invariato l'integrale d'azione. La corrispondenza tra simmetrie (cioè trasformazioni che lascino invariato l'integrale di azione) e leggi di conservazione è stata studiata da E.Noether; il suo teorema è molto profondo, e ne vedremo qui solo le versioni più elementari.[3]

Descriviamo dapprima questa relazione, come detto nella sua forma più elementare, nel caso della Meccanica.

Supponiamo che nello spazio delle fasi sia definito un campo di vettori

$$X \ = \ \varphi^i(q) \ \frac{\partial}{\partial q^i}$$

(si noti che questo non dipende da, né agisce su, la variabile indipendente t); e che questo lasci invariante la Lagrangiana del sistema.

Sotto l'azione (infinitesima per semplicità) di X, le variabili dipendenti q^i cambieranno secondo la legge

$$q^i \ \to Q^i \ = \ q^i \ + \ \varepsilon \, \varphi^i \ .$$

[3] Per una versione completa, lo studente puo' consultare i testi di Olver o di Kosmann-Schwarzbach.

Naturalmente a questa corrisponde una legge per la variazione delle derivate temporali $\dot{q}^i$, ossia

$$\dot{q}^i \ \to \dot{Q}^i \ = \ \dot{q}^i \ + \ \varepsilon \, \frac{d}{dt} \varphi^i \ .$$

Dunque la variazione di $L = L(q, \dot{q}; t)$ sotto X sarà

$$\delta L \ = \ \varepsilon \left[\varphi^i \, \frac{\partial L}{\partial q^i} \ + \ \left(\frac{d\varphi^i}{dt} \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \ .$$

Per ipotesi, abbiamo $\delta L = 0$, e quindi risulta

$$\varphi^i \, \frac{\partial L}{\partial q^i} \ + \ \left(\frac{d\varphi^i}{dt} \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \ = \ 0 \ . \tag{8}$$

D'altra parte, le equazioni di Eulero-Lagrange (3) ci assicurano che sulle soluzioni si ha

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} \ = \ \frac{d}{dt} \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ . \tag{9}$$

Sostituendo questa nella (8) otteniamo immediatamente

$$\varphi^i \, \frac{d}{dt} \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ + \ \left(\frac{d\varphi^i}{dt} \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \ = \ \frac{d}{dt} \left(\varphi^i \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \ = \ 0 \ , \tag{10}$$

il che mostra che la quantità

$$J \ := \ \varphi^i \, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{11}$$

è conservata lungo le soluzioni, ovvero è una *costante del moto*.

Esercizio 10. Discutere cosa cambia se le φ^i dipendono anche dalla variabile indipendente t.

Esercizio 11. Si consideri la Lagrangiana $L = (1/2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \ - \ V(q_1^2 + q_2^2)$. Mostrare che questa è invariante sotto il gruppo delle rotazioni nel piano (q_1, q_2), e quindi sotto il suo generatore $X = -q_2(\partial/\partial q_1) + q_1(\partial/\partial q_2)$; e determinare la quantità conservata che segue da questa invarianza.

4 Il teorema di Noether (versione elementare) in teoria dei campi.

Descriviamo ora la relazione tra simmetrie e leggi di conservazione, nuovamente nella sua forma più elementare, nell'ambito della teoria dei campi. Procederemo esattamente nello stesso modo che nel caso della Meccanica.

Ora la trasformazione che agisce sulle variabili dipendenti u^a sarà descritta da un campo di vettori

$$X \ = \ \varphi^a(u) \, \frac{\partial}{\partial u^a}$$

(si noti che questo non dipende da, né agisce su, le variabili indipendenti x_i); e supponiamo che questo lasci invariante la Lagrangiana del sistema.

Sotto l'azione (infinitesinma per semplicità) di X, le variabili dipendenti u^a cambieranno secondo la legge

$$u^a \ \to U^a \ = \ u^a \ + \ \varepsilon \, \varphi^a \ .$$

Naturalmente a questa corrisponde una legge per la variazione delle derivate parziali u^a_i, ossia

$$u^a_i \ \to U^a_i \ = \ u^a_i \ + \ \varepsilon \, \frac{d}{dx^i} \varphi^a \ .$$

Dunque la variazione di $L = L(u, u_x; x)$ sotto X sarà

$$\delta L \ = \ \varepsilon \left[\varphi^a \, \frac{\partial L}{\partial u^a} \ + \ \left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \ \frac{\partial L}{\partial u^a_i} \right) \right] \ .$$

Per ipotesi, abbiamo $\delta L = 0$, e quindi risulta

$$\varphi^a \, \frac{\partial L}{\partial u^a} \ + \ \left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \ \frac{\partial L}{\partial u^a_i} \right) \ = \ 0 \ . \qquad (12)$$

D'altra parte, le equazioni di Eulero-Lagrange per la teoria dei campi (6) ci assicurano che sulle soluzioni si ha

$$\frac{\partial L}{\partial u^a} \ = \ \frac{\partial}{\partial x^i} \ \frac{\partial L}{\partial u^a_i} \ ; \qquad (13)$$

ovvero, nella notazione usata per (7) e scrivendo $D_i = D_{x^i}$,

$$\frac{\partial L}{\partial u^a} \ = \ D_i \ \frac{\partial L}{\partial u^a_i} \ . \qquad (14)$$

Sostituendo questa nella (12) otteniamo immediatamente

$$\varphi^a \, D_i \ \frac{\partial L}{\partial u^a_i} \ + \ \left(\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i} \ \frac{\partial L}{\partial u^a_i} \right) \ = \ D_i \left(\varphi^a \ \frac{\partial L}{\partial u^a_i} \right) \ = \ 0 \ . \qquad (15)$$

Ora non abbiamo una quantità conservata, ma piuttosto una *legge di conservazione*, della forma

$$D_i J^i \ = \ 0 \ , \qquad (16)$$

dove il vettore J^i è definito da

$$J^i \ = \ \sum_a \ \varphi^a \ (\partial L / \partial u^a_i) \ . \qquad (17)$$

Esercizio 12. Discutere cosa cambia se le φ^a dipendono anche dalle $x_1, ..., x_n$.

Esercizio 13. Si consideri la Lagrangiana $L = (1/2) \sum_i K_i (u_i + v_i)^2 - V(u^2 + v^2)$. Mostrare che questa è invariante sotto il gruppo delle rotazioni nel piano (u, v), e quindi sotto il suo generatore $X = -v(\partial/\partial u) + u(\partial/\partial v)$; e determinare la legge di conservazione che segue da questa invarianza.

5 Trasformazioni dello spazio-tempo.

Abiamo fin qui considerato trasformazioni delle sole variabili dipendenti; d'altra parte, avviene spesso che la Lagrangiana sia invariante sotto trasformazioni che agiscono anche o solo sulle variabili indipendenti, cioè – per equazioni di carattere fisico – sulle variabili spaziali o temporali.[4]

Avviene che le leggi di conservazione associate a queste trasformazioni siano particolarmente importanti, ed è dunque il caso di discutere, sia pur brevemente, questo caso. Resteremo sempre nell'ambito della versione elementare del teorema di Noether.

Una discussione dettagliata richiederebbe di considerare l'effetto delle trasformazioni sulle *forme differenziali* che vengono integrate[5], e dunque la derivata di Lie di una forma differenziale sotto l'azione di un campo di vettori (in questo caso, il generatore delle trasformazioni che lasceranno invariante la forma); possiamo però procedere in modo leggermente diverso, senza dover far ricorso a questi concetti, che forse non tutti gli studenti hanno incontrato a questo punto del loro percorso di studio.

Per far questo, dobbiamo vedere come una trasformazione delle variabili indipendenti agisce sulle funzioni di queste. Risulta che considerare trasformazioni che agiscano allo stesso tempo sulle variabili indipendenti e su quelle dipendenti non è più complicato che considerare trasformazioni delle sole variabili indipendenti, e dunque tratteremo direttamente il caso generale.

Per comprendere qual è la strategia da usare, consideriamo però dapprima il caso di una sola variabile dipendente $q(t)$ della variabile indipendente t, e la trasformazione $t \to t + \varepsilon$ corrispondente ad una traslazione (infinitesima se $\varepsilon \to 0$) della t. Il punto dello spazio delle fasi allargato (t, q) viene trasformato nel punto

$$(\widetilde{t}, \widetilde{q}) \ = \ (t + \varepsilon, q) \ . \tag{18}$$

Se consideriamo però il grafico della funzione $q = f(t)$, questo viene trasformato nel grafico di una nuova funzione, $\widetilde{q} = \widetilde{f}(\widetilde{t})$. Infatti, sostituendo $q = f(t)$ nella (18), abbiamo

$$\widetilde{q} \ = \ q \ = \ f(t) \ ;$$

ma siccome dobiamo esprimere $\widetilde{q}$ in funzione di $\widetilde{t}$ (e non più di t), è necessario invertire la relazione tra la vecchia e la nuova variabile, il che ovviamente fornisce

$$t \ = \ \widetilde{t} \ - \ \varepsilon \ .$$

Dunque la relazione precedente diviene

$$\widetilde{q} \ = \ f(t - \varepsilon) \ .$$

[4] Ad esempio, molte delle Lagrangiane incontrate in Fisica (e tutte quelle incontrate in questo corso) sono autonome, cioè non dipendono né dalla variabile temporale t né dalle variabili spaziali x. Inoltre molte delle Lagrangiane in dimensione due o tre incontrate in Fisica sono invarianti per rotazione.

[5] Anche nel caso della Meccanica, l'argomento dell'integrale non è la Lagrangiana L, ma la forma differenziale Ldt.

Notiamo ora che se $\varepsilon \to 0$, questa si scrive al primo ordine in ε come

$$\widetilde{q} \ = \ f(\widetilde{t}) \ - \ f'(\widetilde{t})\, \varepsilon \ ;$$

in altre parole, ora la relazione tra la variabile indipendente $\widetilde{t}$ e la variabile dipendente $\widetilde{q}$ è descritta da

$$\widetilde{q} \ = \ \widetilde{f}(\widetilde{t}) \ := \ f(\widetilde{t}) \ - \ \varepsilon\, f'(\widetilde{t}) \ .$$

Notiamo ora che si arriverebbe allo stesso risultato considerando una trasformazione che agisca solo sulla q, ma con una legge di trasformazione che faccia intervenire anche la sua derivata, vale a dire

$$q \ \to \ q \ - \ \varepsilon\, \dot{q} \ .$$

Possiamo procedere allo stesso modo nel caso di un qualsiasi numero di variabili indipendenti x^i e variabili dipendenti u^a. Le trasformazioni saranno

$$\begin{array}{rcl} x^i \to \widetilde{x}^i & = & x^i \ + \ \varepsilon\, \xi^i(x,u) \ , \\ u^a \to \widetilde{u}^a & = & u^a \ + \ \varepsilon\, \varphi^a(x,u) \ . \end{array}$$

Consideriamo il grafico della funzione (vettoriale)

$$u^a \ = \ f^a(x) \ ,$$

cioè il luogo dei punti $\{(x,u) : u = f(x)\}$; sotto questa trasformazione, esso viene mappato nell'insieme

$$\{(\widetilde{x},\widetilde{u})\} \ = \ \{(x + \varepsilon \xi[x,f(x)], f(x) + \varepsilon \varphi[x,f(x)]\} \ ,$$

che vorremmo descrivere come il luogo dei punti $\{(x,u) \ : \ u = \widetilde{f}(x)\}$ per una opportuna funzione $\widetilde{f}$.

Per far ciò dobbiamo esprimere $\widetilde{u}$ in termini non delle x ma delle $\widetilde{x}$. Invertendo la relazione tra vecchie e nuove variabili abbiamo, ad ordine ε,

$$x^i \ = \ \widetilde{x}^i \ - \ \varepsilon\, \xi^i(x,u) \ + \ o(\varepsilon) \ = \ \widetilde{x}^i \ - \ \varepsilon\, \xi^i(\widetilde{x},\widetilde{u}) \ + \ o(\varepsilon) \ .$$

Usando questa relazione, e notando inoltre che

$$\varphi^a(x,u) \ = \ \varphi^a(\widetilde{x},\widetilde{u}) \ + \ O(\varepsilon) \ ,$$

possiamo scrivere (lavorando sempre al primo ordine in ε)

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{u}^a & = & f^a[\widetilde{x} - \varepsilon \xi(\widetilde{x},\widetilde{u})] \ + \ \varepsilon\, \varphi^a(\widetilde{x},\widetilde{u}) \\ & = & f^a(\widetilde{x}) \ + \ \varepsilon \ \left[\varphi^a(\widetilde{x},\widetilde{u}) \ - \ \left(\dfrac{\partial f^a}{\partial x^i} \right) \ \xi^i(\widetilde{x},\widetilde{u}) \right] \\ & = & f^a(\widetilde{x}) \ + \ \varepsilon \ \left[\varphi^a(\widetilde{x}, f[\widetilde{x}]) \ - \ \left(\dfrac{\partial f^a}{\partial x^i} \right) \ \xi^i[\widetilde{x}, f(\widetilde{x})] \right] \\ := & & \widetilde{f}^a(\widetilde{x}) \ = \ f^a(\widetilde{x}) \ + \ \varepsilon \ (\delta f)(\widetilde{x}) \ . \end{array}$$

Dunque, la funzione $u = f^a(x)$ viene trasformata nella funzione $u = \widetilde{f}(x)$ con

$$\begin{aligned} \widetilde{f}^a(x) &= f^a(x) + \varepsilon \left[\varphi^a(x,u) - \left(\frac{\partial u^a}{\partial x^i} \right) \xi^i(x,u) \right] \\ &= f^a(x) + \varepsilon \left[\varphi^a(x,u) - u_i^a \, \xi^i(x,u) \right] . \end{aligned}$$

Qui abbiamo scritto nuovamente u per $f(x)$, per semplicità di notazione[6], ed inoltre $u_i^a \equiv (\partial u^a / \partial x^i)$.

Ora non resta che notare che si arriverebbe alla stessa situazione considerando una trasformazione che agisca *solo* sulle variabili dipendenti u^a, ma che dipenda anche dalle loro derivate; si tratta della trasformazione

$$\begin{aligned} u^a \ \to \ & u^a + \varepsilon \, \Phi^a(x,u,u_x) \ ; \\ & \Phi^a(x,u,u_x) = \varphi^a(x,u) - u_i^a \, \xi^i(x,u) \ . \end{aligned}$$

In questo modo[7] possiamo trattare anche delle trasformazioni che agiscono sulle variabili indipendenti (fisicamente, sullo spazio-tempo) nel quadro già trattato in precedenza. In particolare, possiamo associare a delle trasformazioni che lascino invariante la Lagrangiana delle quantità conservate (per la Meccanica) o delle leggi di conservazione (per la Teoria dei Campi), applicando le stesse formule viste in precedenza.

Osservazione. La discussione di questa sezione può forse apparire un po' misteriosa. Diventa molto più naturale se osserviamo che è naturale vedere lo spazio M delle variabili indipendenti ($x \in B$) e dipendenti ($u \in F$) come un fibrato (M, π, B) di base B e fibra F, quindi localmente isomorfo a $B \times F$. Allora il campo di vettori originario X è un campo di vettori arbitario su M, mentre il suo rappresentante verticale X_V – che in questi termini appare come un campo di vettori "formale" dato che le sue componenti dipendono dalle derivate delle u rispetto alle x – descrive in modo naturale l'azione di X nello spazio $\gamma(M, \pi, B)$ delle *sezioni* del fibrato. In effetti, se agiamo con X_V su una sezione γ, identificata in coordinate locali da

$$\gamma_f = \{ (x,u) \, : \, u = f(x) \} ,$$

allora $\partial f^a / \partial x^i$ è una funzione ben definita (ed associata in modo naturale alla sezione) ed il campo di vettori è quindi anch'esso ben definito.

Esercizio 14. Mostrare che per ogni Lagrangiana $L(q, \dot{q})$ indipendente dal tempo, e dunque invariante sotto le trasformazioni di traslazione temporale, generate dal campo di vettori $(\partial / \partial t)$, si ha la conservazione dell'energia.

[6] E perché è vero, dato che stiamo considerando la trasformazione della funzione $u = f(x)$.

[7] Che può sollevare delle perplessità, ma che è reso rigoroso dall'introduzione dello *spazio dei getti* (jet space); si tratta qui di vedere le equazioni differenziali come oggetti geometrici in uno spazio dotato di una cosiddetta *struttura di contatto*, secondo un approccio dovuto a Cartan ed Ehresman; si vedano ad esempio il testo di Arnold sui "Metodi geometrici" per una introduzione, e quello di Olver citato in Bibliografia per un trattamento più approfondito.

Esercizio 15. Mostrare che per ogni Lagrangiana corrispondente ad un sistema di punti materiali che interagiscono tra loro con forze arbitrarie ma non soggetti a forze esterne, e dunque invariante sotto le trasformazioni di traslazione spaziale (identiche per tutti i punti), si ha la conservazione della quantità di moto.

Esercizio 16. Mostrare che per ogni Lagrangiana corrispondente ad un sistema di punti materiali che interagiscono tra loro con forze arbitrarie e soggetti ad una forza esterna che dipende solo dalla distanza da un punto fisso ("centro"), e dunque invariante sotto le trasformazioni di rotazione intorno al centro, si ha la conservazione del momento della quantità di moto (momento angolare).

6 Trasformazioni dello spazio-tempo e Teorema di Noether.

L'esempio più semplice (ed anche più rilevante, come vedremo tra breve) di trasformazione che agisca anche sulle variabili indipendenti è quello delle traslazioni del tempo. Ci aspettiamo che questa sia una trasformazione che lascia invariante ogni Lagrangiana che non dipenda esplicitamente dal tempo.

Se consideriamo il caso della meccanica – quindi t è la sola variabile indipendente, e le variabili dipendenti sono le q^i – e seguiamo la discussione della sezione precedente, vediamo che ad una trasformazione

$$t \ \to \ t \ - \ \varepsilon \ , \ q^i \ \to \ q^i$$

è associata la trasformazione "verticalizzata"

$$t \to t \ , \ q^i \ \to \ q^i \ + \ \varepsilon \, \dot{q}^i \ .$$

Se però tentiamo di inserire semplicemente $\varphi^i = \dot{q}^i$ nella nostra formula per la quantità conservata associata alla invarianza, otteniamo

$$J \ = \ \varphi^i \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \ = \ p_i \, \dot{q}^i \ ;$$

nel caso di una Lagrangiana naturale, questo corrisponde alla energia cinetica, che come sappiamo in generale *non* è conservata.

In questo abbiamo però implicitamente assunto che la traslazione del tempo sia una trasformazione che lascia invariante la Lagrangiana, e quindi l'integrale di azione. Ma questo non è corretto: infatti sotto

$$q^i \ \to \ q^i \ + \ \varepsilon \, \dot{q}^i \ , \ \ \dot{q}^i \ \to \ \dot{q}^i \ + \ \varepsilon \ddot{q}^i \ , \tag{19}$$

la Lagrangiana si trasforma come

$$\mathcal{L} \ \to \ \mathcal{L} \ + \ \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \dot{q}^i \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \ddot{q}^i \right) \ = \ \mathcal{L} \ + \ \varepsilon \, \frac{d\mathcal{L}}{dt} \ . \tag{20}$$

Quindi in generale una $\mathcal{L}$ che non dipende esplicitamente dal tempo *non* è invariante sotto questa trasformazione!

Ricordiamo ora una osservazione incontrata sicuramente al momento della introduzione delle equazioni di Eulero-Lagrange in qualche corso precedente. Se alla Lagrangiana $\mathcal{L}$ aggiungiamo una funzione che è una derivata totale (rispetto al tempo),

$$\mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt} ,$$

allora le equazioni di Eulero-Lagrange per $\widetilde{L}$ sono le stesse di quelle per $\mathcal{L}$.[8]

Due Lagrangiane L ed $\widetilde{L}$ che differiscono per un termine dF/dt sono dette *equivalenti*, in quanto originano lo stesso moto, ed una Lagrangiana che è una derivata totale (dF/dt) è detta una *Lagrangiana nulla*. (Quindi due Lagrangiane sono equivalenti se differiscono per una Lagrangiana nulla.)

Allora è naturale indebolire la nostra richiesta di invarianza per la Lagrangiana, e considerare non trasformazioni che lascino *esattamente* invariante la Lagrangiana, ma trasformazioni che la lascino invariante *a meno di Lagrangiane nulle*, ovvero che la trasformino in una Lagrangiana equivalente.

In altre parole, considereremo trasformazioni tali che

$$\delta L = \frac{dF}{dt} \tag{21}$$

per qualche funzione $F = F(q,t)$.

In questo caso, ricordando che $L = L(q,\dot{q};t)$, usando $\delta q^i = \varphi^i$, e ponendoci sulle soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, abbiamo

$$\begin{aligned} \delta L \ = \ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}\,\varphi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{d}{dt}\varphi^i\right) = \frac{dF}{dt} , \\ & \left(\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\varphi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{d}{dt}\varphi^i\right) = \frac{dF}{dt} , \\ & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\varphi^i\right) = \frac{dF}{dt} , \end{aligned}$$

e quindi in conclusione

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\varphi^i - F\right) = 0 . \tag{22}$$

In altre parole abbiamo mostrato che se (21) è soddisfatta sotto $q^i \to q^i + \varepsilon\varphi^i$, allora la quantità

$$\widehat{J} = p_i\,\dot{q}^i - F = J - F \tag{23}$$

è una costante del moto.

Naturalmente, per $F = 0$ riotteniamo J, ossia la versione più elementare del teorema di Noether.

[8] Il modo più semplice di dimostrare questo è considerare il principio di minima azione per $S = \int \mathcal{L} dt$ e per $\widetilde{S} = \int \widetilde{L} dt$. Le variazioni di $\delta\widetilde{S}$ per δq che si annulla ai bordi sono uguali a quelle di S; in effetti i due integrali differiscono sempre per un termine costante $F(t_1) - F(t_0)$.

Abbiamo già calcolato che nel caso di interesse (traslazione nel tempo) si ha $\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}$; quindi in questo caso effettivamente $\mathcal{L}$ è invariante a meno di una Lagrangiana nulla, con $F = \mathcal{L}$, e la quantità conservata fornita dal teorema di Noether è

$$\widehat{J} \ = \ p_i \, \dot{q}^i \ - \ \mathcal{L} \ := \ \mathcal{H} \ . \tag{24}$$

Questa quantità è nota come *Hamiltoniana*, e rappresenta l'energia del sistema; quindi il teorema di Noether associa la *conservazione dell'energia* alla invarianza sotto traslazioni temporali. Nel caso di una Lagrangiana naturale $\mathcal{L} = T - U$ abbiamo immediatamente $\mathcal{H} = T + U$.

Esercizio 17. Determinare quali sono le trasformazioni in R^3 corrispondenti al campo vettoriale

$$X \ = \ \frac{\partial}{\partial t} \ + \ \alpha \left(x \, \frac{\partial}{\partial y} \ - \ y \, \frac{\partial}{\partial x} \right) \ .$$

[Suggerimento: si tratta di integrare le equazioni $dt/ds = X(t)$, $dx/ds = X(x)$, $dy/ds = X(y)$, $dz/ds = X(z)$.]

Esercizio 18. Determinare quali Lagrangiane $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ (con $q = (x, y, z) \in R^3$) sono invarianti sotto la trasformazione generata da

$$X \ = \ \frac{\partial}{\partial t} \ + \ \alpha \left(x \, \frac{\partial}{\partial y} \ - \ y \, \frac{\partial}{\partial x} \right) \ .$$

Esercizio 19. Determinare nel caso considerato nell'esercizio precedente qual è la quantità conservata associata a tale invarianza.

Esercizio 20*. Estendere la discussione di questa sezione allo scenario della teoria dei campi, ossia al caso di più variabili indipendenti.

Appendice. Derivazione alternativa della relazione tra invarianza sotto traslazioni temporali e conservazione dell'energia

In questa Appendice vogliamo discutere la relazione tra l'avere una Lagrangiana indipendente dal tempo[9] e conservazione dell'energia *senza* invocare il teorema di Noether. D'altra parte utilizzeremo il nostro metodo per "verticalizzare" una trasformazione generale.

Il nostro punto di partenza sarà ancora l'integrale d'azione

$$S \ = \ \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \, dt \ ;$$

aver considerato la trasformazione "verticalizzata" ci evita di considerare trasformazioni del termine dt e, sopratutto, del dominio di integrazione. Ma abbiamo trascurato il fatto che se abbiamo variazioni non nulle ai bordi (cioè

[9]Nei testi di qualche tempo fa una tale Lagrangiana è anche detta "scleronomica".

$\delta q \neq 0$) pur evolvendo le q secondo le equazioni di Eulero-Lagrange, la variazione dell'azione *non* è nulla.

Sotto una trasformazione generale, infatti, ed assumendo che le equazioni di Eulero-Lagrange siano verificate *ed inoltre che* $\partial \mathcal{L} / \partial t = 0$, otteniamo immediatamente che

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \, dt \ = \ \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \delta q^i \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \delta \dot{q}^i \right] \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \delta q^i \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \frac{d}{dt} \delta q^i \right] \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \delta q^i \ - \ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \, \delta q^i \right] \, dt \ + \ \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \delta q^i \right) \right] \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \delta q^i \ - \ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \, \delta q^i \, dt \ + \ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, (\delta q^i) \right]_{t_0}^{t_1} \ . \end{aligned}$$

Se il moto soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange, il termine in parentesi quadre nell'integrale si annulla identicamente. D'altra parte, ora il termine di bordo *non* si annulla, in quanto non stiamo chiedendo che δq sia nullo ai bordi[10] Quindi,

$$\delta S \ = \ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, (\delta q^i) \right]_{t_0}^{t_1} \ ;$$

se poi ricordiamo che δq^i corrisponde ora a

$$\delta q^i \ = \ \Phi^i \ := \ \varphi^i \ - \ \tau \, \dot{q}^i \ ,$$

e ricordando che $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}^i = p_i$, abbiamo che

$$\delta S \ = \ \left[p_i(t_1) \, \Phi^i(t_1) \ - \ p_i(t_0) \, \Phi^i(t_0) \right] \ . \qquad (25)$$

D'altra parte, è chiaro che per ogni trasformazione delle sole q^i abbiamo

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \, dt \ = \ \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{L} \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \delta q^i \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \delta \dot{q}^i \right) \, dt \ ; \end{aligned}$$

quindi nel caso che ci interessa ora

$$\delta S \ = \ \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \Phi^i \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \frac{d\Phi^i}{dt} \right) \, dt \ . \qquad (26)$$

[10] In altre parole, nella derivazione delle equazioni di Eulero-Lagrange consideriamo solo variazioni che si annullano ai bordi, e ricaviamo che la condizione $\delta S = 0$ è equivalente alle equazioni di Eulero-Lagrange; ora invece abbiamo calcolato la variazione generale dell'azione (formula precedente), e la sua espressione assumendo che le $q^i(t)$ evolvano secondo le equazioni di Eulero-Lagrange (formula seguente).

Possiamo quindi affermare, ponendo a sistema (25) e (26), che

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \Phi^i \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \frac{d\Phi^i}{dt} \right) \ - \ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \Phi^i \right) \right] \ dt \ = \ 0 \ . \tag{27}$$

Nel caso che ci interessa, $\tau = -1$, $\varphi^i = 0$, $\Phi^i = \dot{q}^i$. Quindi, usando ancora l'indipendenza di $\mathcal{L}$ dal tempo,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \Phi^i \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \frac{d\Phi^i}{dt} \right) \ = \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \, \dot{q}^i \ + \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \, \ddot{q}^i \ = \ \frac{d\mathcal{L}}{dt} \ .$$

Questo implica che la (27) si scrive ora come

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left[\mathcal{L} \ - \ p_i \, \dot{q}^i \right] \ dt \ = \ 0 \ ,$$

che naturalmente significa che la quantità

$$\mathcal{H} \ := \ \mathcal{L} \ - \ p_i \, q^i \tag{28}$$

è conservata. Ma questa H non è altro che l'energia del sistema.

Abbiamo quindi dimostrato – senza invocare il teorema di Noether – che l'invarianza di $\mathcal{L}$ sotto traslazioni temporali implica la conservazione dell'energia.

Bibliografia

Il principio variazionale è discusso in una miriade di testi. Segnalo qui quello di Arnold e quello di Landau e Lifshitz dedicati alla Meccanica Classica (ambedue disponibili anche in Italiano nell'edizione, recentemente ristampata, degli Editori Riuniti), ed il testo di Lanczos. Questi testi contengono anche una discussione della versione elementare del teorema di Noether; una discussione abbastanza semplice delle sue applicazioni in Fisica si trova nel testo di Neuenschwander. Una discussione della versione generale del teorema è data da Olver.

- V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 1978
- C. Lanczos, *The variational principles of mechanics*, Dover, 1986 (edizione originale University of Toronto, 1970)
- L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon 1960
- D.E. Neuenschwander, *Emmy Noether's wonderful theorem*, John Hopkins University Press, 2011
- P.J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer, 2000

`G. Gaeta, 09/05/2019`