Problemi in una dimensione.
Spettro continuo (scattering)

Corso di Fisica Matematica 3, a.a. 2018-2019
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

29/5/2019

In una dispensa precedente abbiamo visto che (quando il potenziale non va all'infinito per $|x| \to \infty$) oltre allo spettro discreto l'Hamiltoniana puo' ammettere uno *spettro continuo*. In questa dispensa consideriamo alcuni aspetti di questo problema, ed alcuni sistemi concreti che presentano questo fenomeno.

Considereremo sempre operatori Hamiltoniani corrispondenti al problema del moto in un potenziale,

$$H \ = \ \frac{p^2}{2m} \ + \ V(q) \ .$$

1 Particella libera

Per una particella libera, cioè per $V(x) = 0$, l'equazione di Schroedinger è

$$- \ \frac{\hbar^2}{2m} \ \psi''(x) \ = \ \lambda \ \psi(x) \ ,$$

ovvero

$$\psi''(x) \ = \ - \ k^2 \ \psi(x) \qquad k \ = \ \frac{\sqrt{2m\lambda}}{\hbar} \ . \tag{1}$$

E' chiaro che se fosse $\lambda < 0$ (e quindi k immaginario puro) le soluzioni sarebbero

$$\psi(x) \ = \ c_+ \ e^{kx} \ + \ c_- \ e^{-kx} \ ; \tag{2}$$

queste però divergono per $x \to \pm\infty$ e non sono quindi accettabili (né di norma finita). Inoltre abbiamo visto che λ è sempre maggiore o uguale al minimo del potenziale ("teorema del minimo"), ed in questo caso ciò implica semplicemente $\lambda \geq 0$. Nel seguito assumiamo sempre questa condizione, ed a volte scriviamo anche

$$\lambda \ = \ E$$

per sottolineare che si tratta degli autovalori della Hamiltoniana, cioè (fisicamente) dell'Energia.

Allora la (1) fornisce le soluzioni

$$\psi(x) \;=\; a_+ \, e^{ikx} \;+\; a_- \, e^{-ikx} \;:=\; \psi_+(x) \;+\; \psi_-(x) \; . \tag{3}$$

Purtroppo una tale funzione non è di norma finita[1] e non è quindi normalizzabile.

Possiamo però fornire ugualmente una interpretazione fisica di una tale funzione, grazie al fatto che si tratta di funzioni di norma finita su qualsiasi compatto. In questo caso si dice anche che le funzioni appartengono allo spazio

$$L^2_{\rm loc}(R) \;:=\; \left\{ F : R \to C \;:\; \int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty \text{ per } |b-a| < \infty \right\} \; .$$

Osserviamo anche che $|k\rangle = \exp[\pm ikx]$ rappresenta una autofunzione dell'operatore momento: infatti

$$\widehat{p} \left[e^{\pm ikx} \right] \;=\; -i\hbar \frac{d}{dx} e^{\pm ikx} \;=\; (\pm \hbar \, k) \; e^{ikx} \; .$$

Allora interpretiamo $e^{\pm ikx}$ come il flusso di un fascio di particelle di impulso $|p| = |k|$ che si muove verso destra (se col segno più) o verso sinistra (se col segno meno); in generale consideremo particelle che si muovono verso destra, per semplicità di discussione.

La densità della funzione d'onda,

$$\varrho \;=\; \frac{\int_a^b |\psi(x)|^2 \, dx}{\int_a^b dx} \;=\; |a_+|^2$$

rappresenta la *densità di particelle* nel fascio.

La *densità della corrente di probabilità* è invece pari a

$$\mathcal{P} \;=\; k \; |\psi|^2 \; ;$$

questa deve evidentemente conservarsi, e di questo andrà tenuto conto nelle condizioni di raccordo tra le soluzioni ristrette alle diverse regioni della retta.

Notiamo che ora tutti gli autovalori $\lambda > 0$ sono doppiamente degeneri, come evidente dalla (3).

Sottolineamo che qui le e^{ikx} vanno pensate come distribuzioni; quindi soddisfano, con δ la delta di Dirac.[2],

$$\langle k | m \rangle \;=\; \left(e^{ikx}, e^{imx} \right) \;=\; \delta(k - m) \; .$$

Osservazione. E' istruttivo notare che se consideriamo la particella libera come il limite della situazione studiata nel caso della buca di potenziale infinita di larghezza L (per $L \to \infty$) otteniamo i risultati corretti – anche nel senso della normalizzazione ed ortogonalità delle autofunzioni.

[1] A a meno di assumere $a_+ = a_- = 0$ e quindi $\psi \equiv 0$, il che non è accettabile e non rappresenta uno stato.

[2] In ogni caso, consideremo sempre una sola frequenza k alla volta (quindi non si porranno questioni di prodotto scalare etc.), e penseremo queste funzioni semplicemente come soluzioni dell'equazione di Schroedinger.

2 Gradino di potenziale

Consideriamo ora il cosiddetto gradino di potenziale (o potenziale a gradino), ossia

$$V(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0 \\ A & \text{per } x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

con A una costante positiva finita.

Ovviamente separeremo il problema in due, uno su $x \le 0$ (con funzione d'onda ψ_-) ed uno su $x > 0$ (con funzione d'onda ψ_+); le due equazioni di Schroedinger sono rispettivamente

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \, \psi_-''(x) \ &= \ \lambda \, \psi_-(x) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} \, \psi_+''(x) \ &= \ (\lambda - A) \, \psi_+(x) \end{aligned}$$

che scriviamo anche come

$$\begin{aligned} \psi_-''(x) \ &= \ - \frac{2m\,\lambda}{\hbar^2} \, \psi_-(x) \quad (x \le 0) \\ \psi_+''(x) \ &= \ - \frac{2m\,(\lambda - A)}{\hbar^2} \, \psi_+(x) \quad (x > 0) \ . \end{aligned}$$

Le soluzioni di queste equazioni, in particolare $\psi_+(x)$ dipendono dall'avere $\lambda > A$ o $\lambda < A$. La funzione ψ_- è sempre della forma

$$\psi_-(x) \ = \ a_+ \, e^{ikx} \ + \ a_- \, e^{-ikx} \ , \tag{5}$$

avendo scritto

$$k \ = \ \frac{\sqrt{2m\,\lambda}}{\hbar} \ . \tag{6}$$

Qui la parte con frequenza positiva rappresenta, come detto sopra, un fascio di particelle che si muove verso destra, mentre quella con frequenza negativa un fascio che si muove verso sinistra.

Un caso in cui si incontra questa situazione è quando a sinistra si trova un apparato che invia un fascio di particelle verso destra, che viene poi – in parte od in toto – riflesso quando incontra la regione con potenziale maggiore di zero; allora $|a_+|^2$ rappresenta l'intensità del fascio incidente, mentre $|a_-|^2$ quella del fascio riflesso. E' allora naturale normalizzare il problema ponendo $a_+ = 1$; scriveremo anche $a_- = a$.

Inoltre in questo caso non si ha nessun flusso proveniente da $x = +\infty$ che entra nella regione intorno ad $x = 0$ (escludiamo di avere un'altra sorgente di particelle a destra).

Quanto a ψ_+, questa sarà

$$\psi_+(x) \ = \ b_+ \, e^{\mu x} \ + \ b_- \, e^{-\mu x} \ ,$$

dove ora μ, che può essere reale od immaginario, corrisponde a

$$\mu \;=\; \frac{\sqrt{2m\;(A-\lambda)}}{\hbar}\;.$$

Discuteremo separatamente i due casi.

Dobbiamo inoltre discutere le condizioni di raccordo in $x = 0$. Richiederemo

$$\psi_+(0) \;=\; \psi_-(0)\;;\quad \psi'_+(0) \;=\; \psi'_-(0)\;. \tag{7}$$

La conservazione della probabilità richiede una condizione aggiuntiva. Infatti abbiamo visto che il flusso di probabilità è descritto da $k|\psi|^2$. Quindi l'onda incidente ha un flusso

$$\mathcal{P}_i \;=\; k_1\;;$$

quanto all'onda riflessa, il flusso di probabilità corrispondente è

$$\mathcal{P}_r \;=\; k_1\;|a|^2\;.$$

2.1 Caso $\lambda = E > A$: spettro continuo

Per $\lambda > A$, la soluzione in $x > 0$ è anch'essa di tipo oscillatorio,

$$\psi_+(x) \;=\; b_+\,e^{i\mu x} \;+\; b_-\,e^{-i\mu x}\;.$$

Dobbiamo però, per quanto detto sopra (cioè per interpretare il nostro problema in termini di un esperimento in cui un fascio di particelle viene lanciato da $-\infty$ e viaggia verso destra), escludere l'onda che viaggia verso sinistra (quindi $b_- = 0$, e possiamo scrivere $b_+ = b$). Dunque

$$\begin{cases} \psi_-(x) \;=\; e^{ikx} \;+\; a\,e^{-ikx} & (x \leq 0) \\ \psi_+(x) \;=\; b\,e^{i\mu x} & (x > 0) \end{cases} \tag{8}$$

dove

$$k \;=\; \frac{\sqrt{2m\,\lambda}}{\hbar}\;,\quad \mu \;=\; \frac{\sqrt{2m(\lambda - A)}}{\hbar}\;.$$

Ora il termine $b\exp[i\mu x]$ rapprenta un fascio di particelle *trasmesso* attraverso il gradino di potenziale. Il flusso di probabilità corrispondente è

$$\mathcal{P}_t \;=\; \mu\;|b|^2\;.$$

La conservazione del flusso di probabilità[3] richiede di avere

$$\mathcal{P}_i \;=\; \mathcal{P}_r \;+\; \mathcal{P}_t\;.$$

Dalle equazioni viste in precedenza, questo significa richiedere

$$k \;=\; k\,|a|^2 \;+\; \mu\,|b|^2\;,$$

[3] Che prende il posto ed il ruolo della conservazione della massa.

ovvero

$$|a|^2 \ + \ \frac{\mu}{k}\,|b|^2 \ = \ 1 \ .$$

Questa si scrive anche come

$$|a|^2 \ = \ 1 \ - \ \frac{\mu}{k}\,|b|^2 \ . \tag{9}$$

E' utile considerare il *coefficiente di riflessione* R che esprime il rapporto tra flusso riflesso e flusso incidente,

$$R \ = \ \frac{k\,|a_-|^2}{k\,|a_+|^2} \ = \ \frac{k\,|a|^2}{k\,|1|^2} \ = \ |a|^2 \ ;$$

ed il *coefficiente di trasmissione* T che esprime il rapporto tra flusso trasmesso e flusso incidente

$$T \ = \ \frac{\mu\,|b|^2}{k\,|a_+|^2} \ = \ \frac{\mu\,|b|^2}{k\,|1|^2} \ = \ \frac{\mu}{k}\,|b|^2 \ .$$

Naturalmente deve essere

$$R \ + \ T \ = \ 1 \ , \tag{10}$$

e del resto questa è proprio la condizione di conservazione del flusso che abbiamo enunciato poco sopra: la condizione (9) si scrive proprio come (10).

E' istruttivo considerare le condizioni di raccordo (7) che abbiamo enunciato poco sopra, che vanno pensate come equazioni per a e b. Queste forniscono con semplici calcoli (che lo studente è invitato ad effettuare)

$$a \ = \ \frac{k-\mu}{k+\mu} \ , \ \ b \ = \ \frac{2k}{k+\mu} \ ;$$

in termini di m e $\lambda = E$ queste si leggono come

$$a \ = \ \frac{1-\beta}{1+\beta} \ , \ \ b \ = \ \frac{1}{1+\beta} \ ; \ \ \beta \ = \ \sqrt{\frac{\lambda - A}{\lambda}} \ = \ \sqrt{1 - A/\lambda} \ .$$

Notiamo che la soluzione è indipendente dalla massa m delle particelle, e dipende solo dal rapporto $A/\lambda < 1$.

Osservando che $\mu/k = \beta$, il coefficiente di riflessione $R = |a|^2$ ed il coefficiente di trasmissione $T = (\mu/k)|b|^2$ sono dati da

$$R \ = \ \frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2} \ ; \ \ T \ = \ \frac{4\beta}{(1+\beta)^2} \ . \tag{11}$$

Questi soddisfano le condizioni (10).

Notiamo anche che *tutti* i valori di $\lambda > A$ sono permessi.

Esercizio 1. Consideriamo il caso in cui, sempre in presenza del potenziale (4), un fascio di particelle di impulso $-p$ (quindi con energia $\lambda = E > A$) viene inviato da $+\infty$ e viaggia verso sinistra. Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione.

2.2 Caso $\lambda = E < A$

Per $\lambda < A$ la soluzione nella regione $x > 0$ è fornita da

$$\psi_+(x) \ = \ c_+ \, e^{\alpha x} \ + \ c_- \, e^{-\alpha x} \ ,$$

dove

$$\alpha \ = \ \sqrt{2m(A-\lambda)}/\hbar \ .$$

Naturalmente la condizione di norma finita esclude l'esponenziale positivo, cioè impone $c_+ = 0$, ed abbiamo (scrivendo $c_- = c$)

$$\psi_+(x) \ = \ c \ e^{i\alpha x} \ . \tag{12}$$

Le condizioni di raccordo (7) forniscono ora

$$a \ = \ - \ \frac{\alpha + ik}{\alpha - ik} \ , \quad c \ = \ - \ \frac{2ik}{\alpha - ik} \ . \tag{13}$$

Osserviamo che ora

$$R \ = \ |a|^2 \ = \ 1 \ ; \tag{14}$$

in altre parole, tutto il flusso incidente viene riflesso[4]. D'altra parte, si ha una densità di particelle non nulla – ma con andamento esponenzialmente decrescente all'allontanarsi dalla frontiera $x = 0$ – anche nella regione $x > 0$, che è classicamente proibita.

3 Barriera di potenziale

Consideriamo ora il caso in cui il potenziale è maggiore di zero solo in una regione finita; siamo in presenza, nel caso più semplice, di una *barriera di potenziale* (simmetrica[5])

$$V(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ A & \text{per } 0 < x < L \\ 0 & \text{per } x \geq L \end{cases} \tag{15}$$

sempre con A una costante positiva finita. Nel limite $L \to \infty$ otteniamo il gradino di potenziale visto alla sezione precedente.

Considereremo ora equazioni di Schroedinger nelle tre regioni, con soluzioni $\psi_-(x)$, $\psi_0(x)$, $\psi_+(x)$. Anche in questo caso penseremo alla situazione con un fascio di particelle proveniente da sinistra. Naturalmente nelle regioni esterne avremo rispettivamente

$$\psi_-(x) \ = \ e^{ikx} \ + \ a \, e^{-ikx} \ , \tag{16}$$

$$\psi_+(x) \ = \ b \, e^{ikx} \ . \tag{17}$$

Il comportamento nella regione $0 < x < L$ dipende dall'avere $\lambda > A$ o $\lambda < A$.

[4] La soluzione nella regione $x > 0$ *non* rappresenta un flusso di particelle, quindi non avrebbe senso parlare di coefficiente di trasmissione.

[5] Qui "simmetrica" si riferisce al fatto che il potenziale assume lo stesso valore costante (che prendiamo come zero dell'energia) per $x \to \pm\infty$.

3.1 Caso $\lambda = E > A$

Per $\lambda > A$, la soluzione nella regione centrale è del tipo

$$\psi_0 \ = \ c_+ \, e^{i\mu x} \ + \ c_- e^{-i\mu x} \ ,$$

dove come al solito

$$\mu \ = \ \frac{\sqrt{2m(\lambda - A)}}{\hbar} \ .$$

Le condizioni di raccordo

$$\psi_0(0) = \psi_-(0) \ , \quad \psi_0'(0) = \psi_-'(0) \ ; \quad \psi_+(L) = \psi_0(L) \ , \quad \psi_+'(L) = \psi_0'(L)$$

forniscono con calcoli diretti (che come al solito lo studente è invitato a riprodurre)

$$\begin{aligned}
a \ &= \ \frac{(k-\mu)(k+\mu)\sin(L\mu)}{2ik\mu\cos(L\mu) + (k^2+\mu^2)\sin(L\mu)} \ , \\
b \ &= \ -\frac{4e^{-iL(k-\mu)}k\mu}{e^{2iL\mu}(k-\mu)^2 - (k+\mu)^2} \ , \\
c_+ \ &= \ -\frac{2k(k+\mu)}{e^{2iL\mu}(k-\mu)^2 - (k+\mu)^2} \ , \\
c_- \ &= \ \frac{2e^{2iL\mu}k(k-\mu)}{e^{2iL\mu}(k-\mu)^2 - (k+\mu)^2} \ .
\end{aligned}$$

In questo caso il coefficiente di riflessione è

$$R \ = \ |a|^2$$

mentre il coefficiente di trasmissione della barriera è

$$T \ = \ |b|^2 \ .$$

Risulta in particolare

$$R \ = \ \frac{(k^2-\mu^2)^2 \ \sin^2(L\mu)}{4k^2\mu^2\cos^2(L\mu) + \left(k^2+\mu^2\right)^2\sin^2(L\mu)} \ ;$$

è chiaro che questo si annulla per determinati valori di L e μ (quindi E); in particolare quando

$$L \ \mu \ = \ n \ \pi \ .$$

In questi casi si ha *trasmissione totale*.

Il coefficiente di trasmissione risulta essere[6]

$$T \ = \ \frac{8k^2\mu^2}{k^4 + 6\mu^2k^2 + \mu^4 - \left(k^2-\mu^2\right)^2\cos(2L\mu)} \ .$$

[6]Lo studente è invitato a graficare le funzioni R e T (ad esemopio in funzione di $x = \mu/k$) per meglio comprendere l'andamento di queste.

Per $L = \pi/\mu$ (il primo valore di L per cui si ha trasmissione totale per E assegnata) abbiamo[7]

$$R = 0 \ , \quad T = 1 \ ; \quad |c_+|^2 = \frac{(k+\mu)^2}{4\mu^2} \ , \quad |c_-|^2 = \frac{(k-\mu)^2}{4\mu^2} \ .$$

3.2 Caso $\lambda = E < A$.

Per $\lambda < A$ (sempre naturalmente con $\lambda > 0$) la soluzione nella regione centrale è del tipo

$$\psi_0 \ = \ c_+ \, e^{\alpha x} \ + \ c_- \, e^{-\alpha x} \ ,$$

dove ora

$$\alpha \ = \ \frac{\sqrt{2m(A-\lambda)}}{\hbar} \ .$$

Le condizioni di raccordo forniscono ora

$$\begin{aligned} a \ &= \ -\frac{\left(\alpha^2 + k^2\right) \sinh(\alpha L)}{(\alpha - k)(\alpha + k)\sinh(\alpha L) - 2i\alpha k \cosh(\alpha L)}, \\ b \ &= \ -\frac{4i\alpha e^{(\alpha - ik)L} k}{e^{2\alpha L}(\alpha - ik)^2 - (\alpha + ik)^2}, \\ c_+ \ &= \ -\frac{2k(k - i\alpha)}{(\alpha + ik)^2 - e^{2\alpha L}(\alpha - ik)^2}, \\ c_- \ &= \ -\frac{2ie^{2\alpha L}(\alpha - ik)k}{e^{2\alpha L}(\alpha - ik)^2 - (\alpha + ik)^2} \ . \end{aligned}$$

E' evidente che a, e quindi $R = |a|^2$, ora non è mai nullo. D'altra parte il coefficiente di trasmissione è

$$T \ = \ |b|^2 \ = \ -\frac{8\alpha^2 k^2}{\alpha^4 - 6k^2\alpha^2 + k^4 - \left(\alpha^2 + k^2\right)^2 \cosh(2\alpha L)} \ .$$

Esercizio 2. Studiare (graficamente) l'andamento di T al variare di α per k ed L fissati, come anche l'andamento al variare di L per k ed α fissati.

Esercizio 3. Riscrivere T ed R in funzione delle variabili fisiche E ed A.

4 Scattering su una buca di potenziale

Vogliamo ora considerare il caso dello scattering su una buca di potenziale; questo significa studiare le soluzioni $\lambda = E > 0$ nel potenziale

$$V(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ -A & \text{per } 0 < x < L \\ 0 & \text{per } x \geq L \end{cases} \tag{18}$$

[7] Ricordiamo che $|c_+|^2$ e $|c_-|^2$ non rappresentano direttamente il flusso di probabilità nelle onde interne alla barriera: bisogna ancora moltiplicare per il fattore μ.

sempre con A una costante positiva finita.

Avendo supposto $\lambda > E$, è immediato vedere che le soluzioni sono del tipo di quelle studiate nel caso della barriera di potenziale (per $\lambda > A$) pur di cambiare in modo opportuno la definizione di μ, che ora sarà

$$\mu = \frac{\sqrt{2m(\lambda + A)}}{\hbar}$$

Naturalmente questo si ottiene anche direttamente dal caso suddetto con la trasformazione $A \to -A$, che del resto trasforma il potenziale (15) nel potenziale (18).

Esercizio 4. Determinare quando (cioè per quale relazione tra E, A ed L) si ha trasmissione totale in questo caso.

Esercizio 5. Scrivere T ed R in termini delle variabili fisiche p, E, ed A.

5 Buca di potenziale semi-infinita

Infine, consideriamo il potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{per } x \le 0 \\ -A & \text{per } 0 < x < L \\ 0 & \text{per } x \ge L. \end{cases} \tag{19}$$

Indichiamo con $\psi_-(x)$ e $\psi_+(x)$ la funzione d'onda nelle regioni $0 < x < L$ e $x > L$ rispettivamente. In ognuna di queste abbiamo un potenziale costante e l'equazione di Schroedinger si risolve immediatamente; è opportuno distinguere i casi di energia negativa (che dovrà comunque soddisfare $E > -A$) ed energia positiva.

L'equazione nella regione $0 < x < L$ è

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = (E + A)\,\psi \ ,$$

e quindi – ricordando che $E > -A$, quindi $E + A > 0$, la soluzione è sempre del tipo

$$\psi_-(x) = c_+ \sin(\alpha x) + c_- \cos(\alpha x) \ , \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(E+A)}}{\hbar} \ .$$

D'altra parte la condizione $\psi_-(0) = 0$ impone $c_- = 0$, e quindi

$$\psi_-(x) = c \sin(\alpha x) \ .$$

Vediamo ora la regione $x > L$. Qui l'equazione di Schroedinger si scrive

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_+'' = E\,\psi_+ \ ,$$

quindi con soluzione

$$\psi_+(x) = k_+ \exp[\sqrt{-2mE/\hbar^2}x] + k_- \exp[-\sqrt{-2mE/\hbar^2}x] \ .$$

Energia negativa (stati legati)

Per $E < 0$, abbiamo due esponenziali, e solo quello negativo porta a funzioni di norma finita; quindi in questo caso

$$\psi_+ \ = \ k \ \exp[-\sqrt{-2mE/\hbar^2}x] \ := \ k \ e^{-\mu x} \ .$$

Dobbiamo ora imporre le condizioni di raccordo in $x = L$, dunque

$$\psi_+(L) = \psi_-(L) \ , \quad \psi'_+(L) = \psi'_-(L) \ ;$$

queste si scrivono esplicitamente come

$$c \sin(\alpha L) \ = \ k\, e^{-\mu L} \ ; \quad \alpha\, c \cos(\alpha L) \ = \ -\, k\, \mu\, e^{-\mu L} \ .$$

Queste richiedono di avere

$$\tan(\alpha L) \ = \ -\frac{\alpha}{\mu} \ = \ -\ \frac{E+A}{E} \ = \ -\ \left(1 \ - \ \frac{A}{|E|}\right) \ .$$

Scrivendo $E = -|E| = -\eta A$, quindi $0 < \eta < 1$, abbiamo

$$\tan\left[\sqrt{2mA}(L/\hbar)\,\sqrt{1-\eta}\right] \ = \ -\left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \ . \tag{20}$$

I valori ammessi per $E < 0$, quindi per η si ottengono come soluzione della equazione trascendente (20).

Lo studente puo' convincersi, considerando il grafico delle due funzioni che devono essere uguali, che esiste sempre almeno una soluzione di questa equazione, quindi almeno uno stato legato[8]. E' opportuno ricordare che questa situazione è diversa da quella incontrata nel caso della buca di potenziale finita.

Gli stati legati possono essere più di uno, a seconda dei valori delle costanti m, A, L.[9]

Energia positiva (stati di scattering)

Vediamo ora il caso $E > 0$. In questo caso le soluzioni nella regione $x > L$ sono anch'esse di tipo oscillante

$$\psi_+(x) \ = \ k_+ \ \exp[i\gamma x] \ + \ k_- \ \exp[-i\gamma x] \ , \qquad \gamma \ = \ \sqrt{2mE/\hbar^2} \ .$$

Possiamo anche scrivere

$$\psi_+(x) \ = \ a \ \sin(\gamma x) \ + \ b \ \cos(\gamma x) \ .$$

[8]La funzione nel membro di sinistra dell'uguaglianza parte da zero ed ha derivata negativa fino ad avere una singolarità; quella di destra parte da $-\infty$ e sale fino ad incontrare lo zero in $\eta = 1$.

[9]Anche qui lo studente è invitato a graficare le funzioni rilevanti in questa condizione, per verificare quanto affermato.

Le condizioni di raccordo in $x = L$ sono ora

$$c \sin(\alpha L) \ = \ a \sin(\gamma L) + b \cos(\gamma L) \ , \ \ c\,\alpha \cos(\alpha L) \ = \ a\,\gamma \cos(\gamma L) - b\,\gamma \sin(\gamma L) \ .$$

La soluzione di queste equazioni risulta essere

$$\begin{aligned} a &= c \, \frac{\alpha \cos(\alpha L) \cos(\gamma L) \ + \ \gamma \sin^2(\alpha L)}{\gamma \ [\cos^2(\gamma L) \ + \ \sin(\alpha L) \sin(\gamma L)]} \ , \\ b &= c \, \frac{\gamma \sin(\alpha L) \cos(\gamma L) \ - \ \alpha \cos(\alpha L) \sin(\gamma L)}{\gamma \ [\cos^2(\gamma L) \ + \ \sin(\alpha L) \sin(\gamma L)]} \ . \end{aligned}$$

La costante c puo' essere determinata richiedendo ad esempio la normalizzazione della $\psi_+(x)$ su un intervallo finito; o posta semplicemente uguale ad uno.

Questa espressione non è particolarmente interessante; risulta comunque chiaro – ed in modo esplicito – che come sempre *non* si ha nessuna selezione sui valori di $E > 0$ ammessi, ossia siamo in presenza di uno spettro continuo.

G. Gaeta, 29/5/2019