La funzione (generalizzata) delta di Dirac

Corso di Fisica Matematica 2, a.a. 2013-2014
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

25/11/2013

1 La "funzione" delta di Dirac

Nel seguito sarà utile disporre di uno strumento per esprimere la valutazione di una funzione in un punto. Questo è dato dalla "funzione" δ di Dirac (che ha anche altre notevoli proprietà ed utilizzi).

In realtà, questa è una *distribuzione*, ovvero una *funzione generalizzata*[1], e non una funzione in senso proprio – anche se poi si parla correntemente di "funzione δ" per semplicità di linguaggio.

La δ è caratterizzata dalla[2] proprietà seguente: per ogni funzione $f(x)$ continua in $x = x_0$, si ha (per[3] $a < b$)

$$\int_a^b f(x)\ \delta(x - x_0)\ dx \ = \ \begin{cases} f(x_0) & \text{se } x_0 \in (a,b) \\ 0 & \text{se } x_0 \notin (a,b). \end{cases} \tag{1}$$

In particolare, per $f(x) \equiv 1$ abbiamo

$$\int_a^b \delta(x - x_0)\ dx \ = \ \begin{cases} 1 & \text{se } ab < 0 \\ 0 & \text{se } ab > 0. \end{cases}$$

Dunque la $\delta(x)$ è zero in ogni punto diverso da $x = 0$, ed in $x = 0$ è infinita, in modo che

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\ dx \ = \ 1 \quad \forall \varepsilon > 0\ . \tag{2}$$

La δ può essere pensata come il "limite" (in un senso che verrà precisato tra un attimo) di funzioni gaussiane,

$$\delta(x) \ = \ {\lim_{k \to \infty}}' \sqrt{\frac{k}{\pi}}\ e^{-kx^2}\ . \tag{3}$$

[1] Il termine di distribuzione viene favorito dalla scuola Francese, che vede questa teoria come frutto del lavoro di Laurent Schwartz (1940); la scuola russa preferisce il termine di funzione generalizzata, e vede questa teoria come fondata da Serguei Sobolev nel 1935. Naturalmente Dirac aveva introdotto questa "funzione" prima che esistesse una teoria generale.

[2] Cioè può essere introdotta assiomaticamente per mezzo di questa proprietà.

[3] Naturalmente, se $a > b$ possiamo scambiare gli estremi di integrazione, ed abbiamo – sia qui che nella (1) – un segno meno.

Questa relazione va intesa non nel senso ordinario, ma nel senso che per ogni $f(x)$ si ha

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx \ = \ \lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x)\sqrt{\frac{k}{\pi}}\ e^{-kx^2}\ dx\ ; \tag{4}$$

per questo riferendoci alla (3) si è scritto "limite" tra virgolette (mentre nella (4) il limite è inteso nel senso ordinario).

Osservazione E' possibile – ed a volte conveniente – dare una definizione della δ in termini di una diversa successione di funzioni. ad esempio, con lo stesso significato di limite come sopra, si ha anche

$$\delta(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\ \left[\frac{\sin(nx)}{x}\right]\ ; \tag{5}$$

$$\delta(x) \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\ \left[\frac{n}{1+n^2x^2}\right]\ . \tag{6}$$

Altre rappresentazioni dello stesso tipo sono anche possibili, ma non discuteremo qui quale sia la più generale possibile. $\odot$

Vediamo ora come la definizione (4) porti in effetti alla proprietà (1) per $a < 0 < b$: con il cambio di variabile $z = \sqrt{k}x$ abbiamo

$$\begin{aligned}
& \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_a^b f(x)\,e^{-kx^2}\,dx \\
= \ & \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{k}}^{b\sqrt{k}} f(z/\sqrt{k})\,e^{-z^2}\,dz \\
= \ & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\,e^{-z^2}\,dz \\
= \ & f(0)\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz \ = \ f(0) \\
:= \ & \int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx\ .
\end{aligned}$$

Esercizio 1. Mostrare in modo analogo (usando il cambio di variabili $z = kx$) la validità della (6).

Esercizio 2*. Mostrare la validità della (5). [Suggerimento: per k grande si ha un integrale di una funzione rapidamente oscillante.]

Esercizio 3. Che succede alla (4) se $ab > 0$? E se $a = 0 < b$ (o $a < 0 = b$) ?

Esercizio 4*. Nella definizione della δ tramite la (1) abbiamo richiesto che $f(x)$ sia continua in $x = x_0$; d'altra parte la (3) permette di considerare il caso in cui la $f(x)$ non sia continua, purché siano ben definiti i limiti sinistro e destro $f_\pm$ di $f(x)$ per $x \to x_0$. Determinare il valore di

$$\int_a^b f(x)\ \delta(x - x_0)\ dx$$

per una tale funzione, con $a \neq x_0 \neq b$.

Esercizio 5. Usare il risultato dell'esercizio precedente per calcolare

$$\int_{-1}^{+1} \Theta(x)\ \delta(x)\ dx$$

per $\Theta(x)$ la funzione scalino, per le diverse prescrizioni riguardo al valore di Θ nel punto $x = 0$.

2 Proprietà della "funzione" δ

La "funzione" δ ha alcune proprietà che è bene notare fin d'ora; le elenchiamo qui di seguito con le relative dimostrazioni.

(i)

$$\delta(-x) \ = \ \delta(x)\ . \tag{7}$$

Infatti, con il cambio di variabili $y = -x$, otteniamo

$$\int_a^b f(x)\delta(-x)\, dx \ = \ \int_{-b}^{-a} f(-y)\,\delta(y)\ dy \ = \ \begin{cases} f(0) & \text{se } ab < 0 \\ 0 & \text{se } ab > 0. \end{cases}$$

(ii)

$$\delta(kx) \ = \ \frac{1}{|k|}\,\delta(x) \qquad (k \in R,\ k \neq 0)\ . \tag{8}$$

Infatti, con il cambio di variabili $y = kx$,

$$\int_a^b f(x)\,\delta(kx)\,dx \ = \ \frac{1}{k}\int_{(a/k)}^{(b/k)} f(y/k)\,\delta(y)\,dy\ ;$$

per $k > 0$ otteniamo direttamente $f(0)$, per $k < 0$ abbiamo

$$\frac{1}{|k|}\int_{-(b/|k|)}^{-(a/|k|)} f(y/k)\,\delta(y)\,dy \ = \ \frac{1}{|k|}\,f(0)\ .$$

(iii) Se $F(x)$ e' una funzione che ha solo zeri semplici, e questi sono nei punti distinti $x_1, x_2, \ldots$, si ha

$$\delta[F(x)] \ = \ \sum_{x_k} \frac{1}{|F'(x_k)|}\,\delta(x - x_k)\ , \tag{9}$$

(la condizione di zeri semplici significa che $F'(x_k) \neq 0$).[4]

[4] Se si considera la δ in un integrale con estremi a e b, la formula è valida purché siano semplici gli zeri che cadono all'interno dell'intervallo di integrazione.

Infatti, scegliamo $0 < \varepsilon \ll 1$ con $\varepsilon < \min |x_i - x_j|/3$. Allora

$$\int_a^b f(x)\delta[F(x)]dx \;=\; \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k-\varepsilon}^{x_k+\varepsilon} f(x)\delta[F(x)]dx \;:=\; \sum_k I_k \;,$$

dove la somma è sui k tali che $x_k \in (a,b)$ (notiamo che qui, in particolare se $(a,b) = (-\infty, +\infty)$ il numero n degtli zeri può essere infinito). Per ogni I_k, possiamo scrivere sul relativo dominio di integrazione

$$f(x) \simeq F(x_k) + F'(x_k)\cdot(x - x_k) \;=\; F'(x_k)\cdot(x - x_k) \;;$$

possiamo quindi applicare la (8), ed otteniamo in questo modo la (9).

(iv)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)\,\delta(y-z)\,dy \;=\; \delta(x-z) \;. \qquad (10)$$

Per verificare questa proprietà (detta di *convoluzione*), che va intesa nel senso che applicare una o l'altra di queste due funzioni generalizzate in un integrale produce lo stesso risultato, osserviamo che[5]

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)\,\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-y)\,\delta(y-z)dy\right]\,dx \\ =\;& \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b f(x)\,\delta(x-y)\,\delta(y-z)dx\right]\,dy \\ =\;& \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_a^b f(x)\,\delta(x-y)\,dx\right]\,\delta(y-z)\,dy \\ =\;& \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{a,b}(y)\,f(y)\,\delta(y-z)\,dy \\ =\;& \chi_{a,b}(z)\,f(z) \;=\; \int_a^b f(x)\,\delta(x-z)\,dx \;. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Dimostrare la formula

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx \;=\; \begin{cases} 0 & \text{se } ab > 0 \\ f(0) & \text{se } a < 0 < b \\ -f(0) & \text{se } b < 0 < a \end{cases}$$

direttamente a partire dalla (4) o dalla (6).

Esercizio 7*. Discutere se e quali delle funzioni $g(k,x)$ di seguito elencate (in cui Θ è la funzione scalino) forniscono, per $k \to \infty$, una rappresentazione della δ analoga a

[5] Qui $\chi_{a,b}$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$, ossia $\chi_{a,b}(x) = 1$ se $x \in [a,b]$, e $\chi_{a,b}(x) = 0$ se $x \notin [a,b]$.

quella delle (4), (5), (6):

$$\begin{aligned} g(k,x) &= c\,k\ \exp(-k|x|)\ , \\ g(k,x) &= c\,k\ \Theta[(1/k) - |x|]\ , \\ g(k,x) &= c\,k\ (1 - k|x|)\ \Theta[(1/k) - |x|]\ , \\ g(k,x) &= c\,k\ (1 - k^2x^2)\ \Theta[(1/k) - |x|]\ . \end{aligned}$$

Attenzione: la risposta dipende dal valore della costante reale c.

Esercizio 8. Valutare gli integrali

$$\int_{-1}^{1} x\ \delta(x)\ dx \quad ; \quad \int_{-1}^{1} x^2\ \delta(x^2)\ dx \quad ; \quad \int_{-1}^{1} x^3\ \delta(x^3)\ dx\ .$$

3 Relazione tra le "funzioni" δ e Θ

La funzione "scalino" Θ è definita come

$$\Theta(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x < 0\ . \end{cases}$$

Cerchiamo ora di valutare la "derivata" di $\Theta(x)$. Ovviamente $\Theta'(x)$ è ben definita ed uguale a zero $\forall x \neq 0$; il problema è unicamente in $x = 0$, ed è altresì chiaro che $\Theta'(x)$ in $x = 0$ non esiste nel senso delle funzioni.

D'altra parte, $\Theta'(x)$ esiste su tutto l'asse reale nel senso delle funzioni generalizzate. Abbiamo infatti[6]

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} \ = \ \delta(x)\ . \tag{11}$$

Per dimostrare la (11), consideriamo l'integrale

$$\int_a^b \Theta'(x)\ f(x)\ dx\ . \tag{12}$$

Integrando per parti, otteniamo

$$\int_a^b \Theta'(x)\, f(x)\, dx \ = \ [\Theta(x)\, f(x)]_a^b \ - \ \int_a^b \Theta(x)\, f'(x)\, dx\ . \tag{13}$$

Se $a < 0$ e $b < 0$, allora ognuno dei due termini a destra della (13) si annulla separatamente (grazie a $\Theta(x) = 0$ per $x < 0$). Se invece $a > 0$ e $b > 0$, allora il membro di destra della (13) si riduce a

$$[f(b) \ - \ f(a)] \ - \ \int_a^b f'(x)\ dx \ = \ 0\ .$$

[6] Si noti che questa uguaglianza vale per ogni x, non solo per $x = 0$.

Se infine $a < 0 < b$, il membro di destra della (13) diviene

$$f(b) \; - \; \int_0^b f'(x)\, dx \; = \; f(b) \; - \; [f(b) \; - \; f(0)] \; = \; f(0) \; .$$

Allo stesso modo, per $b < 0 < a$ il membro di destra risulta

$$-f(a) \; - \; \int_a^0 f'(x)\, dx \; = \; -f(a) - [f(0) \; - \; f(a)] \; = \; -f(0) \; .$$

Riconosciamo quindi il risultato dell'integrazione di $f(x)\delta(x)$. In altre parole, abbiamo mostrato che $\forall f$ la (13) conduce a

$$\int_a^b \Theta'(x)\, f(x)\, dx \; = \; \int_a^b \delta(x)\, f(x)\, dx \; ,$$

e quindi stabilito la validità della (11).

Esercizio 9. Usare la proprietà $\delta(x) = \Theta'(x)$ per calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{+1} \Theta(x) \; \delta(x) \; dx \; ;$$

determinare che relazione esiste tra questo risultato e la (1).

4 Modellizzazione di forze impulsive

Anche se il nostro interesse per la funzione δ è motivato dallo studio di equazioni a derivate parziali, va menzionato il fatto che la δ permette di studiare in modo molto semplice il moto di punti materiali (quindi descritto da equazioni differenziali ordinarie) soggette a *forze impulsive*, cioè a forze che agiscono per una durata di tempo molto breve, comunicando alla particella un certo impulso.

Ad esempio, sono così le forze che agiscono nell'urto tra due corpi rigidi; la rigidità non è naturalmente infinita (né la forza trasmessa può essere infinita), e si potrebbe modellizzare la forza trasmessa ad esempio con una gaussiana molto stretta e molto "piccata". Naturalmente, nel limite questa diventa una δ, ed in effetti e' molto piu' semplice avere a che fare direttamente con la delta stessa fin dall'inizio.

Consideriamo una particella di massa unitaria inizialmente (cioè per tempi $t < 0$) in quiete nell'origine e non soggetta a forze esterne, che al tempo $t = 0$ riceve un urto in cui viene trasmesso un impulso A. Le equazioni del moto per tale problema sono

$$\ddot{x} \; = \; A \; \delta(t) \; . \tag{14}$$

Vediamo ora come risolvere l'equazione (14), o più in generale un'equazione differenziale ordinaria in cui appaiano delle δ di Dirac.[7]

[7] In effetti sarà chiaro dalla nostra breve discussione come trattare il caso generale.

Per $t < 0$ e per $t > 0$ l'equazione si riduce a

$$\ddot{x} \;=\; 0,$$

e quindi abbiamo

$$x(t) \;=\; \begin{cases} c_0^- \;+\; c_1^- \, t & (t < 0) \\ \\ c_0^+ \;+\; c_1^+ \, t & (t > 0) \end{cases}$$

La condizione iniziale (particella in quiete in $x = 0$ per $t < 0$) assicura che

$$c_0^- = 0 \;, \quad c_1^- = 0 \;.$$

D'altra parte, in tutta generalità abbiamo

$$\begin{aligned} x(t_1) \;&=\; x(t_0) \;+\; \int_{t_0}^{t_1)} \dot{x}(\xi) \; d\xi \;, \\ \dot{x}(t_1) \;&=\; \dot{x}(t_0) \;+\; \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}(\xi) \; d\xi \;. \end{aligned}$$

Consideriamo ora $t_0 < 0$ e $t_1 > 0$, ad esempio $t_0 = -\varepsilon$ e $t_1 = +\varepsilon$ (con $\varepsilon > 0$). Allora abbiamo, ricordando anche che $\ddot{x} = A\delta(t)$,

$$x(\varepsilon) \;=\; x(-\varepsilon) \;+\; \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \dot{x}(\xi) \; d\xi \;, \tag{15}$$

$$\dot{x}(\varepsilon) \;=\; \dot{x}(-\varepsilon) \;+\; \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \ddot{x}(\xi) \; d\xi \;=\; \dot{x}(-\varepsilon) \;+\; \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} A\delta(\xi) \; d\xi \;. \tag{16}$$

La seconda equazione fornisce immediatamente

$$\dot{x}(\varepsilon) = \dot{x}(-\varepsilon) + A \;, \tag{17}$$

e questo qualsiasi sia il valore di $\varepsilon > 0$. In particolare, abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \dot{x}(\varepsilon) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0_+} \dot{x}(-\varepsilon) \;+\; A \;. \tag{18}$$

Nel nostro caso, essendo $\dot{x}(t) = 0$ per $t < 0$, abbiamo semplicemente

$$\lim_{t \to 0_+} \dot{x}(t) \;=\; c_1^+ \;=\; A \;.$$

Sostituendo la (17) nella (15) otteniamo che per $\varepsilon \to 0$ l'integrale (essendo il suo argomento una funzione ordinaria, senza traccia di δ o di distribuzioni) va a zero; dunque avremo

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} x(\varepsilon) \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0_+} x \;. \tag{19}$$

Nel nostro caso, essendo $x(t) = 0$ per $t < 0$, abbiamo semplicemente

$$\lim_{t \to 0_+} x(t) \;=\; c_0^+ \;=\; 0 \;.$$

Abbiamo quindi determinato i coefficienti che determinano la soluzione per $t > 0$ in termini di quelli che identificano la soluzione per $t < 0$ (cioè dei dati iniziali) e delle "condizioni di raccordo" al bordo tra i due domini $t < 0$ e $t > 0$ in cui abbiamo un'equazione normale (senza distribuzioni, e fisicamente senza forze impulsive), cioè (18) e (19). La soluzione cercata risulta in conclusione

$$x(t) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0, \\ A\,t & \text{per } t \geq 0. \end{cases} \tag{20}$$

Naturalmente, se si fossero avuti diverse forze impulsive agenti in tempi diversi, si sarebbe dovuto dividere l'asse reale in più intervalli, e considerare condizioni di raccordo al confine tra ogni coppia di intervalli contigui.

Allo stesso modo, se fossero state presenti forze esterne, la soluzione in ognuna delle regioni "ordinarie" sarebbe stata diversa, ma le condizioni di raccordo (continuità della posizione e discontinuità della velocità) sarebbero state le stesse.

Esempio. Consideriamo un oscillatore armonico soggetto a forza impulsiva; l'equazione del moto sarà

$$m\,\ddot{x} \ = \ -\,k\,x \ + \ A\delta(t) \ .$$

La soluzione per $t \neq 0$ si ottiene immediatamente, e con $\omega = \sqrt{k/m}$ abbiamo

$$x(t) \ = \ \begin{cases} a_- \ \cos(\omega t) \ + \ b_- \ \sin(\omega t) & (t < 0), \\ a_+ \ \cos(\omega t) \ + \ b_+ \ \sin(\omega t) & (t > 0). \end{cases}$$

Per $t \to 0$ otteniamo

$$\lim_{t\to 0_-} x(t) = a_- \ , \ \lim_{t\to 0_+} x(t) = a_+ \ ; \ \lim_{t\to 0_-} \dot{x}(t) = b_- \ , \ \lim_{t\to 0_+} \dot{x}(t) = b_+ \ .$$

Dunque la condizione di continuità di $x(t)$ in $t = 0$ fornisce $a_+ = a_-$; d'altra parte, da

$$\ddot{x} \ = \ -\sqrt{\omega}\,x \ + \ (A/m)\,\delta(t)$$

segue che la condizione di raccordo per $\dot{x}$ è

$$\lim_{t\to 0_+} \dot{x}(t) \ := \dot{x}(0_+) \ = \ \dot{x}(0_-) \ + \ (A/m) \ := \ (A/m) \ + \ \lim_{t\to 0_-} x(t) \ ,$$

e quindi otteniamo

$$b_+ \ = \ b_- \ + \ (A/m) \ .$$

Il valore delle costanti a_- e b_- è fissato dalle condizioni iniziali, che qui non abbiamo assegnato.

Esercizio 10. Considerare una particella di massa m sottoposta successivamente a due urti di forza uguale e di direzione opposta, e non sottoposta ad altre forze; cioè il cui moto è descritto da

$$m\,\ddot{x} \ = \ A\,[\delta(t - t_1) \ - \ \delta(t - t_2)] \ .$$

Descrivere il moto della particella (cioè determinare $x(t)$) sapendo che per $t < t_1 < t_2$ la particella è in quiete.

Bibliografia

Lo studente desideroso di approfondire la sua conoscenza della δ, o in senso più ampio delle funzioni generalizzate, può consultare ad esempio i testi nella lista qui di seguito (in qualche senso in ordine crescente di complessità; l'ultima referenza è fornita solo per completezza).

- G. Cicogna, *Metodi Matematici della Fisica*, Springer Italia 2008
- Ph. Dennery & A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*, Dover 1996
- F.W. Byron & R.W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Dover 1992
- L. Schwartz, *Mathematics for the Physical Sciences*, Dover 2008
- A.N. Kolmogorov & S.V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, MIR 1980
- I.M. Gel'fand, G.E. Shilov & N.Ya. Vilenkin, *Generalized Functions* (5 voll.), Academic Press, 1964–1968

`G. Gaeta, 25/11/2013`