Equazioni a derivate parziali quasi-lineari del primo ordine e metodo delle caratteristiche

Corso di Fisica Matematica 2, a.a. 2019-2020
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

08/10/2019

In questi appunti discutiamo il modo di risolvere equazioni lineari e quasi-lineari del primo ordine. Tutte le funzioni arbitrarie che appaiono saranno supposte essere sufficentemente differenziabili.

1 Equazioni lineari omogenee

Consideriamo un'equazione a derivate parziali lineare ed omogenea del primo ordine per una funzione $u(x)$, che scriveremo come

$$\alpha^i(x)\ \frac{\partial u}{\partial x^i}\ =\ 0\ ; \tag{1}$$

qui le $\alpha^i(x)$ sono funzioni assegnate delle variabili indipendenti x^i, $i = 1, ..., n$ e supporremo che l'equazione sia *regolare*, ossia che non ci sia nessun x per cui tutte le $\alpha^i(x)$ sono nulle[1]. Nel seguito useremo la notazione abbreviata

$$u_i\ =\ \partial_i u\ :=\ \partial u/\partial x^i\ .$$

Alla (1) sono associati in modo naturale un operatore differenziale lineare L che agisce sulle funzioni definite su $\mathbf{R}^n$, ossia

$$L\ :=\ \alpha^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\ ; \tag{2}$$

[1] Eventuali punti ξ in cui tutte le $a_i(\xi)$ si annullano sono detti singolari; quando incontreremo negli esempi un'equazione che ha dei punti singolari (indichiamo con S il loro insieme) sarà sottinteso che l'equazione viene studiata su $\mathbf{R}^n \backslash S$, cioè nel dominio in cui è regolare; lo studio di un'equazione nei suoi punti singolari verrà rinviato ad altri corsi, dedicati specificamente alle EDP. Notiamo anche che eventuali singolarità corrispondenti all'annullarsi del denominatore in uno (o più d'uno) dei coefficienti possono essere eliminate moltiplicando l'intera equazione per il denominatore in questione; naturalmente questo pone il problema della relazione tra due equazioni che si ottengono una dall'altra attraverso un fattore che non è sempre diverso da zero, problema che anch'esso non verrà affrontato in questo corso e per cui lo studente è invitato a pazientare un po', fino al momento in cui seguirà dei corsi specifici sulle EDP.

ed il campo di vettori X su $\mathbf{R}^n$, che assegna ad ogni punto $x \in \mathbf{R}^n$ il vettore $X(x)$ (l'ipotesi di regolarità dell'equazione implica che questo non sia mai nullo, cioè $X(x) \neq 0\ \forall x$) di componenti

$$\{\alpha^1(x), ..., \alpha^n(x)\} \ . \tag{3}$$

La possibilità di passare dall'una all'altra di queste descrizioni equivalenti è alla base della tecnica di soluzione delle equazioni, detta *metodo delle caratteristiche*.

Infatti, consideriamo le **curve integrali** del campo X; queste sono definite come curve in $\mathbf{R}^n$ (dunque applicazioni iniettive $\gamma : I \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$) tali che per ogni valore di $s \in I \subseteq \mathbf{R}$, il vettore tangente a γ nel punto $\gamma(s)$ è dato dal vettore che rappresenta X nel punto $\gamma(s)$. In altre parole,

$$\frac{d\gamma}{ds} \ = \ X(\gamma(s)) \ .$$

Se consideriamo la variazione di una funzione $u : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lungo la curva $\gamma(s)$, ricordando la (3) otteniamo che questa è data da

$$\frac{du}{ds} \ = \ \frac{dx^i}{ds} \, \frac{\partial u}{\partial x^i} \ = \ \alpha^i(x) \, \frac{\partial u}{\partial x^i} \ . \tag{4}$$

Dunque, le funzioni che soddisfano l'equazione (1) sono costanti lungo le linee integrali del campo vettoriale X, e viceversa ogni funzione che è costante lungo le linee integrali del campo X è anche soluzione della (1).

In altre parole, abbiamo trasformato il problema della soluzione di una equazione differenziale in quello della determinazione di funzioni costanti lungo delle curve.

Un modo di risolvere quest'ultimo problema (almeno localmente, come sarà discusso in seguito) è come segue.

Possiamo pensare di fare un cambio di coordinate, da $(x^1, ..., x^n)$ a nuove coordinate $(s, \zeta^1, ..., \zeta^n)$, tali che le curve integrali di X siano date da $\zeta^i = c_i$, dove c_i sono costanti. In questo caso, le funzioni richieste saranno funzioni arbitrarie delle variabili $\{\zeta^1, ..., \zeta^{n-1}\}$.

Notiamo che per far ciò non è rilevante la legge oraria con cui vengono percorse le curve integrali, ma solo gli insiemi che le costituiscono; in altre parole, ci è sufficiente conoscere la direzione del vettore tangente in ogni punto, senza occuparci necessariamente del suo modulo.[2]

Per definizione, le curve integrali sono soluzione del sistema

$$\frac{dx^i}{ds} \ = \ \alpha^i(x) \ ,$$

[2]In altre parole, possiamo passare a considerare un campo di direzioni X_0, definito come un campo che associa ad ogni x un vettore di modulo unitario e diretto come $X(x)$; ovvero considerare un vettore $X_\lambda(x) = \lambda X(x)$ con $\lambda = \lambda(x)$ una qualsiasi funzione mai nulla.

detto anche *sistema ausiliario*, o sistema caratteristico per la (1), che riscriveremo come

$$\mathrm{d}s \ = \ \frac{dx^1}{\alpha^1(x)} \ = \ \dots \ = \ \frac{dx^n}{\alpha^n(x)} \ .$$

Non interessandoci della legge oraria, possiamo eliminare la prima equazione, e risolvere il sistema delle altre equazioni.

Ad esempio, se abbiamo un'equazione in due variabili indipendenti,

$$f(x,t)\, u_x \ + \ g(x,t)\, u_t \ = \ 0 \ ,$$

il nostro problema si riconduce all'equazione

$$\frac{dx}{f(x,t)} \ = \ \frac{dt}{g(x,t)} \ ,$$

ovvero all'equazione ordinaria

$$\frac{dx}{dt} \ = \ \frac{f(x,t)}{g(x,t)} \ .$$

La soluzione di questa conterrà una costante di integrazione, il cui valore dipende dalla curva integrale considerata. Possiamo prendere questa – od una sua funzione – come variabile ζ. (Naturalmente, non sempre siamo in grado di determinare esplicitamente la soluzione in oggetto.)

Esempio 1. Consideriamo l'equazione

$$-y u_x + x u_y \ = \ 0 \ ; \tag{5}$$

in questo caso dobbiamo considerare il sistema ausiliario

$$\frac{dx}{ds} = -y \ , \quad \frac{dy}{ds} = x \ ;$$

questo si riduce all'equazione

$$\frac{dy}{dx} \ = \ -\frac{y}{x} \ ,$$

che ha soluzione

$$x^2 + y^2 \ = \ c \ ;$$

sceglieremo quindi

$$\zeta \ = \ x^2 + y^2 \ .$$

Come altra variabile possiamo ad esempio scegliere

$$s \ = \ \theta \ = \ \arctan(y/x) \ ,$$

ma in effetti non è neanche necessario determinarla, in quanto dal nostro metodo segue che $u(x,y)$ è soluzione della (5) se è una funzione arbitraria di ζ. In effetti, se $u = F[\zeta(x,y)]$, abbiamo

$$u_x \ = \ F'(\zeta) \ \left(-y/x^2\right) \ , \ \ u_y \ = \ F'(\zeta) \ \ (1/x) \ ,$$

e la (5) è soddisfatta per qualsiasi scelta di F.

Possiamo comunque effettuare il cambio di variabili completo, ed esprimere l'equazione, ovvero il campo di vettori associato, in termini delle nuove variabili (s, ζ). Naturalmente avremo

$$\partial_x \ = \ (\partial\zeta/\partial x)\partial_\zeta + (\partial s/\partial x)\partial_s \ , \quad \partial_y \ = \ (\partial\zeta/\partial y)\partial_\zeta + (\partial s/\partial y)\partial_s \ ;$$

il cambio di variabili inverso è ovviamente

$$x \ = \ \sqrt{\zeta}\,\cos(s) \ , \quad y \ = \ \sqrt{\zeta}\,\sin(s) \ .$$

Con semplici calcoli risulta quindi che

$$L \ = \ -y\,\partial_x \ + \ x\,\partial_y \ = \ \partial_s \ ;$$

questo esprime il fatto che l'operatore L associato all'equazione non e' altro che l'operatore di rotazione nel piano. E' quindi evidente che $L[u] = 0$ richiede, esprimendo u come funzione di (ζ, s), che sia $u = u(\zeta)$. △

Esempio 2. Consideriamo ora l'equazione

$$(x^2/y)u_x + (x/2)u_y \ = \ 0 \ ; \tag{6}$$

il sistema ausiliario è

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x^2}{y} \ , \quad \frac{dy}{ds} = \frac{x}{2} \ .$$

Questo si riduce all'equazione

$$\frac{dy}{dx} \ = \ \frac{y}{2x} \ ,$$

che ha soluzione

$$y \ = \ c\sqrt{x} \ ;$$

sceglieremo quindi

$$\zeta \ = \ y^2/x \ .$$

Dal nostro metodo segue che $u(x, y)$ è soluzione della (6) se è una funzione arbitraria di ζ. In effetti, se $u = F[\zeta(x, y)]$, abbiamo

$$u_x \ = \ F'(\zeta) \ \left(-y^2/x^2\right) \ , \quad u_y \ = \ F'(\zeta) \ \ (2y/x) \ ,$$

e la (6) è soddisfatta per qualsiasi scelta di F. △

Esempio 3. Consideriamo ora alcuni esempi con $n = 3$; questi presentano l'aspetto fondamentale del metodo, ossia che le variabili ζ sono da considerarsi come costanti nelle integrazioni in cui dovessero intervenire.

Iniziamo col considerare l'equazione

$$xz\,u_x \ + \ yz\,u_y \ - \ (x^2 + y^2)\,u_z \ = \ 0 \ . \tag{7}$$

Il sistema ausiliario è ora

$$\begin{cases} dx/ds = xz \\ dy/ds = yz \\ dz/ds = -(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{8}$$

Iniziamo col considerare le prime due equazioni: otteniamo

$$dy/dx = y/x$$

con soluzione $y = c_1 x$ e scegliamo quindi

$$\zeta_1 = y/x \ .$$

Poniamo ora a sistema la terza equazione di (8) con la prima, ottenendo

$$\frac{dz}{dx} \ = \ - \ \frac{x^2+y^2}{xz} \ .$$

Possiamo però esprimere y in termini di ζ (ed x), col che l'equazione diviene

$$\frac{dz}{dx} \ = \ - \ \frac{x^2+\zeta_1^2 x^2}{xz} \ = = \ - \ (1+\zeta_1^2)\frac{x}{z} \ .$$

Si tratta di un'equazione separabile, che riscriviamo come

$$z \ dz \ = \ -(1+\zeta_1^2) \ x \ dx \ ;$$

ricordando che ζ_1 va considerata come costante, questa ha soluzione

$$z^2 \ = \ -(1+\zeta_1^2) \ x^2 \ + \ c_2$$

e quindi la nostra seconda variabile caratteristica sarà

$$\zeta_2 \ := \ (1+\zeta_1^2) \ x^2 \ + \ z^2 \ .$$

Dunque, ogni funzione

$$u(x,y,z) \ = \ F[\zeta_1(x,y,z),\zeta_2(x,y,z)]$$

sarà soluzione della (7), come è facile verificare per sostituzione diretta. $\triangle$

Esempio 4. Consideriamo ora l'equazione

$$y\,u_x \ + \ (xz/2)\,u_z \ = \ 0 \ . \tag{9}$$

In questo caso il sistema ausiliario è

$$dx/ds = y \ , \quad dy/ds = 0 \ , \quad dz/ds = (1/2)xz \ . \tag{10}$$

La y è ora costante, e possiamo scegliere senz'altro

$$\zeta_1 = y \ .$$

Abbiamo inoltre

$$dz/dx \ = \ (1/2)(xz/y) \ = \ (1/2)(xz/\zeta_1)$$

che ci dà

$$\log(z) \ = \ x^2/(4\zeta_1) + c_2 \ .$$

Scegliamo quindi

$$\zeta_2 \ = \ \log(z) \ - \ x^2/(4y) \ .$$

Ogni funzione

$$u(x,y,z) \ = \ F[\zeta_1(x,y,z),\zeta_2(x,y,z)]$$

sarà soluzione della (9), come è facile verificare per sostituzione diretta. $\triangle$

Esempio 5. Consideriamo infine l'equazione

$$4xy\, u_x \ + \ 4y^2\, u_y \ - \ (x^2+2y) z\, u_z \ = \ 0 \tag{11}$$

con sistema ausiliario

$$dx/ds = 4xy \ , \quad dy/ds = 4y^2 \ , \quad dz/ds = -(x^2+2y)z \ . \tag{12}$$

Ponendo a sistema le prime due, abbiamo

$$dy/dx = y/x$$

e dunque $y = c_1 x$, ossia scegliamo

$$\zeta_1 \ = \ y/x \ .$$

Ponendo a sistema la prima e la terza di (12) abbiamo

$$dz/dx \ = \ -(x^2+2y)z/(4xy) \ = \ -[(x^2+2\zeta_1 x)/(4\zeta_1 x)] \ z \ ,$$

che ha soluzione

$$z \ = \ c_2 \ \sqrt{x} \ \exp[-x/(4\zeta_1)] \ ;$$

sceglieremo quindi

$$\zeta_2 \ = \ \frac{z^2}{x} \ \exp\left[\frac{x^2}{2y}\right] \ .$$

Ogni funzione

$$u(x,y,z) \ = \ F[\zeta_1(x,y,z), \zeta_2(x,y,z)]$$

sarà soluzione della (12), come è facile verificare per sostituzione diretta. △

2 Equazioni lineari non omogenee

Consideriamo ora il caso in cui l'equazione considerata sia lineare ma non omogenea, considerando dapprima il caso in cui il termine non differenziale è indipendente da u, e poi quello in cui esso puo' dipendere, anche in modo non-lineare[3], da u.

2.1 Termine non-omogeneo indipendente da u

Nel primo caso stiamo considerando equazioni della forma

$$\alpha^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} \ = \ f(x) \ . \tag{13}$$

[3]Naturalmente in quest'ultimo caso non si tratta di un'equazione lineare in senso stretto, ma solo per quanto riguarda i termini in cui entrano le derivate di u: l'operatore differenziale che interviene è lineare, ed in questo senso si parla – in modo non del tutto preciso – di equazione lineare; più precisamente, siamo allora in presenza di una equazione *quasi-lineare* di tipo piuttosto speciale.

Procedendo come in precedenza, abbiamo che sulle curve integrali $x^i(s)$ del campo X la variazione di u soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{du}{ds} \ = \ f[x(s)] \ ; \tag{14}$$

risolvendo questa otterremo la u.

In effetti, la soluzione di questa equazione (che suppone di aver ottenuto la soluzione $x(s)$ per essere formulata) non è necessaria: possiamo infatti considerare il sistema

$$\frac{dx^1}{ds} = \alpha^1(x) \ , \ ... \ , \ \frac{dx^n}{ds} = \alpha^n(x) \ ; \ \frac{du}{ds} \ = \ f(x) \ . \tag{15}$$

Procedendo come prima, possiamo studiare le equazioni

$$\frac{dx^1}{\alpha^1(x)} \ = \ ... \ = \ \frac{dx^n}{\alpha^n(x)} \ = \ \frac{du}{f(x)}.$$

Considerando prima le equazioni con dx^i, determiniamo variabili $\{s, \zeta^1, ..., \zeta^{n-1}\}$ associate alle linee integrali del campo.[4] Inserendo ora anche l'ultima equazione, che ha soluzione

$$u \ = \ \int_0^s F(s'; \zeta^1, ..., \zeta^{n-1}) \, ds' \ + \ K$$

con $K = K(\zeta^1, ..., \zeta^{n-1})$ una costante di integrazione.

Osservazione. E' conveniente vedere la questione in un modo leggermente diverso: le (15) identificano un campo di vettori

$$Y \ := \ X \ + \ f \, \partial_u$$

(attenzione al segno!) nello spazio $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Procedendo come nel caso omogeneo, identifichiamo le curve integrali del campo Y, e nel far ciò determiniamo funzioni $\zeta^i(x)$ $(i = 1, ..., n-1)$ costanti lungo le curve integrali, ed una funzione $\eta[\zeta(x), u]$ anch'essa costante (questa corrisponde alla costante di integrazione K nella notazione precedente). Il pregio di questo approccio, che considera campi di vettori nello spazio $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, è di essere immediatamente esteso al caso quasi-lineare, come discusso nel seguito.

Esempio 6. Iniziamo col considerare l'equazione

$$t \, u_t \ + \ x \, u_x \ = \ x \, t \ , \tag{16}$$

che fornisce

$$\frac{dt}{t} \ = \ \frac{dx}{x} \ = \ \frac{du}{xt} \ .$$

Dalla prima uguaglianza otteniamo

$$\zeta = x/t \ ;$$

[4] Con il cambio di coordinate $(x) \to (s, \zeta)$ la (14) diviene $du/ds = F(s; \zeta^1, ..., \zeta^{n-1})$, ed in questa le ζ^i vanno considerate come costanti.

eguagliando ora i termini in dt ed in du, abbiamo $(dt/t) = (du/(xt))$, vale a dire

$$x\,dt \ = \ du \ ;$$

sostituendo $x = \zeta t$, questa diviene

$$\zeta\, t\, dt \ = \ du \ .$$

Ricordando ora che ζ va trattata come una costante, otteniamo

$$\zeta\, t^2/2 \ = \ u - K \ ,$$

e quindi infine (ricordando che la costante di integrazione K è tale lungo le linee integrali, ossia puo' dipendere da ζ)

$$u \ = \ K(\zeta) \ + \ \zeta\, t^2/2 \ = \ K(x/t) \ + \ (x\,t/2) \ , \tag{17}$$

con K una funzione arbitraria del suo argomento.

Riconosciamo qui la struttura generale delle soluzioni di un'equazione lineare non omogenea: abbiamo infatti la somma della più generale soluzione dell'equazione omogenea associata (in questo caso $tu_t + xu_x = 0$) e di una soluzione particolare dell'equazione completa.

In effetti, è facile controllare non solo che la (17) fornisce la soluzione generale della (16), ma anche che $K(\zeta)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, e che $u_0(x,t) = xt/2$ è una soluzione particolare della (16) stessa. $\triangle$

2.2 Termine non-omogeneo dipendente da u

Consideriamo ora il caso in cui il termine non-omogeneo dipenda anche da u (eventualmente, in modo non-lineare). Si tratta quindi, più precisamente, di un caso speciale di equazioni *quasi-lineari*, in cui i coefficienti delle derivate sono funzioni delle sole x, ossia della forma $L[u] = f(x,u)$ con L un'operatore differenziale lineare definito su R^n. Queste equazioni sono anche dette *semi-lineari.*

In concreto, vogliamo considerare equazioni della forma

$$\alpha^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} \ = \ f(x,u) \ . \tag{18}$$

In realtà, questo caso non presenta nessuna differenza rispetto al caso già considerato, v. la equazione (13): in quello la variazione di u lungo la caratteristica era assegnata, cioè si aveva

$$\frac{du}{ds} \ = \ f(x) \ = \ \varphi(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}; s) \ ,$$

e – ricordando che le ζ sono da considerare come costanti – la u si otteneva per integrazione diretta (si dice anche "per quadratura"),

$$u \ = \ \int \varphi(\zeta; s)\, ds \ + \ K(\zeta) \ .$$

In questo caso anziché avere solo da calcolare un integrale, si deve risolvere una (singola) equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{du}{ds} = f(\zeta, s, u) .$$

Si noti che se la f è separabile, questa può essere immediatamente risolta attraverso una procedura standard.

In altre parole, in ambedue i casi la variazione di u lungo le caratteristiche è assegnata, anche se in nel caso in cui $f = f(x)$ ciò significa che du/ds è una funzione nota del punto, mentre nel caso in cui $f = f(x, u)$ che soddisfa una equazione del primo ordine (in cui, avendo prima risolto le equazioni che riguardano le sole x, le x possono essere considerate come funzioni note di s).

In altre parole, la soluzione della (18) si ottiene esattamente nello stesso modo della soluzione della (13).

Esempio 7. Iniziamo col considerare l'equazione

$$t\, u_t + x\, u_x = u , \tag{19}$$

che fornisce

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{u} .$$

Dalla prima uguaglianza otteniamo

$$\zeta = x/t ,$$

e dalla seconda

$$\eta = u/x .$$

Dunque avremo per le soluzioni della (19)

$$u = x\, f(x/t)$$

con f funzione arbitraria.

In effetti, in questo modo otteniamo

$$u_t = -(x^2/t^2) f'(\zeta) , \quad u_x = f(\zeta) + \zeta f'(\zeta) ;$$

e quindi la (19) è soddisfatta. △

Esempio 8. Un altro esempio è fornito da

$$x\, u_t + 2x^2 t\, u_x = -t\, u^2 . \tag{20}$$

Ora abbiamo

$$dx/dt = 2xt$$

e con semplici calcoli arriviamo a

$$\zeta = x\, e^{-t^2} .$$

Inoltre,

$$du/dt = -u^2 t/x = -(u^2 t/\zeta)\, e^{-t^2} ;$$

questa ha soluzione

$$1/u = [1/(2\zeta)]\ e^{-t^2} \ + \ K \ ,$$

e quindi otteniamo

$$u \ = \ \frac{2\zeta e^{t^2}}{e^{t^2}\, K(\zeta) \ - \ 1} \ . \qquad \triangle$$

Esempio 9. Consideriamo ora

$$u_t \ + \ v\, u_x \ = \ \beta(x - vt) \tag{21}$$

con v una costante e β una funzione arbitraria del suo argomento $(x - vt)$.

Abbiamo ora $dx/dt = v$, che fornisce

$$\zeta = x - vt$$

Usando questa, scriviamo

$$du/dt = \beta(\zeta)$$

che ha soluzione

$$u \ = \ \beta(\zeta)\ t \ + \ \eta(\zeta) \ .$$

E' facile controllare che questa è soluzione della (21) con η funzione arbitraria.

Si può giungere alla stessa conclusione passando direttamente alle variabili

$$\tau = t \ , \ \zeta = x - vt$$

nella (21); lo studente è invitato a controllare questa affermazione. $\triangle$

Esempio 10. Un altro esempio che coinvolge una intera classe di equazioni differenziali[5] è fornito da

$$x^2\, t\, u_t \ + \ x^3\, u_x \ = \ 2\, x^4\ \beta(x/t) \ . \tag{22}$$

Ora $dx/dt = x/t$, e quindi abbiamo

$$\zeta = x/t \ .$$

Con questa,

$$du/dx = 2x\beta(\zeta)$$

che ha soluzione

$$u \ = \ \beta(\zeta)\ x^2 \ + \ \eta(\zeta) \ ;$$

E' facile controllare che questa è soluzione della (22) con η funzione arbitraria.

Nuovamente, si può giungere alla stessa conclusione passando direttamente nella (22) alle variabili

$$\xi = x \ , \ \zeta = x/t \ . \qquad \triangle$$

[5] E' facile capire come questi esempi sono costruiti: il campo Y è proiettabile ad un campo X su $\mathbf{R}^n$, e la funzione arbitraria dipende solo dalla variabile che identifica le curve integrali di X. Notiamo anche che in questo caso il fattore comune x^2 scompare dal sistema ausiliario.

3 Equazioni quasi-lineari

Un'equazione differenziale è detta **quasi-lineare** se è lineare nelle derivate di ordine massimo. Nel caso che stiamo considerando (ordine uno), la più generale equazione quasi lineare si scrive come

$$\alpha^i(x,u)\,\frac{\partial u}{\partial x^i} \;=\; f(x,u)\;. \tag{23}$$

Questa definisce, come anticipato in una osservazione più sopra, un campo di vettori Y in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, e possiamo procedere a determinare funzioni $\zeta^i(x,u)$ (ora $i = 1, ..., n$) costanti lungo le linee integrali di Y; queste forniranno (in generale, in forma implicita) le soluzioni alla (23) attraverso $\zeta^i = c_i$.

La differenza rispetto al caso lineare è che ora il campo di vettori Y non può essere proiettato ad un campo X su $\mathbf{R}^n$, cosa invece sempre possibile nel caso lineare (appunto in quanto in quel caso le componenti di Y nelle direzioni x^i non dipendono da u).

Sottolineamo che questo comporterà, come già detto, che la soluzione è in questo caso possibile (in generale) solo in forma implicita, ossia come una relazione che coinvolge la u e le x ed assicura che certe combinazioni di tutte queste variabili siano costanti.

Esempio 11. Consideriamo ora

$$u_t \;+\; u\,u_x \;=\; x\;. \tag{24}$$

Il sistema ausiliario è ora

$$dt/ds = 1\;,\quad dx/ds = u\;,\quad du/ds = x\;.$$

Abbiamo

$$du/dx = x/u\;,\quad u^2/2 = x^2/2 + c/2$$

e quindi scegliamo

$$\zeta \;=\; u^2 - x^2\;.$$

Inoltre,

$$dx/dt = u \;=\; \sqrt{\zeta + x^2}\;.$$

Ricordando che ζ va considerata costante, questa fornisce

$$2\,x \;=\; \exp[t + K(\zeta)] \;-\; \zeta\;\exp[-t - K(\zeta)] \tag{25}$$

con K una funzione arbitraria di $\zeta = u^2 - x^2$. Questa espressione fornisce una relazione tra u, x, t soddisfatta sulle curve integrali, e dunque implicitamente una soluzione per la (24); ma risulta impossibile esprimere u come funzione esplicita di x e t. △

Esempio 12. Consideriamo l'equazione

$$x\,t\,u_t \;+\; x\,u\,u_x \;=\; -u^2\;. \tag{26}$$

L'equazione per le caratteristiche è in questo caso

$$\frac{dt}{xt} \;=\; \frac{dx}{xu} \;=\; -\frac{du}{u^2}\;;$$

la seconda eguaglianza fornisce

$$\frac{dx}{x} = - \frac{du}{u} ,$$

e quindi (il fattore 2 è introdotto per semplicità nel seguito)

$$\zeta := 2\, x\, u = C .$$

Passiamo quindi a considerare coordinate (x, t, ζ); dobbiamo ora risolvere

$$\frac{dt}{xt} = \frac{dx}{xu} = \frac{2}{\zeta}\, dx$$

(abbiamo sostituito $u = \zeta/2x$), vale a dire $dt/t = (2/\zeta) x dx$. Questa ha soluzione $\log(t) = (1/\zeta) x^2 + \log[K(\zeta)]$, che può essere scritta come

$$t = K(\zeta) \ \exp[x^2/\zeta]$$

o anche come

$$K[\zeta] = t\, e^{-x^2/\zeta} . \tag{27}$$

Ricordando l'espressione per ζ, otteniamo infine

$$K[2xu] = t\, e^{-x/(2u)} .$$

△

4 Il problema di Cauchy e le caratteristiche

Abbiamo finora sempre considerato il problema di determinare *la più generale soluzione* di un'equazione lineare o quasilineare del primo ordine. Naturalmente può accadere, ed anzi accade spesso nelle applicazioni, di voler determinare tra tutte queste la soluzione che soddisfa determinate condizioni al contorno, ad esempio condizioni iniziali; si parla allora di un problema di Cauchy. Vogliamo ora discutere questo aspetto, utilizzando ancora l'approccio ed il linguaggio delle caratteristiche.

4.1 Equazioni lineari

Consideriamo dapprima equazioni lineari omogenee (1); in questo caso la $u = u(x^1, ..., x^n)$ è costante sulle caratteristiche, quindi è univocamente definita se assegnamo il suo valore su una varietà B che intersechi tutte le caratteristiche, $u|_B = f(x)$. D'altra parte le caratteristiche sono delle curve (di dimensione uno) in uno spazio n-dimensionale, e quindi B deve essere di dimensione $n - 1$. Notiamo che B potrebbe essere l'unione di più varietà. Inoltre, se B interseca delle caratteristiche più di una volta, la funzione $f(x)$ non è arbitraria, ma è vincolata a prendere lo stesso valore sui punti di B che appartengono alla stessa caratteristica.

Una volta assegnato il dato iniziale su una opportuna varietà B, questo identifica in modo univoco la funzione u.

Considerazioni del tutto equivalenti valgono per il caso di equazioni lineari non-omogenee. Naturalmente in questo caso resta sì vero che se B interseca delle caratteristiche più di una volta, la funzione $f(x)$ non è arbitraria, ma ora il vincolo non è a prendere lo stesso valore sui punti di B che appartengono alla stessa caratteristica, bensì a prendere valori in accordo con la legge di variazione di u lungo la caratteristica.

Esempio 13. Consideriamo l'equazione (5) studiata nell'esempio 1, cioè

$$-y\,u_x \;+\; x\,u_y \;=\; 0\;,$$

per cui come abiamo visto le caratteristiche sono i cerchi $\zeta = x^2 + y^2 = C$. Una possibile scelta per la varietà B è data dalla semiretta $\{x \geq 0, y = 0\}$, su cui possiamo assegnare una funzione arbitraria $u(x, 0) = \varphi(x)$. Scegliendo invece di assegnare i dati sull'intera retta $y = 0$, dovremmo aver cura di assegnare una funzione φ che sia pari in x.

Consideriamo la scelta $\varphi(x) = e^{-x^2}$. Dato che $u = f(\zeta)$ con f funzione arbitraria, e che $\zeta = x^2 + y^2$, abbiamo che la condizione fissa (per $y = 0$)

$$f(x^2) = e^{-x^2}\;,$$

ovvero

$$f(\xi) = e^{-\xi}\;.$$

Avendo determinato la funzione f, la soluzione cercata sarà

$$u(x, y) \;=\; f(\zeta) \;=\; e^{-\zeta} \;=\; e^{-(x^2+y^2)}\;.$$

Lo studente può convincersi facilmente che, scegliendo come B l'intera retta, non è possibile assegnare una funzione φ che non sia pari in x (si consideri ad esempio il caso $\varphi(x) = x$), mentre scegliendo una funzione pari – quindi che assume lo stesso valore su tutti i punti di B che appartengono alla stessa caratteristica – non si hanno problemi. Ad esempio, con la scelta $\varphi(x) = \cos(x)$ abbiamo $f(x^2) = \cos(x)$, e quindi

$$f(\xi) \;=\; \cos(\pm\sqrt{\xi}) \;=\; \cos(\sqrt{\xi})$$

(dove abbiamo usato la parità del coseno), da cui

$$u(x, y) \;=\; f(\zeta) \;=\; \cos(\sqrt{x^2 + y^2})\;. \qquad \triangle$$

Esempio 14. Consideriamo l'equazione (6) studiata nell'esempio 2, cioè

$$(x^2/y)\,u_x \;+\; (x/2)\,u_y \;=\; 0\;,$$

per cui come abbiamo visto le caratteristiche sono individuate da $\zeta = y^2/x = cost$, quindi corrispondono a parabole orizzontali $x = ky^2$ (con $k \in R$), private del punto $(0, 0)$ che è singolare (ed in cui passano *tutte* le caratteristiche); più precisamente, le caratteristiche sono le componenti connesse di queste parabole private del vertice (quindi delle semiparabole). Una possibile scelta di B che interseca tutte le caratteristiche è fornita dall'unione delle rette $x = 1$ ed $x = -1$. Può sembrare che sia necessario dare su queste rette un dato iniziale pari in y, ma così non è, per quanto detto in precedenza rispetto al punto singolare ed alla natura delle caratteristiche. $\triangle$

4.2 Equazioni quasilineari

Considereremo ora equazioni quasilineari (23) per una funzione $u = u(x^1, ..., x^n)$, quindi con n variabili indipendenti. In questo caso lo spazio in cui le caratteristiche sono definite è uno spazio R^{n+1} (o un suo sottoinsieme), mentre la proiezione di queste sullo spazio R^n delle variabili indipendenti non è ben definita: le proiezioni di caratteristiche distinte potranno avere dei punti in comune. Inoltre, anche la proiezione di una singola caratteristica può non essere una curva semplice, cioè può avere auto-intersezioni.

Resta vero che – dato che l'evoluzione sulle caratteristiche è controllata dall'equazione – una specifica soluzione sarà identificata dal suo valore su ognuna delle caratteristiche; più precisamente u è identificata dalla sua restrizione ad una opportuna varietà $B \subseteq R^{n+1}$ di dimensione n, trasversa alle caratteristiche e che le intersechi tutte una ed una sola volta.

Nel caso in cui i coefficienti $a_i(x, u)$ siano in realtà funzione delle sole variabili indipendenti, $a_i = a_i(x)$, le caratteristiche si proiettano sullo spazio $M = R^n$ di queste e quindi possiamo assegnare u su una varietà $B \subset M$ di dimensione $n - 1$.

Esempio 15. Consideriamo l'equazione (19) studiata nell'esempio 7,

$$t\, u_t \ + \ x\, u_x \ = \ u \ .$$

In questo caso le caratteristiche sono identificate dalle condizioni $\zeta = x/t = c$ e $\eta = u/x = k$. Si tratta quindi delle rette $\gamma = \{(x, t, u) = (ct, t, kct)\}$.

Possiamo scegliere come varietà B la retta $t = 1$ ed assegnare come dato iniziale $u(x, 1) = \varphi(x)$ con φ funzione arbitraria. Come si è visto nell'esempio 7, la soluzione generale della (19) si scrive nella forma $u(x, t) = x f(x/t)$, e quindi abbiamo

$$x\, f(x) \ = \ \varphi(x) \ , \quad f(x) \ = \ \frac{\varphi(x)}{x} \ .$$

La soluzione sarà quindi

$$u(x,t) \ = \ x\, f(\zeta) \ = \ x\, \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta} \ = \ t\, \varphi(x/t) \ . \qquad \triangle$$

Esempio 16. Consideriamo l'equazione (24) studiata nell'esempio 11,

$$u_t \ + \ u\, u_x \ = \ x \ ,$$

ma con dato iniziale assegnato al tempo $t = 0$ nella forma $u(x, 0) = \varphi(x)$. Scriveremo $\widehat{\zeta}(x)$ per $\zeta(u, x)$ calcolato per $u = \varphi(x)$, e $\widehat{K} = K(\widehat{\zeta})$; allora la (25) fornisce

$$2\, x \ = \ e^{\widehat{K}} \ - \ \widehat{\zeta}\, e^{-\widehat{K}} \ .$$

Scrivendo $\widehat{z} = \widehat{u}^2 - x^2$ ed omettendo gli accenti circonflessi per u, z, ζ (ma mantenendo quello per K, per evitare possibili confusioni), questa diviene

$$2x \ = \ e^{\widehat{K}} - \varphi^2 e^{-\widehat{K}} + x^2 e^{-\widehat{K}} \ ;$$

con semplici manipolazioni otteniamo $\varphi^2 = (e^{\widehat{K}} - x)^2$, ossia

$$\varphi(x) \ = \ \exp[K(\varphi^2(x) - x^2)] \ - \ x \ ,$$

e quindi infine

$$K[\varphi^2 - x] \ = \ \log(\varphi + x) \ .$$

Questa implica che

$$K[\psi] \ = \ \log[x \ + \ \sqrt{\varphi^2 - \psi}] \ ,$$

e dunque determina la funzione (prima arbitraria) $K(\zeta)$ in termini del dato iniziale $\varphi(x)$:

$$K[\zeta] \ = \ \log[x \ + \ \sqrt{\varphi^2 - \zeta}] \ .$$

Dunque avendo imposto il dato iniziale $u(x,0) = \varphi(x)$, la soluzione implicita (25) si scrive come

$$2\,x \ = \ (x \ + \ \sqrt{\varphi^2 - \zeta})\,e^t \ - \ \frac{(u^2 - x^2)}{x \ + \ \sqrt{\varphi^2 - \zeta}} \ e^{-t} \ . \tag{28}$$

Questa fornisce, beninteso ancora in forma implicita, la soluzione del problema con il dato iniziale richiesto. △

Esempio 17. Consideriamo ora l'equazione (26) dell'esempio 12. Se il dato iniziale (per semplicità al tempo $t = 1$) è

$$u(x,1) \ = \ \frac{1}{2} \ \psi(x) \ = \ \frac{1}{2} \ \frac{\varphi(x)}{x} \ ,$$

cosicché per $t = 1$ si ha $K[\zeta(x,u)] = K[\varphi(x)]$, allora a $t = 1$ l'equazione (27) diviene

$$K[\varphi(x)] \ = \ \exp[-x^2/\varphi(x)] \ . \tag{29}$$

Indichiamo ora con β l'inversa di φ, $\beta[\varphi(x)] = x$; possiamo dunque riscrivere la relazione precedente (29) come

$$K(\xi) \ = \ \exp[-\beta^2(\xi)/\xi] \ , \tag{30}$$

il che determina la funzione (prima arbitraria) $K(\xi)$. Inserendo questa nella (27) otteniamo un'equazione che determina (implicitamente) la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali assegnate $u(x,1) = (1/2)\psi(x)$, ossia

$$e^{-\beta^2(\zeta)/\zeta} \ = \ t \ e^{-x^2/\zeta} \ ,$$

o ancora

$$x^2 \ - \ [\beta(\zeta)]^2 \ = \ \zeta \ \log t \ . \tag{31}$$

Può essere conveniente considerare un esempio concreto. Scegliendo ad esempio $\psi(x) = x$ (dunque $u(x,1) = x/2$), e quindi $\varphi(x) = x^2$, otteniamo $\beta(\xi) = \pm\sqrt{\xi}$ e la (31) diviene

$$x^2 \ - \ \zeta \ = \ \zeta \ \log(t) \ , \quad \zeta \ = \ \frac{x^2}{1 + \log t} \ ,$$

che fornisce immediatamente

$$u(x,t) \ = \ \frac{1}{2} \ \frac{x}{1 \ + \ \log(t)} \ .$$

Lo studente può controllare che questa, oltre a verificare ovviamente la condizione iniziale assegnata, è una soluzione della (26). △

5 Raddrizzamento del flusso

Come ben noto, intorno ad ogni punto non singolare il flusso di una equazione differenziale può essere *raddrizzato*.[6] (A volte si dice anche “linearizzato”, ma questo rischia di creare una confusione con la procedura di linearizzazione del campo di vettori intorno ad un suo punto singolare.)

In altre parole, per ogni equazione differenziale

$$dx^i/dt = f^i(x) \quad (i = 1, ..., n) \tag{32}$$

(con f regolare) e per ogni punto x_0 tale che $f(x_0) \neq 0$, è possibile passare localmente, in un intorno di x_0, a coordinate $(\xi^1, ..., \xi^n)$ tali che nelle nuove coordinate il flusso sia descritto da[7]

$$d\xi^1/dt = 1 \ , \quad d\xi^i/dt = 0 \ \ (i = 2, ..., n) \ . \tag{33}$$

In termini di campi di vettori, l'equazione differenziale corrisponde ad un campo di vettori

$$X \ = \ f^i(x) \ (\partial/\partial x^i) \tag{34}$$

ed il cambio di coordinate $\xi = \xi(x)$ cercato è quello in cui si ha

$$X \ = \ (\partial/\partial \xi^1) \ . \tag{35}$$

D'altra parte, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \ = \ \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \ \frac{\partial}{\partial \xi^j} \ ;$$

e quindi

$$X \ = \ \left[\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \ f^i(x) \right] \ \frac{\partial}{\partial \xi^j} \ . \tag{36}$$

Richiedere che nelle nuove coordinate il campo di vettori abbia l'espressione (35) corrisponde a richiedere che le ξ^i siano soluzione delle equazioni

$$\begin{cases} X(\xi^1) \ = \ 1 \\ X(\xi^j) \ = \ 0 \quad \text{per } j = 2, ..., n. \end{cases} \tag{37}$$

Le equazioni per $(\xi^2, ..., \xi^n)$ sono della forma

$$f^i(x) \ (\partial \xi / \partial x^i) \ = \ 0 \ ,$$

ossia delle equazioni (a derivate parziali del primo ordine) lineari omogenee; le loro soluzioni (indipendenti) saranno fornite da $(n-1)$ funzioni arbitrarie (funzionalmente indipendenti) delle costanti del moto $\{\zeta^1, ..., \zeta^{n-1}\}$ che si possono

[6]Nella letteratura in lingua Inglese, il teorema di raddrizzamento del flusso è noto come *“straightening theorem”* o anche come *“flow box theorem”*.

[7]Il teorema vale anche per $f = f(x,t)$, con delle ovvie modificazioni (o considerando una variabile aggiuntiva $x^0 \equiv t$); nel contesto di interesse per il nostro corso, è preferibile formularlo per sistemi dinamici, ossia equazioni che non dipendono esplicitamente dal tempo.

determinare attraverso il metodo delle caratteristiche. L'equazione per ξ^1 è invece un'equazione (a derivate parziali del primo ordine) lineare non omogenea, peraltro con termine non differenziale particolarmente semplice; le sue soluzioni si determinano ancora attraverso il metodo delle caratteristiche.[8]

In effetti, non solo il metodo delle caratteristiche permette di realizzare il raddrizzamento (la linearizzazione) del flusso, ma – come è chiaro riflettendo un attimo su quanto appena detto – il raddrizzamento (la linearizzazione) del flusso è proprio il metodo delle caratteristiche sotto altre spoglie, più la richiesta di una legge oraria specialmente semplice.

E' opportuno precisare meglio l'ultima affermazione. Supponiamo di avere un campo di vettori nella forma (34) e di aver determinato, con il metodo delle caratteristiche, le $(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$. Queste sono funzionalmente indipendenti, e possono essere completate ad un sistema di coordinate attraverso l'introduzione di una funzione σ_0 che sia funzionalmente indipendente da esse.[9]

Nelle nuove variabili $(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}; \sigma_0)$, il campo di vettori si scrive

$$X \ = \ [X(\zeta_1)] \, \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \ + \ ... \ + \ [X(\zeta_{n-1})] \, \frac{\partial}{\partial \zeta_{n-1}} \ + \ [X(\sigma_0)] \, \frac{\partial}{\partial \sigma_0} \ .$$

Ma, per costruzione, $X(\zeta_i) = 0$; quindi nelle nuove variabili avremo

$$X \ = \ [X(\sigma_0)] \, \frac{\partial}{\partial \sigma_0} \ := \ \beta(\sigma_0; \zeta) \, \frac{\partial}{\partial \sigma_0} \ .$$

In generale, il flusso lungo le linee integrali dipenderà sia dal punto σ lungo la linea integrale stessa, che da quale linea integrale stiamo considerando (queste sono identificate dalle coordinate ζ).

Si noti che l'ipotesi di regolarità del campo di vettori (che non dipende dalle coordinate utilizzate) implica ora che $\beta(\sigma_0, \zeta) \neq 0$. Con un nuovo cambio di variabile (che lascia invarianti le ζ_i), definito da

$$\sigma \ = \ \int \frac{d\sigma_0}{\beta(\sigma_0; \zeta)} \ ,$$

possiamo ottenere il campo nella forma $X = (\partial / \partial \sigma)$.

Osservazione. Il teorema mostra che intorno a punti regolari si ha "sempre lo stesso comportamento" (qualitativamente) per ogni campo di vettori, e che dunque i punti "interessanti" sono proprio quelli singolari. $\odot$

Osservazione. E' comunque bene sottolineare che a volte (in particolare per campi che generano trasformazioni di scala, come $X = \sum c_i x^i \partial_i$, corrispondente

[8] E' evidente che una funzione che è soluzione di questa equazione non si può scrivere solo come funzione delle $(\zeta^1, ..., \zeta^{n-1})$ determinate in precedenza, e quindi insieme a loro fornisce un insieme di funzioni indipendenti.

[9] Da un punto di vista geometrico è più corretto formulare questa costruzione in modo diverso: il flusso del campo di vettori identifica una distribuzione di curve integrali, e possiamo considerare una distribuzione di iperpiani di codimensione uno attraverso ogni punto non singolare, trasversa al flusso.

a $x^i \to \lambda^{c_i} x^i$ – lo studente è caldamente invitato a controllare questa affermazione) risulta possibile rettificare il campo di vettori anche in corrispondenza di suoi punti singolari; in questo caso la trasformazione richiesta per giungere ad esprimere X nella forma $X = (\partial/\partial\sigma)$ è singolare, e risulta conveniente accontentarsi di un raddrizzamento senza normalizzazione, ossia esprimere X come

$$X \ = \ f(\sigma) \ (\partial/\partial\sigma) \ .$$

In pratica, a seconda del campo con cui abbiamo a che fare, è sufficiente considerare vuoi il campo che genera trasformazioni di traslazione (shift), ossia la forma normalizzata $X = (\partial/\partial\sigma)$, vuoi il campo che genera trasformazioni di scala, ossia la forma $X = \sigma(\partial/\partial\sigma)$. $\odot$

Esempio 18. Consideriamo il campo di vettori che appare nell'esempio 2 (lasciando allo studente il caso dell'esempio 1 come esercizio), ossia

$$X \ = \ (x^2/y) \, \frac{\partial}{\partial x} \ + \ (x/2) \, \frac{\partial}{\partial y} \ ,$$

e cerchiamo variabili (σ, ζ) tali che $X = (\partial/\partial\sigma)$. Come visto in precedenza, la costante del moto – che si ottiene risolvendo $X(\zeta) = 0$ – si esprime nella forma

$$\zeta \ = \ y^2/x \ .$$

Per determinare σ, dobbiamo invece risolvere l'equazione

$$X(\sigma) \ = \ 1 \ .$$

Con il metodo delle caratteristiche, questa equazione corrisponde al sistema dinamico

$$\begin{cases} dx/ds = x^2/y, \\ dy/ds = x/2, \\ d\sigma/ds = 1; \end{cases}$$

ovvero a

$$\frac{dx}{x^2/y} = \frac{dy}{x/2} = d\sigma \ . \tag{38}$$

Risolvendo l'ultima equazione, che possiamo riscrivere – esprimendo x in termini di y e ζ, e ricordando che quest'ultima è una costante – come

$$2\zeta \, \frac{dy}{y^2} \ = \ d\sigma \ ,$$

otteniamo immediatamente

$$\sigma \ = \ -2\zeta/y \ = \ -2y/x \ .$$

Notiamo che in linea di principio avremmo dovuto aggiungere una costante di integrazione, ossia una funzione arbitraria $K(\zeta)$ della costante del moto; questa è stata omessa per semplicità.

Lo studente può (cioè, è invitato a) controllare che se si cerca σ risolvendo invece l'altra equazione fornita dalle (38), cioè $(y/x^2)dx = d\sigma$ (naturalmente ora è y che va espressa in termini di x e di ζ), si ottiene lo stesso risultato. $\triangle$

Esempio 19. Consideriamo ora il campo di vettori che appare nell'esempio 5, ossia

$$X \ = \ 4xy \, \frac{\partial}{\partial x} \ + \ 4y^2 \, \frac{\partial}{\partial y} \ + \ (x^2 + 2y)z \, \frac{\partial}{\partial z} \ .$$

Abbiamo visto in precedenza che le costanti del moto sono generate da

$$\zeta_1 = \frac{y}{x} \ , \ \ \zeta_2 = \frac{z^2}{x} \ \exp\left(\frac{x^2}{2y}\right) \ .$$

Per determinare σ, dobbiamo risolvere $X(\sigma) = 1$, che scriveremo usando il metodo delle caratteristiche nella forma

$$\frac{dx}{4xy} = \frac{dy}{4y^2} = \frac{dz}{(x^2 + y^2)z} = d\sigma \ . \tag{39}$$

Risolviamo l'equazione risultante dal mettere a sistema dx/ds e $d\sigma/ds$, vale a dire $[1/(4xy)]dx = d\sigma$; questa si scrive ora nella forma

$$\frac{dx}{x^2} \ = \ 4\,\zeta_1 \ d\sigma$$

e fornisce quindi (omettendo ancora la costante di integrazione)

$$\sigma \ = \ -\frac{1}{4\zeta_1 x} \ = \ -\frac{1}{4y} \ .$$

Lo studente è invitato a controllare nuovamente che allo stesso risultato si giunge anche da qualsiasi altra delle equazioni risultanti dalla (39). $\triangle$

Esempio 20. Consideriamo infine un esempio in cui è preferibile limitarsi ad un raddrizzamento senza normalizzazione, come detto nella osservazione formulata poco sopra. E' sufficiente considerare[10]

$$X \ = \ x\,\partial_x \ - \ y\,\partial y \ ;$$

in questo caso il campo è singolare nell'origine. Procedendo con il metodo delle caratteristiche, otteniamo

$$\zeta \ = \ x\,y \ .$$

Se richiediamo di poter scrivere $X = (\partial/\partial\sigma)$, ci troviamo a dover risolvere l'equazione

$$\frac{dx}{x} = d\sigma \ ,$$

che fornisce

$$\sigma = \log(x) + \log(K) = \log[K(\zeta) \cdot x] \ .$$

D'altra parte, se richiediamo di poter scrivere $X = \sigma(\partial/\partial\sigma)$, ci troviamo a dover risolvere l'equazione

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\sigma}{\sigma} \ ,$$

che fornisce $\log(\sigma) = \log(x) + \log(K)$ e quindi

$$\sigma = K(\zeta) \cdot x \ .$$

[10] Lo studente è invitato a considerare autonomamente, come esercizio, anche il caso $X = x\partial_x + y\partial_y$.

Può essere utile alla comprensione vedere la stessa questione procedendo "per passi"; avendo determinato la ζ, consideriamo variabili intermedie (η, ζ) con η qualsiasi variabile indipendente da ζ, ad esempio – per semplicità – con $\eta = x$. Allora il cambio di variabili ed il suo inverso sono dati da

$$\begin{array}{rcl} \eta &=& x \\ \zeta &=& x\,y \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} x &=& \eta \\ y &=& \zeta/\eta \end{array} .$$

In queste variabili il campo si scrive come

$$X \ = \ \eta \left(\eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \ + \ \frac{\zeta}{\eta} \left(\eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \ = \ \eta \, \frac{\partial}{\partial \eta} \ ;$$

il questo modo il campo è raddrizzato (ha solo componente lungo η) ma non normalizzato. Per arrivare alla forma $X = \partial_\sigma$ dobbiamo cercare un altro cambio di variabili (in cui è opportuno non toccare la ζ) con una nuova variabile $\sigma = \sigma(\eta)$ per cui si abbia $X(\sigma) = 1$. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $\eta(d\sigma/d\eta) = 1$, che con una semplice separazione di variabili – e ricordando che la costante di integrazione dipende in generale dall'altra variabile ζ – fornisce appunto

$$\sigma \ = \ \log(\eta) \ + \ \log[K(\zeta)] \ = \ \log[K(\zeta) \cdot \eta] \ .$$

E' anche istruttivo cercare di determinare le linee integrali del campo di vettori X che stiamo considerando (farlo). Questo spiega immediatamente l'origine delle diverse singolarità incontrate nell'applicazione del metodo delle caratteristiche. $\triangle$

6 Degenerazione nelle soluzioni del metodo delle caratteristiche

Il lettore attento avrà notato che il metodo delle caratteristiche non fornisce soluzioni univoche.

Infatti, la ricerca di soluzioni di equazioni del tipo $X(\zeta) = 0$ in uno spazio n-dimensionale fornirà $(n-1)$ costanti del moto $(\zeta_1, ..., \zeta_m)$ (scriviamo $m = n-1$); ma è chiaro che qualsiasi funzione F (che supponiamo differenziabile) di costanti del moto è ancora costante del moto, dato che

$$X[F(\zeta_1, ..., \zeta_m)] \ = \ \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_1} \right) X(\zeta_1) \ + \ ... \ + \ \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta_m} \right) X(\zeta_m) \ .$$

Inoltre, se abbiamo una soluzione $u = u(x)$ dell'equazione (1) o anche dell'equazione (13), è evidente che $v = F(\zeta) u$ sarà ancora una soluzione, per qualsiasi funzione differenziabile F delle costanti del moto ζ_i. La stessa considerazione si estende facilmente ad equazioni non-omogenee; e ad equazioni quasilineari ricordando che anche queste si riducono a considerare le linee integrali di un campo di vettori (ora in uno spazio più ampio, che include anche la variabile dipendente).

Del resto, questa considerazione ha la seguente espressione geometrica: se la funzione $\lambda(x)$ non si annulla mai nel dominio in cui operiamo, allora X e

λX sono collineari, e in particolare *le curve integrali di un campo di vettori* $X = \sum \alpha^i(x)\partial_i$ *e del campo collineare* $\widehat{X} = \lambda(x) \sum \alpha^i(x)\partial_i$ *sono le stesse.*

In effetti, il metodo delle caratteristiche determina le curve integrali, *non* la legge oraria che il flusso segue su di esse (la determinazione di questa è lasciata all'integrazione della equazione ordinaria residua).

Allo stesso modo, se cerchiamo di raddrizzare il flusso e questo è ottenuto considerando (oltre alle variabili caratteristiche ζ) una certa variabile σ, otteniamo lo stesso risultato considerando $\widehat{\sigma} = \sigma + F(\zeta)$. Questo corrisponde a cambiare l'origine dell'ascissa curvilinea in modo diverso su ogni linea integrale.

7 Sistemi lineari

Il metodo delle caratteristiche si applica anche, sotto certe condizioni, al caso di *sistemi* di equazioni. Discutiamo qui molto brevemente il caso di sistemi lineari ed omogenei di due sole equazioni, rimandando al corso o a testi di equazioni a derivate parziali per casi più generali e per la discussione delle condizioni (iperbolicità) sotto cui si può operare in questo modo.

Consideriamo dunque un sistema di due equazioni per due variabili dipendenti $(u^1, u^2) = (u, v)$ che dipendono da due variabili indipendenti x, t.

Scriviamo il sistema nella forma

$$A^i_j(x,t) \, \frac{\partial u^j}{\partial t} \ + \ B^i_j(x,t) \, \frac{\partial u^j}{\partial x} \ = \ 0 \ , \tag{40}$$

dove le A, B sono matrici funzione delle sole variabili indipendenti x, t. Scriviamo la (40) in forma vettoriale – con $U = (u, v)$ – come

$$A \, U_t \ + \ B \, U_x \ = \ 0 \ . \tag{41}$$

Vorremmo ora, se possibile, descrivere queste equazioni e le loro soluzioni in termini di caratteristiche. Assumiamo che questo sia il caso, ossia che esistano delle curve caratteristiche lungo cui le soluzioni, cioè le funzioni $u(x, t)$ e $v(x, t)$, siano costanti.

La condizione di variazione nulla delle funzioni u e v può essere scritta nella forma

$$Dt \, U_t \ + \ Dx \, U_x \ = \ 0 \ , \tag{42}$$

dove le matrici Dt e Dx sono, con I la matrice identità due dimensionale,

$$Dt \ = \ I \, dt \ , \quad Dx \ = \ I \, dx \ .$$

Naturalmente le funzioni u e v non sono a variazione nulla in assoluto, ma lo sono (sotto l'ipotesi di cui sopra) lungo le caratteristiche, ossia quando sono soluzioni delle (41).

Consideriamo allora il sistema costituito dalle due equazioni (41) e dalle due equazioni (42); possiamo vedere questo sistema come un sistema algebrico della forma $MW = 0$, dove abbiamo introdotto la matrice (4×4) M ed il vettore (4 dimensionale) W, scritti in notazione a blocchi come

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ Dt & Dx \end{pmatrix} \ , \ W = \begin{pmatrix} U_t \\ U_x \end{pmatrix} \ . \tag{43}$$

Un tale sistema avrà soluzioni non triviali, cioè con $U \neq 0$, se e solo se il determinante della matrice M è nullo[11]. D'altra parte, questo determinante sarà una funzione quadratica in dx e dt, e quindi fornirà delle equazioni (in effetti, due equazioni, o una di secondo ordine) per dx/dt. Le soluzioni di queste equazioni forniscono $x(t)$ lungo le caratteristiche. Si noti che avremo quindi non una, ma *due* famiglie di curve caratteristiche, e corrispondentemente due variabili $\zeta_\pm$ invarianti lungo le caratteristiche. Le u e v saranno funzioni di ambedue queste $\zeta_\pm$, e più precisamente la somma di una funzione di ζ_+ ed una funzione di ζ_-. Si hanno quindi quattro funzioni, di queste una funzione di ζ_+ ed una funzione di ζ_- (ad esempio quelle che descrivono la u) sono arbitrarie, mentre le altre due sono fissate in termini di queste dall'equazione.

Esempio 21. Consideriamo il sistema (a coefficienti costanti, $a \neq 0$)

$$\begin{cases} u_t \ - \ a^2 v_x \ = \ 0 \ , \\ v_t \ - \ u_x \ = \ 0 \ . \end{cases}$$

Le matrici A e B introdotte in precedenza sono quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Quanto ad M e W, abbiamo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a^2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{pmatrix} \ , \ W = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ u_x \\ v_x \end{pmatrix} \ .$$

Il determinante risulta essere

$$\mathrm{Det}(M) \ = \ (dx)^2 \ - \ a^2 \ (dt)^2 \ = \ (dx \ - \ a\,dt) \ (dx \ + \ a\,dt) \ ,$$

e si annulla sulle curve (in questo caso rette) caratteristiche identificate da

$$dx \ = \ \pm\, a\, dt \ .$$

Le variabili caratteristiche associate sono $\zeta_\pm \ := \ x \ \pm \ a\,t$.

Cercando soluzioni che siano funzione della sola ζ_-, cioè $u = f(\zeta_-)$, $v = g(\zeta_-)$, otteniamo immediatamente che il sistema si riduce a

$$-af' = a^2 g' \ , \ \ -ag' = f' \ ;$$

[11] Lo studente può facilmente dimostrare che questo determinante corrisponde al determinante della matrice $\widehat{M} = Adx - Bdt$; questo è più diretto da calcolare in pratica, trattandosi di una matrice di dimensione due anzichè quattro.

le soluzioni sono quindi fornite da

$$f(\zeta_-) \;=\; -\,a\; g(\zeta_-) \;+\; C_- \;,$$

con g una funzione arbitraria e C_- una costante.

Allo stesso modo, cercando soluzioni che siano funzione della sola ζ_+, cioè $u = f(\zeta_+)$, $v = g(\zeta_+)$, otteniamo immediatamente che il sistema si riduce a

$$af' = a^2 g' \;,\quad ag' = f' \;;$$

le soluzioni sono quindi fornite da

$$f(\zeta_+) \;=\; a\; g(\zeta_+) \;+\; C_+ \;,$$

con g una funzione arbitraria e C_+ una costante.

Abbiamo quindi ottenuto (ricordando la linearità del sistema) che la soluzione generale del sistema in esame è fornita da

$$u(x,t) \;=\; a\; [\varphi(x+at) \;+\; \psi(x-at)] \;+\; c \;,\quad g(x,t) \;=\; [\varphi(x+at) \;-\; \psi(x-at)] \;,$$

con φ e ψ funzioni arbitrarie. Lo studente è invitato a controllare che queste siano in effetti soluzioni del sistema.

Notiamo che questa soluzione, dipendendo da due funzioni arbitrarie, può soddisfare una condizione iniziale arbitraria assegnata su u e v, ad esempio come $u(x,0) = \alpha(x)$ e $v(x,0) = \beta$. Infatti in questo caso abbiamo immediatamente

$$\alpha(x) = a[\varphi(x) + \psi(x)] + c \;,\quad \beta(x) = [\varphi(x) - \psi(x)] \;,$$

che hanno soluzione

$$\varphi = \frac{\alpha \,+\, a\,\beta \,-\, c}{2\,a} \;,\quad \psi = \frac{\alpha \,-\, a\,\beta \,-\, c}{2\,a} \;. \qquad \triangle$$

Esempio 22. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} u_t \;+\; v_t \;-\; (x/t)\,(u_x + v_x) \;=\; 0 & , \\ u_t \;-\; v_t \;+\; t\;, (u_x - v_x) \;=\; 0 & . \end{cases}$$

In questo caso

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;,\quad B \;=\; \begin{pmatrix} -x/t & -x/t \\ t & -t \end{pmatrix} \;;$$

segue che $Q = Adx - Bdt$ ha determinante

$$|Q| \;=\; -(2/t)\;(dx \;-\; t\,dt)\;(t\,dx \;+\; x\,dt) \;.$$

Le caratteristiche sono quindi identificate da

$$\zeta_1 \;:=\; x - t^2/2 \;=\; \text{cost.} \;,\quad \zeta_2 \;:=\; x\,t \;=\; \text{cost.} \;.$$

Le soluzioni saranno della forma

$$u = f(xt) + g(x - t^2/2) \;,\quad v = \varphi(xt) + \psi(x - t^2/2) \;;$$

sostituendo nel sistema otteniamo che le funzioni differiscono al più per una costante,

$$\varphi(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) + c_1 \;,\quad \psi(\xi,\eta) = g(\xi,\eta) + c_2 \;. \qquad \triangle$$

Appendice A.
Diffeomorfismi di una varietà e campi di vettori

In questa dispensa abbiamo studiato la soluzione di equazioni a derivate parziali (lineari o almeno quasilineari) del primo ordine usando sostanzialmente la corrispondenza tra operatori differenziali del primo ordine e campi di vettori.

I campi di vettori, oltre ad avere un evidente interesse geometrico *per se*, realizzano in effetti il tipo più generale di trasformazioni di una certa classe (importante) su $\mathbf{R}^n$ o più in generale su una varietà differenziabile, come discutiamo in questa appendice.[12]

Ricordiamo che un *gruppo* è un insieme G di elementi dotato di una operazione di prodotto (o composizione) $G \times G \to G$, in generale non commutativa e che indicheremo con un punto (il prodotto di g ed h sarà indicato con $g \cdot h$), ed inoltre tale che esista un elemento $e \in G$ (elemento neutro) tale che $\forall g \in G$, $e \cdot g = g \cdot e = g$, e che per ogni $g \in G$ esista un elemento $g^{-1} \in G$ (elemento inverso di g) per cui $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$. Se il prodotto è commutativo, ossia se $g \cdot h = h \cdot g$ per ogni $g, h \in G$, si dice che il gruppo G è *abeliano*, o *commutativo*.

Esempio 23. L'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$ dotato dell'operazione di somma è un gruppo abeliano; l'elemento neutro è lo zero. L'insieme dei numeri reali strettamente positivi $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : \ x > 0\}$ dotato dell'operazione di prodotto è un gruppo abeliano; l'elemento neutro è l'unità.

Esempio 24. L'insieme dei punti di $\mathbf{R}^n$ rappresentati come vettori e dotato dell'operazione di somma "componente per componente" è un gruppo abeliano; l'elemento neutro è il vettore nullo.

Consideriamo ora una varietà M e l'insieme delle applicazioni differenziabili $\varphi : M \to M$. E' chiaro che considerando come prodotto la composizione delle applicazioni, questo insieme diviene un gruppo, detto gruppo dei diffeomorfismi su M, o $\mathrm{Diff}(M)$.

Ci interessa considerare dei *sottogruppi ad un parametro* di questo gruppo, ossia delle famiglie di diffeomorfismi, parametrizzate da un numero $s \in \mathbf{R}$ (e dipendenti da questo in modo differenziabile) e che formino a loro volta un gruppo, fornendo una rappresentazione del gruppo $\mathbf{R}$ nell'insieme delle trasformazioni di M. Sceglieremo la parametrizzazione in modo che $\varphi_0 = id$, ed avremo dalla richiesta di gruppo (e dal fatto di avere un solo parametro) $\varphi_s \circ \varphi_r = \varphi_{s+r}$. Un esempio di un tale gruppo è fornito dalla soluzione $x(t)$ di un qualsiasi sistema regolare di ODE in M; considereremo come φ_t la mappa che trasforma $x(0)$ in $x(t)$, ossia nel punto occupato al tempo t dalla soluzione che parte da $x(0)$ al tempo $t = 0$. E' chiaro che $\varphi_0 = id$, e che $\varphi_s[\varphi_t(x)] = \varphi_{t+s}(x)$, per ogni $x \in M$. Notiamo esplicitamente che in questo caso si ha in effetti un gruppo abeliano: è infatti evidente che $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t} = \varphi_t \circ \varphi_s$.

[12] La nostra discussione segue abbastanza da presso il testo di Arnold dedicato alle equazioni differenziali ordinarie (capitolo I.4). Si rimanda ai corsi di Geometria per la nozione di varietà differenziabile; lo studente che non la conosca può pensare semplicemente ad uno spazio $\mathbf{R}^n$; in effetti, ogni varietà è per definizione localmente isomorfa (ed anzi diffeomorfa se parliamo di varietà differenziabili) ad un $\mathbf{R}^n$.

Esempio 25. Consideriamo l'insieme dei diffeomorfismi lineari φ_s in $\mathbf{R}^n$ che trasformano il punto di coordinate $(x^1, ..., x^n)$ nel punto di coordinate $(\widetilde{x}^1, ..., \widetilde{x}^n)$ con $\widetilde{x}^i = e^{s\alpha_i} x^i$ (non si somma sull'indice i; s è un numero reale qualsiasi e α_i sono costanti assegnate). Questi sono parametrizzati dal numero s (ovvero dal numero reale positivo $\lambda = e^s$), ed è evidente che si ha un gruppo, con

$$\begin{array}{l} \varphi_s[\varphi_t(x)] \ = \ \varphi_s[(e^{t\alpha_1} x^1, ..., e^{t\alpha_n} x^n)] \ = \ (e^{s\alpha_1} e^{t\alpha_1} x^1, ..., e^{s\alpha_n} e^{t\alpha_n} x^n) \\ \quad = \ (e^{(s+t)\alpha_1} x^1, ..., e^{(s+t)\alpha_n} x^n) \ = \ \varphi_{s+t}(x) \ ; \end{array}$$

allo stesso modo è evidente che

$$\varphi_s[\varphi_t(x)] \ = \ \varphi_t[\varphi_s(x)] \ ,$$

cosicché il gruppo è abeliano. △

Esempio 26. Consideriamo l'insieme delle rotazioni intorno all'origine in $\mathbf{R}^2$; indicando con θ l'angolo di rotazione, queste sono rappresentate in coordinate cartesiane dalle matrici

$$\varphi_s \ = \ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ .$$

Per la composizione delle trasformazioni si ha in modo elementare

$$\varphi_s \circ \varphi_t \ = \ \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \cos(s+t) & -\sin(s+t) \\ \sin(s+t) & \cos(s+t) \end{pmatrix} \ ;$$

anche in questo caso il gruppo è abeliano. △

Sia ora dato un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi, ossia un gruppo $\Phi = \{\varphi_t, \ t \in \mathbf{R}\}$, $\Phi \subset \mathrm{Diff}(M)$; e consideriamo per ogni punto $m_0 \in M$,

$$V(m_0) \ := \ \left[\frac{d}{dt} \varphi_t(m_0) \right]_{t=0} \ .$$

In questo modo identifichiamo, in corrispondenza di Φ, per ogni m_0 un vettore tangente ad M in m_0, ossia un elemento di $T_{m_0}M$.[13] L'insieme dei $V(m)$ per m che varia su M è detto un *campo di vettori* su M, e viene indicato con V.[14]

Introducendo delle coordinate locali $\{x^1, ..., x^n\}$, definite in un intorno di m_0 e con l'origine del sistema di coordinate coincidente con m_0, il punto $\varphi_t(m_0)$ ha coordinate $\{x^1(t; m_0), ..., x^n(t; m_0)\}$ con $x(t; m_0)$ la rappresentazione in coordinate del punto $\varphi_t(m_0)$ (dunque $x^i(0; m_0) = 0$ per ogni $i = 1, ..., n$). In corrispondenza a questa rappresentazione, avremo la rappresentazione $(v^1, ..., v^n)$ per $V(m_0)$, ed in effetti

$$v^i(m_0) \ = \ \left[\frac{d}{dt} x^i(t; m_0) \right]_{t=0} \ .$$

[13]Un vettore in m_0 è anche definito come una classe di equivalenza di curve attraverso m_0, la relazione di equivalenza essendo quella di essere tangenti in m_0. Questa definizione può essere preferibile in quanto è completamente intrinseca ad M e non fa ricorso allo spazio tangente $T_{m_0}M$ – che del resto è più correttamente definito come l'insieme delle classi di equivalenza menzionate poco sopra.

[14]Dal punto di vista geometrico, V è una sezione del fibrato tangente TM, ossia appunto una corrispondenza che associa ad ogni $m \in M$ un elemento di T_mM.

Il campo di vettori V è anche rappresentato come operatore differenziale X su M, nella forma

$$X \ = \ \sum_{i=1}^n \ v^i(x) \ \frac{\partial}{\partial x^i} \ .$$

Esempio 27. Consideriamo il gruppo Φ dell'esempio 25; dunque $\varphi_t(x^1,...,x^n) = (e^{t\alpha_1}x^1,...,e^{t\alpha_n}x^n)$. In questo caso

$$\left[\frac{d}{dt}\,\varphi_t(x)\right]_{t=0} \ = \ \left[(\alpha_1 e^{t\alpha_1}x^1,...,\alpha_n e^{t\alpha_n}x^n)\right]_{t=0} \ = \ (\alpha_1 x^1,...,\alpha_n x^n) \ ,$$

e dunque otteniamo $V(x) \ = \ (\alpha_1 x^1,...,\alpha_n x^n)$. L'operatore differenziale associato risulta essere

$$X \ = \ \sum_{i=1}^n \ \alpha_i \, x^i \ (\partial/\partial x^i) \ . \qquad \triangle$$

Esempio 28. Consideriamo il gruppo delle rotazioni in $\mathbf{R}^2$ come nell'esempio 26; ora φ_t trasforma il punto di coordinate (x,y) nel punto di coordinate $(\widetilde{x}(t),\widetilde{y}(t)) = (cos(t)x - \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y)$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}\left[\frac{d}{dt}\,\varphi_t(x)\right]_{t=0} \ &= \ \left[\frac{d}{dt}\,(cos(t)x - \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y)\right]_{t=0} \\ &= \ \left[(-\sin(t)x - \cos(t)y, \cos(t)x - \sin(t)y)\right]_{t=0} \ = \ (-y,x) \ .\end{aligned}$$

Otteniamo dunque $V(x) = (-y,x)$. L'operatore differenziale associato risulta essere

$$X \ = \ -y\,\frac{\partial}{\partial x} \ + \ x\,\frac{\partial}{\partial y} \ . \qquad \triangle$$

Dunque, ad ogni gruppo ad un parametro Φ di diffeomorfismi su M è associato un campo di vettori su M; questo è detto anche essere il *generatore* di Φ. La ragione di questo nome si trova nel Teorema che enunciamo e dimostriamo di seguito.

Teorema. *L'applicazione φ_s trasforma il punto x_0 nel punto $x(s)$, dove $x(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale $dx(t)/dt = V[x(t)]$ con dato iniziale $x(0) = x_0$.*

Dimostrazione. In effetti, la discussione condotta fin qui mostra immediatamente la validità dell'enunciato. Usando la proprietà di gruppo abbiamo

$$\left[\frac{d}{dt}\varphi_t(m)\right]_{t=\tau} \ = \ \left[\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_{\tau+\varepsilon}(m)\right]_{\varepsilon=0} \ = \ \left[\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_\varepsilon[\varphi_\tau(m)]\right]_{\varepsilon=0} \ = \ V[\varphi_\tau(m)] \ ,$$

il che mostra appunto che $\varphi_t(m)$ è soluzione di $dx/dt = V(x)$. $\triangle$

Abbiamo dunque mostrato che ad ogni gruppo ad un parametro di diffeomorfismi Φ è associato in modo intrinseco un campo di vettori su M, il generatore di

Φ, e attraverso questo un'equazione differenziale su M. Passando in coordinate locali x, l'equazione menzionata si scrive proprio come

$$dx^i/dt \ = \ v^i(x) \ = \ X(x^i) \ .$$

Esempio 29. Per il gruppo dell'esempio 25 (e 26), l'equazione differenziale associata su $\mathbf{R}^n$ non è altro che (senza somma su i)

$$dx^i/dt \ = \ \alpha_i \ x^i \ . \qquad \triangle$$

Esempio 30. Per il gruppo dell'esempio 26 (e 28) l'equazione differenziale associata su $\mathbf{R}^2$ è

$$dx/dt \ = \ -y \ , \quad dy/dt \ = \ x \ ;$$

questa può essere scritta in forma vettoriale, con $\mathbf{x} = (x, y)$, come

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} \ = \ L\,\mathbf{x} \ , \quad L \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ . \qquad \triangle$$

Dato un gruppo di diffeomorfismi Φ e la sua equazione differenziale associata $dx/dt = v(x)$, chiamiamo *flusso*, o flusso di fase, dell'equazione il gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di cui V è il generatore. Evidentemente, ogni flusso di fase è generato da un campo di vettori.

Il viceversa non è vero: è possibile definire dei campi di vettori che non sono i generatori di alcun flusso. Un esempio molto semplice di questo fenomeno è fornito, su $\mathbf{R}$, dal campo di vettori $X = x^2 \partial_x$. A questo corrisponde l'equazione differenziale $dx/dt = x^2$, che si risolve esplicitamente fornendo

$$x(t) \ = \ \frac{x_0}{1 - x_0 t} \ .$$

Il problema è che l'applicazione φ_t definita da questa soluzione non è un diffeomorfismo di $\mathbf{R}$ (a meno che non sia $t = 0$), ed in effetti è chiaro per qualsiasi $t \neq 0$ si ha una singolarità in $x_0 = 1/t$.

Dunque, come già detto, ogni gruppo ad un parametro di diffeomorfismi è generato da un campo di vettori, ma non ogni campo di vettori su M genera un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di M. Allo stesso modo, per ogni gruppo ad un parametro di diffeomorfismi si ha un'equazione differenziale su M associata, ma non ogni equazione differenziale su M genera un gruppo ad un parametro di diffeomorfismi di M.

Appendice B.
Il teorema di Cauchy-Kowalevskaya

Nella nostra discussione abbiamo spesso dato per scontata l'esistenza di soluzioni alle PDE considerate. In effetti, la corrispondenza tra PDE (quasilineari del primo ordine) ed il corrispondente sistema caratteristico – che è un sistema di ODE – permette di "tradurre" il teorema di Cauchy sulla esistenza ed unicità di soluzioni per un sistema di ODE[15] in un teorema per la corrispondente PDE. Questo è noto come *teorema di Cauchy-Kowalevskaya*[16]; ne forniamo qui un enunciato – adattato dal testo di Dennery e Krzywicki – nel caso di interesse per la nostra discussione (per una dimostrazione completa lo studente puo' consultare il testo di Courant ed Hilbert).

Il nostro risultato sarà (come il teorema di Cauchy) di natura *locale*; possiamo quindi supporre $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

Iniziamo col notare che una generica equazione in forma implicita

$$\mathcal{F}\left[x^1, ..., x^n; u; u_1, ..., u_n\right]$$

(in cui naturalmente $u_i := \partial u / \partial x^i$) si puo' sempre (se l'equazione è regolare, e comunque in un intorno dei punti regolari) scrivere *localmente*, a meno di una ridenominazione delle variabili x^i, nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial x^1} \ = \ F\left[x^1, ..., x^n; u; \frac{\partial u}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x^n}\right] \ . \tag{B.1}$$

Sottolineamo che qui né $\mathcal{F}$ né F sono supposte essere né lineari é quasilineari.

Notiamo che nel caso di equazioni di evoluzione,

$$u_t \ = \ F\left[t, x^1, ..., x^m, u; u_1, ..., u_m\right]$$

siamo già – e globalmente – a trattare con equazioni di questa forma.

Inoltre se l'equazione è scritta nella forma (B.1) è naturale, nel considerare un problema di Cauchy, assegnare i dati "iniziali" su u e u_i sull'iperpiano $x^1 = c$. In altre parole, considereremo le condizioni ausiliarie

$$u(c, x^2, ..., x^n) \ = \ \varphi(x^2, ..., x^n) \ . \tag{B.2}$$

Teorema. *Se nell'equazione (B.1) con le condizioni ausiliarie (B.2) le funzioni F e φ sono analitiche nel punto p di coordinate $x^i = a^i$, allora in un intorno di p esiste ed è unica la soluzione di (B.1), (B.2); inoltre questa è analitica.*

[15] Questo è ricordato e riportato nella dispensa dedicata ai metodi di soluzione per ODE.

[16] O di Cauchy-Kowalevski, o Cauchy-Kowalevska; si tratta di Sofia Kowalevski (1850-1891), e come noto in lingua russa il cognome si declina secondo il genere.

Bibliografia

Il metodo delle caratteristiche è discusso in tutti i testi dedicati alle equazioni a derivate parziali, ed in alcuni dedicati alle equazioni a derivate ordinarie. Segnaliamo qui innanzi tutto i testi di Arnold che contengono capitoli dedicati alle caratteristiche (dei primi due qui indicati esiste anche una traduzione in italiano, pubblicata da Editori Riuniti). Inoltre, il classico trattato di Courant e Hilbert contiene una trattazione assai completa. Infine, il libro di Stephani discute vari aspetti della relazione tra PDEs del primo ordine e campi di vettori, anche in relazione alla determinazione di campi commutanti.

Notiamo anche che in molti testi la discussione delle caratteristiche si estende a coprire il caso di equazioni del secondo ordine (non solo quelle a coefficienti costanti che considereremo nel seguito del corso) e di sistemi di equazioni; forniamo qui l'indicazione di un solo testo (oltre a quello di Courant e Hilbert) per questa discussione, cioè quello di Petrovsky.

L'appendice, come già detto in essa, segue abbastanza strettamente la discussione proposta nel testo di Arnold dedicato alle ODE. La caratterizzazione dei campi di vettori come classi di equivalenza di curve (tangenti tra loro) è discussa in dettaglio in qualsiasi testo di Geometria Differenziale; si vedano ad esempio quello di Chern, Chen e Lam e quello di Isham.

Infine, una parte degli esempi di questa dispensa (e degli esercizi ad essa collegati) sono tratti da una raccolta di esercizi dell'Università di Novosibirsk, a cura di I.V. Kolokolov ed altri.

- V.I. Arnold, *Ordinary differential equations*, Springer, 2006 (3^a edizione)
- V.I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer, 1983
- V.I. Arnold, *Lectures on partial differential equations*, Springer, 2004
- S.S. Chern, W.H. Chen & K.S. Lam, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, 2000
- R. Courant & D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Wiley, 1989 (Riproduzione dell'edizione Interscience, 1953)
- C.J. Isham, *Modern differential geometry for physicists*, World Scientific 1999
- I.G. Petrovsky, *Lectures on partial differential equations*, Interscience 1954; reprinted by Dover, 1991
- H. Stephani, *Differential equations : their solution using symmetries*, Cambridge University Press, 1989

G. Gaeta, 08/10/2019