Applicazioni Fisiche della Teoria dei Gruppi

Secondo modulo: simmetrie delle equazioni differenziali

Università di Roma Tre

A.A. 2002 - 2003

G. Gaeta

<u>Motivazione</u> (cenni)

1.) I metodi di simmetria sono lo strumento unificante di <u>tutti</u> i metodi di soluzione delle ED (anche se molti metodi per classi particolari di equazioni si possono formulare senza riferimento alla simmetria); questo è sempre più chiaro in anni recenti [nonclassical o conditional symm., λ-symm., etc.]

2.) Naturalmente questi metodi sono particolarmente efficaci per equazioni che hanno "molta" symm., come succede solitamente in Fisica.

3.) In realtà spesso le eq. della Fisica sono determinate in termini di simmetria (Hamilton, Yang-Mills, Einstein, Landau, KPZ ...) [come + semplici con simm. data], quindi ovviamente le propr. intrinseche alla simmetria sono particolarm. importanti. [→ Michel theory]

4.) Le riduzioni per simm. (esempio: sol. $u=u(r)$ della eq. delle onde o eq. di diffusione) sono fisicamente importanti (v. anche sol. di Einstein, o Yang-Mills).

5.) Questa teoria era la motivazione originale di Lie per creare la teoria dei gruppi.

Che vogliamo imparare?

Esempio: gruppo rot. e eq. onde o calore: riduzioni "ovvie" - ~~Voy~~

Vogliamo sviluppare un modo sistematico per casi che non possono essere affrontati "a occhio"

Nel farlo, capiremo varie cose su cos'è una equazione differenziale...

(1)

Symmetry of differential equations:

basic idea

Notazione generale:

$x \in X \simeq \mathbb{R}^q$ var. indip.

$u \in U \simeq \mathbb{R}^p$ var. dip.

$M = X \times U$ base space (è un fibrato banale se X contraibile)

$u_{(n)}$ = der. di u (in x) di ordine n

Δ : $F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(n)}) = 0$ eq. diff.

$u = f(x)$ soluz. di Δ

$\Sigma_\Delta = \{ \text{soluz. di } \Delta \}$

Idea : una mappa $g: M \to M$ è una simmetria di Δ se porta soluzioni in soluzioni

Cioè: g agisce su x e u e quindi trasforma $u = f(x)$ in $u = \tilde{f}(x)$; richiediamo che se $f \in \Sigma_\Delta$, allora $\tilde{f} \in \Sigma_\Delta$

(2)

Group action on functions

Problema : cos'è la mappa $\hat{g}: f \to \tilde{f}$?

Per capirlo, - consideriamo il grafico di f:

$$\gamma_f = \{ (x,u) \in M : u = f(x) \}$$

questa è una sezione del fibrato (M, π, X).

Prima di vedere la def. di sezione, cerca di det. $f \to \tilde{f}$ per azioni infinitesime

$$g : \begin{cases} x \to \tilde{x} = x + \varepsilon \xi(x,u) & = \alpha(x,u) \\ u \to \tilde{u} = u + \varepsilon \varphi(x,u) & = \beta(x,u) \end{cases}$$

$$(x, u = f(x)) \to (\tilde{x}, \tilde{u})$$

$$\tilde{u} = \beta(x,u) = \beta(x, f(x))$$

$\cancel{g^{-1} : (\tilde{x}, \tilde{u}) \to (x,u) = (A(\tilde{x},\tilde{u}), B(\tilde{x},\tilde{u}))}$

$\cancel{\tilde{u} = \beta(A(\tilde{x},\tilde{u}), f(A(\tilde{x},\tilde{u})))}$

$\cancel{u = B(\tilde{x},\tilde{u})}$

Nel caso infinitesimo,

$$\tilde{u} = u + \varepsilon \varphi(x,u) = f(x) + \varepsilon \varphi(x, f(x))$$

$$x = \tilde{x} - \varepsilon \xi(x, \tilde{u}) = \tilde{x} - \varepsilon \xi(\tilde{x}, \tilde{u})$$

$$\tilde{u} = f(\tilde{x} - \varepsilon \xi) + \varepsilon \varphi(x, f(x)) =$$

$$= f(\tilde{x}) + \varepsilon \left[\varphi(\tilde{x}, f(\tilde{x})) - \xi(\tilde{x}, f(\tilde{x})) \cdot \nabla_{\tilde{x}} f(\tilde{x}) \right]$$

$\tilde{u} \equiv \tilde{f}(\tilde{x})$

$$\boxed{\tilde{f} = f + \varepsilon\left[\bar{\varphi} - \bar{\xi}\cdot\nabla f\right]}$$

$\bar{\varphi}(x) \equiv \varphi(x, f(x))$; $\bar{\xi}(x) = \xi(x, f(x))$

$\tilde{f} = f + \varepsilon\delta f$; $\boxed{\delta f = (\bar{\varphi} - \bar{\xi}\cdot\nabla f)}$

Esercizio Cercare di fare la stessa per trasf. finite (e convincersi che è un gran casino!)

ESEMPI : $(x \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R})$:

Rotazioni: $g : (x,u) \to (x - \varepsilon u, u + \varepsilon x)$

$\xi(x,u) = -u$; $\varphi(x,u) = x$

$\delta f = x + f(x)\cdot f'(x)$

$\tilde{f}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \varepsilon\left[\tilde{x} + f(\tilde{x})\cdot f'(\tilde{x})\right]$

Ad es., la funzione $u = \sin(x)$ si trasf. in

$\tilde{u} = \sin(\tilde{x}) + \varepsilon\left[\tilde{x} + \sin(\tilde{x})\cos(\tilde{x})\right]$

la funz $u = x^2/2$ va in

$\tilde{u} = \tilde{x}^2/2 + \varepsilon\left[\tilde{x} + \tilde{x}^2/2\cdot\tilde{x}\right]$

$u = ax + b \Rightarrow$

$\tilde{u} = a\tilde{x} + b + \varepsilon\left[\tilde{x} + (a\tilde{x} + b)\cdot a\right] = [a + \varepsilon(1 + a^2)]x + [b + \varepsilon(ab)]$
$= \tilde{a}x + \tilde{b}$

Trasl. $x \to x + \varepsilon\alpha$, $u \to u + \varepsilon\beta$

$\xi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$\delta f = (\beta - \alpha\nabla f)$

$u = \sin(x) \to \tilde{u} = \sin(\tilde{x}) + \varepsilon\left[\beta - \alpha\cos(\tilde{x})\right]$

$f(x) = \frac{x^2}{2} \to \tilde{f} = \frac{x^2}{2} + \varepsilon\left[\beta - \alpha x\right]$

$f(x) = ax + b \to \tilde{f} = ax + b + \varepsilon\left[\beta - \alpha a\right] =$
$= ax + \left[b + \varepsilon(\beta - \alpha a)\right] \equiv \tilde{a}x + \tilde{b}$

Scala : $x \to x + \varepsilon\alpha x$; $u \to u + \varepsilon\beta u$

$\xi = \alpha x$, $\varphi = \beta u$

$\delta f = \beta f - \alpha x \cdot f'$

$f(x) = \sin(x) \to \sin(x) + \varepsilon\left[\beta\sin(x) - \alpha x\cos(x)\right]$

$f(x) = x^2/2 \to x^2/2 + \varepsilon\left[\beta\frac{x^2}{2} - \alpha x^2\right] =$
$= \left[1 + \varepsilon(\beta - 2\alpha)\right] x^2/2$

$f(x) = ax + b \to (ax + b) + \varepsilon\left[\beta(ax + b) - \alpha a x\right] =$
$= \left[a + \varepsilon(a\beta - a\alpha)\right]x + (b + \varepsilon\beta b)\,x$

Esercizio 1: Considerare $\mathcal{S}(x) = c\,x^{k}$; per quali valori di α, β, c, k la trasf. di scala lascia invariante $\mathcal{S}$?

Esercizio 2: Considerare $\mathcal{S}(x) = c\,x^{k}$ e la trasf. generata da
$\xi = \alpha x + a$; $\varphi = \beta u + b$
(a, b, α, β costanti).
Per quali valori $\mathcal{S}$ è invariante?

Abbiamo descritto l'azione infinitesima; per ogni gen → gruppo a 1 parametro. Per descrivere il gruppo, abbiamo da risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{ds} = \xi^i(x,u) \\ \dfrac{du^\alpha}{ds} = \varphi^\alpha(x,u) \end{cases}$$

Col trucco di passare all'azione sulle funzioni,

$$\frac{d\mathcal{S}}{ds} = \delta\mathcal{S}$$

ma questa è un'equazione funzionale.

esempio: 1) $\xi = -u$, $\varphi = x$

$$\frac{dx}{ds} = -u \qquad \frac{du}{ds} = x$$

$$\frac{dz}{ds} = Az \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix} z(0)$$

$$\frac{d\mathcal{S}}{ds} = I + \xi \cdot \mathcal{S}'$$ (eq. nonlineare e funzionale!)

2) $\xi = \alpha$, $\varphi = \beta$

$$\frac{dx}{ds} = \alpha \qquad x(s) = x(0) + \alpha s$$

$$\frac{du}{ds} = \beta \qquad u(s) = u(0) + \beta s$$

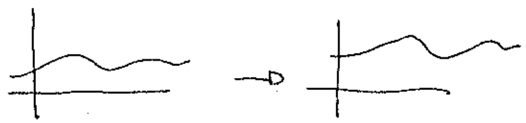
3) $\xi = \alpha x$ $\qquad \varphi = \beta u$

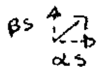
$$\frac{dx}{ds} = \alpha x \qquad x(s) = e^{\alpha s}\, x(0)$$

$$\frac{du}{ds} = \beta u \qquad u(s) = e^{\beta s}\, u(0)$$

Possiamo ricavare la legge di trasf. delle sezioni a partire da queste

es. 2: $(x,u) \to (\tilde{x},\tilde{u}) = (x+\alpha s,\ u+\beta s)$





$$\tilde{u} = u + \beta s = \mathcal{S}(x) + \beta s = \mathcal{S}(\tilde{x} - \alpha s) + \beta s$$

Cioè: valore di u nel punto traslato di <u>meno</u> αs, traslato di <u>più</u> βs

es. 3: $(x,u) \to (\tilde{x},\tilde{u}) = (e^{\alpha s}x,\ e^{\beta s}u)$

$$\tilde{u} = e^{\beta s}u = e^{\beta s}\mathcal{S}(x) = e^{\beta s}\mathcal{S}(e^{-\alpha s}\tilde{x})$$

di nuovo: valore di u nel punto immagine inversa di $\tilde{x}$, su cui agisce il gruppo.

Nel caso di es. 1, bisogna stare più attenti:

non è una sez: in generale, gruppo <u>solo locale</u>!

es. 1:

$$(x,u) \to (\tilde{x},\tilde{u}) \equiv \tilde{z} = \begin{pmatrix} \cos(\tau) & -\sin(\tau) \\ \sin(\tau) & \cos(\tau) \end{pmatrix} z \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} x+iu \\ x-iu \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{x}+i\tilde{u} \\ \tilde{x}-i\tilde{u} \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} z \qquad \tilde{w} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tilde{z} \qquad w = A z$$

$$z = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} w \qquad \tilde{z} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tilde{w} \qquad z = A^{-1} w$$

$$\frac{dw}{d\tau} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} w \qquad \tilde{w} = \begin{pmatrix} e^{i\tau} & 0 \\ 0 & e^{-i\tau} \end{pmatrix} w \qquad \tilde{w} = R_{(\tau)} w$$

$$\tilde{z} = A^{-1} R_{(\tau)} A\, z = M_{(\tau)} z$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad u = Pz \ ; \ \tilde{u} = P\tilde{z}$$

$$\tilde{u} = P M_{(\tau)} z = P M_{(\tau)} \begin{pmatrix} x \\ \mathcal{S}(x) \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x = Qz \ ; \ \tilde{x} = Q\tilde{z}$$

$$\tilde{x} = Q M_{(\tau)} x \quad ;$$

$$x = Q M^{-1}_{(\tau)} \tilde{z}$$

Osservazione (importante):

Fisicamente, è bene che $\xi = \xi(x)$: le trasf. dello spazio-tempo non dipendono dal valore del campo nel punto (né altrove)

Problema: questa affermazione è in contrasto con il principio della rel. generale? (ovv. no, ma lasciarli pensare)

In questo caso (fiber-preserving) abbiamo

$$g: \begin{array}{l} x \to \tilde{x} = \alpha(x) \\ u \to \tilde{u} = \beta(x,u) \end{array}$$

$$\boxed{\tilde{u} = \beta\left(x, f(x)\right) = \beta\left[\alpha^{-1}(\tilde{x}), f\left(\alpha^{-1}(\tilde{x})\right)\right]}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{ds} = \xi^i(x) \\[2ex] \dfrac{du^\alpha}{ds} = \varphi^\alpha(x,u) \end{cases}$$

Esempio con $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$

$$g: (x,y;u) \to (x - \varepsilon y, y + \varepsilon x, u + \varepsilon K u)$$

$$\xi^1 = -x^2, \quad \xi^2 = x^1, \quad \varphi = Ku$$

$$\delta f = K f(x,y) - (-y f_x + x f_y)$$

$$= K f(x,y) + (y f_x - x f_y)$$

Vedere $f(x,y) = f(x^2+y^2)$

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \cdot \cos(\theta)$$

(ovviamente, qui conviene pass. a coord. polari.

$g: \rho \to \rho, \ \theta \to \theta + \varepsilon, \ u \to \cancel{K} u$)

Esempio con $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^2$

$$g(x;u_1,u_2) \to (x + \varepsilon K x; u_1 - \varepsilon u_2, u_2 + \varepsilon u_1)$$

Esempi con $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y;u,v) \to (x - \varepsilon y, y + \varepsilon x; u \mp \varepsilon v, v \pm \varepsilon u)$$

$$g(x,y;u,v) \to (x - \varepsilon y, y + \varepsilon x; u, v)$$

$$g(x,y;u,v) \to (x,y; u - \varepsilon v, v + \varepsilon u)$$

Es $R(x), u$:

$$\vec{x} \to R_\theta \bar{x}, \quad u \to e^{K\theta} u$$

$$\tilde{u} = e^{K\theta} u = e^{K\theta} \varphi(x) = e^{K\theta} \varphi(R_\theta^{-1} \tilde{x})$$

Es $x, R\underline{u}$:

$$x \to e^{K\theta} x, \quad \underline{u} \to R\underline{u}$$

$$\underline{\tilde{u}} = R\underline{u} = R\,\underline{\varphi}(x) = R \cdot \underline{\varphi}[e^{-K\theta}\tilde{x}]$$

<u>Esercizio</u> : studiare i casi visti sopra con $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$

Trasformazione delle derivate

Abbiamo visto che sotto la trasf. di $M = X \times U$

$$x \to \tilde{x} = x + \varepsilon\, \xi(x,u)$$
$$u \to \tilde{u} = u + \varepsilon\, \varphi(x,u)$$

il grafico della funzione $u = f(x)$, ossia l'insieme $\gamma_f = \{(x, f(x))\}$, si trasforma nel grafico della funzione

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon\left[\varphi(x, f(x)) - \xi(x, f(x)) \cdot \nabla f(x)\right]$$

Sapere come si trasformano le funzioni implica naturalmente sapere come si trasformano le loro derivate. Ad esempio, al primo ordine,

$$\frac{\partial \tilde{f}^\alpha}{\partial x^i} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} + \varepsilon\Big[\partial_i \varphi^\alpha + (\partial_\beta \varphi^\alpha)\,\partial_i f^\beta +$$

$$- \left[(\partial_i \xi^j) + (\partial_\beta \xi^j)(\partial_i f^\beta)\right] \cdot (\partial_j f^\alpha) +$$

$$- \xi^j\, \partial^2_{ij} f^\alpha\Big] =$$

$$= \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} + \varepsilon\,(\delta f^\alpha_i)$$

$$(\delta f^\alpha_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\varphi^\alpha - \xi^j \cdot (\partial_j u^\alpha)\right] + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial u^\beta}\left[\varphi^\alpha - \xi^j \cdot (\partial_j u^\alpha)\right]$$

L'operatore

$$D_i := \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\beta=1}^{p} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial u^\beta}$$

sarà detto derivata totale rispetto a x^i (in realtà è, nel linguaggio dei fibrati, una derivata covariante su (E, π, X)).

È preferibile, come visto in precedenza, trattare le propr. di trasformazione delle variabili x, u – e ora $p_i \equiv \partial_i u$ – anziché quelle delle funzioni f.

Consideriamo lo spazio "esteso" $(x, u, p \equiv u_x)$, ed un campo di vettori (uso 1-dim per semplicità)

$$X^{(1)} = \xi(x,u)\,\partial_x + \varphi(x,u)\,\partial_u + \psi(x,u,p)\,\partial_p$$

$$x \to \tilde{x} = x + \varepsilon\,\xi(x,u)$$
$$u \to \tilde{u} = u + \varepsilon\,\varphi(x,u)$$
$$p \to \tilde{p} = p + \varepsilon\,\psi(x,u,p)$$

ed il grafico "esteso" della funzione $f(x)$

$$\gamma_f^{(1)} = \{(x,u,p) : \ u = f(x) \ ; \ p = f'(x) \equiv g(x)\}$$

Sotto $X^{(1)}$, questo si trasforma in

$$\tilde{\gamma}_f^{(1)} = (\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{p})$$

$$\tilde{p} = p + \varepsilon\,\psi(x,u,p) = p + \varepsilon\,\psi(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{p}) =$$
$$= f'(x) + \varepsilon\psi = f'(\tilde{x} - \varepsilon\xi) + \varepsilon\psi =$$
$$= f'(\tilde{x}) - \varepsilon\,\xi f'' + \varepsilon\psi =$$
$$= f'(\tilde{x}) + \varepsilon(\psi - \xi f'')$$

e come abbiamo visto prima,

$$\tilde{x} = x + \varepsilon\xi$$
$$\tilde{u} = f(x) + \varepsilon[\varphi(x, f(x))]$$
$$= f(\tilde{x} - \varepsilon\bar{\xi}) + \varepsilon\bar{\varphi} =$$
$$= f(\tilde{x}) + \varepsilon[\bar{\varphi} - \bar{\xi} f'] =$$
$$\equiv \tilde{f}(\tilde{x})$$

Come dobbiamo scrivere Ψ affinché sia

$$\tilde{p} = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}} \ ?$$

$$\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{x}} = \frac{df}{d\tilde{x}} + \varepsilon \frac{d}{d\tilde{x}}\left[\bar{\varphi} - \bar{\xi} f'\right]$$

$$= f'(\tilde{x}) + \varepsilon\, D_{\tilde{x}}(\bar{\varphi} - \bar{\xi} f') =$$
$$= f'(\tilde{x}) + \varepsilon\, D_{\tilde{x}}[\varphi - \bar{\xi} f']_{u = f(x)}$$

Quindi deve essere

$$\cancel{\Psi = \frac{d}{d\tilde{x}}\{\varphi(\tilde{x}) - \xi f'\}}$$

$$\Psi(x,u,p)\Big|_{\substack{u=f(x)\\ p=f'(x)}} = \frac{d}{d\tilde{x}}\left[\tilde{\varphi} - \tilde{\xi} f'\right] + \xi f''$$

$$= D_{\tilde{x}}\left[\varphi(x,u) - \xi(x,u)\, f'\right] + \xi p_x \Big|_{\substack{u=f(x)\\ p=f'(x)}}$$

$$\boxed{\Psi(x,u,p) = D_x\left[\varphi - \xi \nabla f\right] + \xi p_x}$$

Questa è la <u>prolongation formula</u> (al 1° ordine)

<u>Esercizio</u>: Se $x \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{R}^{p \times q})$, mostrare che

$$\Psi^\alpha_i = D_i\left[\varphi^\alpha - \xi^j \nabla_j f^\alpha\right] + \xi^j \partial_j p_i$$

(Si fa come il calcolo precedente, con un po' di attenzione agli indici)

Nel caso di derivate di ordine n si può procedere nello stesso modo; o anche cercare di essere un po' più astuti (geometrici) -

Di nuovo, consideriamo il caso scalare, e

$u_1 = u_x, \quad u_2 = u_{xx}, \ \dots$

$$x \to \tilde{x} = x + \varepsilon \xi$$
$$u \to \tilde{u} = u + \varepsilon \varphi$$
$$u_k \to \tilde{u}_k = u_k + \varepsilon \Psi^{(k)}$$

Supponiamo che tutto sia OK (cioè i coeff. $\Psi^{(k)}$ siano stati scelti opportunamente) fino a ordine $k = m-1$; vediamo $\tilde{u}_k$:

$$\tilde{u}_m = \frac{d^m f}{dx^m}(x) + \varepsilon \Psi$$

Scrivo $\displaystyle \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f \equiv g$

$$\tilde{u}_m = g'(x) + \varepsilon \Psi =$$
$$= g'(\tilde{x} - \varepsilon \xi) + \varepsilon \Psi =$$
$$= g'(\tilde{x}) + \varepsilon\left(\Psi - \xi g''\right) \qquad (*)$$

Dobbiamo chiedere che $\displaystyle \tilde{u}_m = \frac{d^m \tilde{f}(\tilde{x})}{d\tilde{x}^m} = \frac{d\,\tilde{g}(\tilde{x})}{d\tilde{x}^m}$

Supponiamo che per $k \leq m-1$,

$$\Psi^{(k)} = D_x\left(\varphi - \xi u_k\right) + \xi u_{k+1} \qquad (**)$$

il che assicura (è sempre un'ipotesi) che $\displaystyle \tilde{u}_k(\tilde{x}) = \frac{d^k \tilde{f}(\tilde{x})}{d\tilde{x}^k}$

Allora $\quad \tilde{g}(\tilde{x}) = \tilde{u}_{m-1} = u_{m-1} + \varepsilon \Psi^{(m-1)} =$

$$= g(x) + \varepsilon \Psi^{(m-1)} =$$

$$= g(\tilde{x} - \varepsilon\xi) + \varepsilon\Psi^{(m-1)}$$

$$\frac{d\tilde{g}}{d\tilde{x}} = g'(\tilde{x}) + \varepsilon \frac{d}{d\tilde{x}}\Psi^{(m-1)} - \varepsilon \xi g'(\tilde{x})$$

$$= g'(\tilde{x}) + \varepsilon D_x\left(\Psi^{(m-1)} - \xi g'\right)$$

Da questo e la precedente (*) abbiamo

$$\Psi^{(m)} = D_x\left(\Psi^{(m-1)} - \xi u_m\right) + \xi u_{m+1}$$

Abbiamo quindi dimostrato la autoconsistenza della (**); dato che questa è verificata per $m=1$, in realtà abbiamo dimostrato per ricorrenza che

$$\boxed{\Psi^{(k)} = D_x^k\left(\varphi - \xi u_x\right) + \xi u_{k+1}}$$

Esercizio: Mostrare che per $x \in \mathbb{R}^q$, $u \in \mathbb{R}^p$,

$$\boxed{\left(\Psi^{(k)}\right)^\alpha_J = D_J\left(\varphi^\alpha - \xi^i u^\alpha_i\right) + \xi^i u_{J,i}}$$

(general prolongation formula)

Esercizio: Dimostrare la formula di ricorrenza

$$\boxed{\left(\Psi\right)^\alpha_{J,i} = D_i \Psi^\alpha_J - \left(D_i \xi^k\right) \cdot u^\alpha_{J,k}}$$

ESEMPI: Consideriamo gli esempi visti in precedenza

es. 2: $\xi = \alpha$, $\varphi = \beta$

$$\Psi = D_x(\varphi - \xi u_x) + \xi u_{xx} =$$
$$= D_x\varphi - (D_x\xi)u_x - \xi u_{xx} + \xi u_{xx} = 0$$

(ovvio: se $u \to u + \lambda$, $x \to x + \mu$, le derivate non cambiano)

esercizio: verificare che $\Psi^{(k)} = 0 \quad \forall k$

es. 3: $\xi = \alpha x$, $\varphi = \beta u$

$$\Psi = D_x(\varphi - \xi u_x) + \xi u_{xx} =$$
$$= D_x(\beta u - \alpha x u_x) + \alpha x u_{xx} =$$
$$= \beta u_x - \alpha u_x - \alpha x u_{xx} + \alpha x u_{xx} =$$
$$= (\beta - \alpha) u_x$$

$$\frac{dp}{ds} = (\beta - \alpha)p \quad ; \qquad p(s) = e^{(\beta-\alpha)s} p(0)$$

$$(x, u, p) \to \left(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta u, \lambda^{\beta-\alpha} p\right) \qquad \lambda = e^s$$

<u>esercizio:</u> mostrare che

$$\psi^{(n)} = (\beta - k\alpha)$$

e ottenere il gruppo di trasform. per $(x, u, \dots, u_{(m)})$.

<u>es. 1</u> Ora l'esempio 1, cioè

$\xi = -u$; $\varphi = x$.

$$\Psi = D_x(\varphi - \xi u_x) + \xi u_{xx}$$
$$= D_x(x + u u_x) - u u_{xx} =$$
$$= 1 + u_x^2$$

$$\Psi^{(2)} = D_x^2(\varphi - \xi u_x) + \xi u_{xxx} =$$
$$= D_x^2(x + u u_x) - u u_{xxx} =$$
$$= D_x(1 + u_x^2 + u u_{xx}) - u u_{xxx} =$$
$$= 2 u_x u_{xx} + u_x u_{xx} =$$
$$= 3 u_x u_{xx}$$

Verifichiamo la relazione di ricorrenza: secondo questa, dovremmo avere

$$\Psi^{(2)} = D_x \Psi - (D_x \xi) u_{xx} =$$
$$= D_x\left[1 + u_x^2\right] + (D_x u) u_{xx} =$$
$$= 2 u_x u_{xx} + u_x u_{xx} = 3 u_x u_{xx}.$$

<u>esempi non scalari:</u>

1) $(u; x, y)$ $\quad R_x \oplus S_y$

$\xi_1 = \xi = -y$, $\xi_2 = \eta = x$, $\varphi = ku$

$$\Psi_{(x)} = D_x(\varphi - \xi u_x - \eta u_y) + (\xi u_{xx} + \eta u_{xy})$$
$$= D_x(ku + y u_x - x u_y) + (-y u_{xx} + x u_{xy}) =$$
$$= k u_x + y u_{xx} - u_y - x u_{xy} - y u_{xx} + x u_{xy} =$$
$$= k u_x - u_y$$

$$\Psi_{(y)} = D_y(ku + y u_x - x u_y) + (-y u_{xy} + x u_{yy}) =$$
$$= k u_y + u_x$$

$$X^{(1)} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + ku \frac{\partial}{\partial u} + (k u_x - u_y) \frac{\partial}{\partial u_x} + (k u_y + u_x) \frac{\partial}{\partial u_y}$$

[Per $k=0$, la rot. ha luogo anche nel piano (u_x, u_y)]

2) $\xi = Kx, \quad \varphi_1 = -u_2 = -v, \quad \varphi_2 = u_1 = u$

$$\Psi^{(1)} = D_x(\varphi^1 - \xi u_x) + \xi u_{xx} =$$
$$= D_x(-v - Kx\, u_x) + Kx\, u_{xx} =$$
$$= -v_x - K u_x$$

$$\Psi^{(2)} = D_x(\varphi^2 - \xi v_x) + \xi v_{xx} =$$
$$= D_x(u - \cancel{Kx\, v_x})\, \xi v_{xx} =$$
$$= u_x - K v_x$$

$$X^{(1)} = \left(Kx \frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(-v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v}\right)$$
$$- (v_x - K u_x) \frac{\partial}{\partial u_x} + (u_x - K v_x) \frac{\partial}{\partial v_x}$$

Per $K=0$, ho rotaz. anche nel piano (u_x, v_x)

Esempi $\quad \underline{x}, \underline{u} \to R\underline{x}, R^{-1}\underline{u}$

$\underline{x}, \underline{u} \to R\underline{x}, \underline{u}$

$\underline{x}, \underline{u} \to \underline{x}, R\underline{u}$

Lo spazio dei jets e formulazione geometrica

Abbiamo già usato l'idea (per calcolare la prima prolongation) di introdurre una nuova variabile p e di richiedere poi che questa sia in realtà $p \equiv u_x$.

Questo può essere reso sistematico, per qualunque ordine e qualunque dimensione degli spazi delle x e delle u

$$x \in X \simeq \mathbb{R}^q \qquad u \in U \simeq \mathbb{R}^p$$

introduciamo $r_1 = p \cdot q$ nuove variabili u^α_i, che a volte scriverò come p^α_i, $u^\alpha_i \in U_{(1)} \simeq \mathbb{R}^{p \cdot q}$.

Nello studio dell'azione di un gruppo di trasformazioni – e in realtà in ogni altra questione – possiamo e dobbiamo considerare le u^α_i come indipendenti dalle (x,u).

L'informazione che $u^\alpha_i = \partial u^\alpha / \partial x^i$ viene codificata introducendo in

$$J^1 M = X \times U \times U_{(1)} \simeq \mathbb{R}^K$$

una struttura di contatto; questa può

essere descritta attraverso delle <u>1-forme di contatto</u>

$$\omega^\alpha = du^\alpha - u^\alpha_i\, dx^i \qquad \alpha = 1, \dots, p$$

Ad esempio, per $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\omega = du - p\, dx$$

Queste identificano dei <u>piani di contatto</u>, ossia una distribuzione di piani $(k-p)$-dimensionali in $T(S'M)$ $(T_m(S'M) \simeq \mathbb{R}^k)$, identificati dall'annullarsi delle forme di contatto, cioè $\mathrm{Ker}(\omega^1) \cap \dots \cap \mathrm{Ker}(\omega^p)$

Gli elementi di $T_m(S'M)$ sono vettori in m e (gli elem. di $T(S'M)$ sono campi di vettori su $S'M$

$$Y = \xi^i(x,u,p)\, \partial_{x^i} + \varphi^\alpha(x,u,p)\, \partial_{u^\alpha} + \Psi^\alpha_i(x,u,p)\, \partial_{p^\alpha_i}$$

La richiesta che Y sia nella distribuzione di contatto (v. fig. 1 a p. 5) si scrive

$$Y \lrcorner\, \omega = 0$$

(spiegare / ricordare cos'è $\lrcorner$)

Esempio scal. 1º ordine

$$Y = \xi\, \partial_x + \varphi\, \partial_u + \psi\, \partial_p$$

$$Y \lrcorner\, \omega = \varphi - p\xi = \varphi - u_x \xi$$

2º ordine: $\quad Y = \xi \partial_x + \varphi \partial_u + \psi \partial_p + \chi \partial_q$

$$\omega = du - p\,dx$$
$$\vartheta = dp - q\,dx$$

$$Y \lrcorner\, \omega = \varphi - p\xi$$
$$Y \lrcorner\, \vartheta = \Psi - q\xi$$

<u>Problema</u>: trovare un campo normalizzato da $Y \lrcorner\, dx = 1$ che sia nella distr. di contatto

<u>Soluz.</u> $\xi = 1$; $\varphi = p\xi = p$; $\Psi = q\xi = q$ -

In $\mathrm{Ker}(\omega) \cap \mathrm{Ker}(\vartheta)$, $\partial u/\partial x = p$; $\partial p/\partial x = q$

$$\varphi = p = u_x \; ; \quad \Psi = q = u_{xx}$$

$$Y = \partial_x + u_x\, \partial_u + u_{xx}\, \partial_{u_x} \equiv D_x$$

<u>Definizione</u>: Un campo è detto di contatto se preserva la struttura di contatto; ossia se $\mathcal{L}_Y(\omega^\alpha) = \lambda^\alpha_\beta\, \omega^\beta \quad \forall \alpha = 1, \dots, p$

($\mathcal{L}_Y$ è la derivata di Lie)

La prolongation formula si può ottenere richiedendo che il campo Y sia di contatto.

Vediamo la dimostrazione per la prima prolongation:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y(\omega) &= Y \lrcorner d\omega + d(Y \lrcorner \omega) = \\
&= -Y \lrcorner (dp \wedge dx) + d(Y \lrcorner (du - p\,dx)) = \\
&= -\psi\, dx + \xi\, dp + d[\varphi - \xi p] = \\
&= -\psi\, dx + \xi\, \cancel{dp} + d\varphi - p\, d\xi - \xi\, \cancel{dp} \\
&= -\psi\, dx + \varphi_x dx + \varphi_u du - p\xi_x dx - p\xi_u du \\
&= (\varphi_x - p\xi_x - \psi)\, dx + (\varphi_u - p\xi_u)\, du
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{L}_Y(\omega) = \lambda\omega = \lambda(du - p\,dx) \Rightarrow$$

$$\lambda = \varphi_u - p\xi_u$$

$$\varphi_x - p\xi_x - \psi = -p(\varphi_u - p\xi_u)$$

$$
\begin{aligned}
\psi &= (\varphi_x - p\xi_x) + p(\varphi_u - p\xi_u) \\
&= (\partial_x + p\,\partial_u)[\varphi - p\xi] = \\
&= D_x(\varphi - p\xi)
\end{aligned}
$$

Se $p = u_x$ $\quad \boxed{\psi = D_x(\varphi - \xi u_x) + \xi u_{xx}}$

Quindi: un campo prolungato porta piani di contatto in piani di contatto

NB: La derivata di Lie delle forme di contatto si può calcolare col pull-back:

$$
\begin{aligned}
x &\to \tilde{x} = x + \varepsilon\xi \\
u &\to \tilde{u} = u + \varepsilon\varphi \\
p &\to \tilde{p} = p + \varepsilon\psi
\end{aligned}
$$

~~Usa~~ $\omega = du - p\,dx$

$$
\begin{aligned}
\omega^* = d\tilde{u} - \tilde{p}\, d\tilde{x} &= du + \varepsilon d\varphi - (p + \varepsilon\psi)(dx + \varepsilon d\xi) = \\
&= du - p\,dx + \varepsilon[d\varphi - \psi dx - p\, d\xi] \\
&:= \omega + \varepsilon \mathcal{L}_Y(\omega)
\end{aligned}
$$

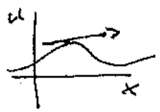
è importante notare che non dobbiamo chiedere $\omega^* = \omega$; in effetti, se $\omega^* = (1 + \varepsilon\lambda)\omega$ o più in generale se $\omega^* = \mu(x,u,p)\cdot\omega$, $Ker(\omega^*) = Ker(\omega)$, cioè questa condizione è equivalente a conservare i piani di contatto.

Osservazione La forma $\omega = du - p\,dx$ soddisfa $d\omega \neq 0$, $\omega \wedge d\omega \neq 0$; più in generale la 1-forma di contatto soddisferà $d\omega \neq 0$ e $\omega \wedge d\omega \wedge \dots \wedge d\omega \neq 0$

Esercizio: Trovare in questo modo la formula per la seconda prolongation ($Y = \xi\partial_x + \varphi\partial_u + \psi\partial_p + \chi\partial_q$; $\omega^1 = du - p\,dx$; $\omega^2 = dp - q\,dx$; $\mathcal{L}_Y(\omega^\alpha) = \lambda^\alpha_\beta \omega^\beta$)

Possiamo estendere ~~un~~ la sez $\gamma_f = (x, u = f(x))$ di M alla sezione $\gamma_f^{(1)} = (x, u = f(x), p = f'(x))$ di $J^1 M$ allo stesso modo, cioè attraverso la struttura di contatto. Il vett. tang. a γ_f in (x,u) è

$$X^{(0)} = \frac{\partial}{\partial x} + f'(x) \frac{\partial}{\partial u}$$



Richiediamo che il vett. tangente a $\gamma_f^{(1)}$ in (x,u,p) sia tangente al piano di contatto

$$X^{(1)} = \partial_x + f'(x)\,\partial_u + h\,\partial_p$$

$$X^{(1)} \lrcorner\, \omega = f'(x) - p = 0$$

cioè $p = f'(x)$ determina come γ_f è innalzata in $J^1 M$ (cioè al punto $p = f'(x) \equiv u_x$)

Ovviamente avremo $h = p_x = f''(x) = u_{xx}$

Lo stesso ragionamento si ripete per ordine n e/o PDEs

Osservazione La funzione $u = f(x)$ determina un campo di vettori in M ~~tangente distribuz~~ (p campi se $u \in \mathbb{R}^p$); la prolongation si determina attraverso la prolongation di questi campi.

Equazioni differenziali e spazi di jets

Possiamo ora riformulare i concetti fondamentali per ED in termini degli spazi di jets.

Δ = eq. diff. di ordine n,

$\Delta : F(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(n)})$

$\Rightarrow$ consideriamo $J = J^n M$

$$\Delta \simeq S_\Delta \subset J \qquad = \{ p \in J^n M : F(p) = 0 \} = F^{-1}(0)$$

diciamo che Δ è non-degenere se $dF \neq 0$ in S_Δ (questo c'è anche per eq. algebriche, es. $(y - x^2)^k = 0$);

c'è corrispondenza 1-1 tra ED e var. sol.

Soluzione $u = f(x)$ è una sezione γ_f di (M, π, X): il lift $\gamma_f^{(n)}$ della sez. a $J^n M$ attraverso la connessione di contatto (cioè chiedendo che sia tangente ai piani di contatto) sia

$$\gamma_f^{(n)} \subset S_\Delta$$

Prolongation Un campo di vettori su M (Lie-point) si prolunga ad un campo di vettori su $J^n M$ richiedendo che preservi la struttura di contatto.

Simmetria Un campo di vettori su $J^n M$ è una <u>simmetria</u> di Δ se $X : S_\Delta \to T S_\Delta$ (questo implica che $\gamma_f^{(n)}$ per f soluz. è trasf. in $\gamma_{\tilde f}^{(n)}$ per $\tilde f$ di nuova soluz, per ε piccolo)

Simmetrie Lie-point Se il campo X è la prolongation di un campo X_0 su M, si dice che X_0 è una simmetria LP di Δ; altrimenti X è una simmetria generalizzata di Δ. Noi distingueremo anche tra le LP quelle per cui $\xi = \xi(t)$, $\varphi = \varphi(t,u)$ ("fisiche").

NB: Un campo in $J^n M$ può preservare la struttura di contatto senza essere la prolongation di un campo LP.

Esercizio: costruire un esempio per $n=1$, $t \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^1$.

Invarianza di equazioni differenziali

Condizione $X : S_\Delta \to T S_\Delta$.

Abbiamo detto che X (per es. prolongation di X_0) è simmetria di Δ se $X : S_\Delta \to T S_\Delta$.

Come si verifica questa condizione?

Una volta calcolati i coefficienti ψ_i^a della prolongation, conosciamo X. Applichiamo X alla funzione $F : J^n M \to \mathbb{R}$ che dà l'equazione $X(F)$; dobbiamo imporre la condizione $F=0$ e verificare che se questa è soddisfatta, $X(F)=0$. Procediamo analogamente per sistemi.

Esempio:

$x = t \in \mathbb{R}^1$; $u \in \mathbb{R}^k$; $\Delta : F^\alpha = 0$,

$$F^\alpha : u^\alpha_t - f^\alpha(u)$$

$$X = \cancel{\xi\partial_t} + \varphi^\alpha \partial_\alpha \qquad \partial_\alpha \equiv \partial/\partial u^\alpha$$

$$X^{(1)} = \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \Psi^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha}$$

$$\Psi^\alpha = D_t \varphi^\alpha = \varphi^\alpha_t + \varphi^\alpha_\beta p^\beta$$

$$X^{(1)} \cdot F^\beta = \Psi^\beta - \varphi^\alpha \partial_\alpha f^\beta =$$

$$= \varphi^\beta_t + \varphi^\beta_\gamma u^\gamma_t - \varphi^\alpha \partial_\alpha f^\beta$$

Su S_Δ, $\varphi^\gamma_t = \rho^\gamma$, e quindi

$$X^{(1)} F^\beta = \varphi^\beta_t + \varphi^\beta_\alpha \, \rho^\alpha - \varphi^\alpha \partial_\alpha \rho^\beta$$

$$= \partial_t \cdot \varphi + [(\rho \cdot \nabla)\varphi - (\varphi \cdot \nabla)\rho]$$

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, \rho\}$$

$$\{\varphi, g\} = h \iff [X_\varphi, X_g] = X_h$$

La condizione $X : S_\Delta \to TS_\Delta$ è quindi anche scritta nella forma

$$X(F)\Big|_{F=0} = 0 \qquad (*)$$

<u>Def.</u> Il sistema $\Delta^\nu(x, u_{(n)}) = 0$ $(\nu = 1, \dots, r)$ è di rango massimo se la jacobiana $J = \left(\frac{\delta \Delta^\nu}{\delta x^i}, \frac{\delta \Delta^\nu}{\partial u^\alpha_J}\right)$ è di rango r su S_Δ.

<u>Thm</u>: Se Δ è di rango massimo, allora G è un gruppo di simmetria di Δ se e solo se $(*)$ è verificata per ogni generatore di G.

Remark Se Δ non max rank, $\exists\, \tilde{\Delta}$ max rank equivalente a Δ.

<u>ESEMPI</u>

<u>Esempio 1:</u> $X^{(1)} = -u\,\partial_x + x\,\partial_u + (1 + u_x^2)\,\partial_{u_x}$

$$\Delta : \quad (u - x) u_x + u + x = 0$$

$$X^{(1)}(\Delta) = (1 + u_x^2)(u - x) + u_x (x + u) + x - u =$$
$$= (u - x) + (u - x) u_x^2 + (u + x) u_x - (u - x) =$$
$$= u_x [(u - x) u_x + u + x] = u_x \cdot \Delta$$

Su $\Delta = 0$, $X^{(1)}(\Delta) = 0 \Rightarrow X$ è simmetria

In questo caso (rotazioni) è bene passare a coordinate polari (r, θ); $r = \sqrt{u^2 + x^2}$; $\theta = \operatorname{arctg}(u/x)$; $x = r\cos\theta$; $u = r\sin\theta$.

$$\cancel{\frac{du}{dx} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{x}{r}\sin\theta + \frac{(-u/x^2)}{1 + (u/x)^2}\, r\cos\theta}$$

$$= \cancel{\frac{x\,r}{x^2}\sin\theta - \frac{u}{x^2 + u^2}\, r\cos\theta}$$

$$= \cancel{\frac{\ \ }{(x^2 + u^2)}} \cdot [\ \ ]$$

l'equaz. è equivalente a $\alpha = 0$,

$$\alpha = (u-x)\,du + (u+x)\,dx$$

$$= r(\sin(\theta)-\cos(\theta))\left[\sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta\right] +$$

$$+ r(\sin(\theta)+\cos(\theta))\left[\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta\right] =$$

$$= r\left[\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right] dr - r^2\left[\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right] d\theta$$

$$= r\left[dr - r\, d\theta\right]$$

Cioè nelle coord. polari (r,θ) l'equazione diventa

$$\frac{dr}{d\theta} = r$$

ovviamente invariante sotto rotazioni; le soluzioni sono spirali logaritmiche

$$r = \rho\, e^{\theta} \qquad (\rho = \text{cost.})$$

e ovviamente la rotazione porta una spirale in un'altra: $X_{(0)} = \partial_\theta = X^{(1)}$;

$$X:\ \rho\, e^{\theta} \to \rho\, e^{(\theta+s)} = (\rho e^{s})\, e^{\theta} = \tilde{\rho}\, e^{\theta}$$

Osservazione Il fatto che un'equazione invariante per rotazioni sia più semplice in coordinate polari non dovrebbe stupire. In seguito vedremo come costruire le coordinate "giuste" per ogni gruppo di simmetria G.

Esempio 2: $X = u\,\partial_u + u_x\,\partial_{u_x}$

$\Delta:\ u_x = K u$

$X(\Delta) = u_x - K u = \Delta$ OK

$$X = \alpha x\,\partial_x + \beta u\,\partial_u + (\beta-\alpha)\, u_x\,\partial_{u_x}$$

$\Delta:\ u_x = f(u/x)$

$$X(\Delta) = (\beta-\alpha)\,u_x - f'(u/x)\cdot\left[\frac{\beta x u - \alpha x u}{x^2}\right] =$$

$$= (\beta-\alpha)\,u_x - (\beta-\alpha)\, f'(u/x)\cdot(u/x)$$

$$= (\beta-\alpha)\left[u_x - \left(\frac{u}{x}\right) f'(u/x)\right]$$

$$\begin{cases} \text{per } \beta \neq \alpha \Rightarrow f(u/x) = K(u/x) \\ \text{per } \beta = \alpha \Rightarrow \text{ogni } f \text{ va bene} \end{cases}$$

Esempio 3: $X = \partial_x$

$\Delta:\ u_x = f(u)$ (sistemi autonomi)

$X(\Delta) = 0$

$X = \partial_u$

$\Delta:\ u_x = f(x)$

$X(\Delta) = 0$

Proprietà dei campi di vettori prolungati

Abbiamo visto in precedenza la prolungation formula

$$\Psi^\alpha_J = D_J(\varphi^\alpha - \xi^i u^\alpha_i) + \xi^i u^\alpha_{J,i}$$

ovvero, in forma ricorsiva,

$$\Psi^\alpha_{J,k} = D_k \Psi^\alpha_J - (D_k \xi^i)\, u^\alpha_{J,i}$$

Che succede se abbiamo più di un campo, ossia campi $X_1, \dots, X_k$ che formano un'algebra di Lie $\mathcal{G}$?

$$[X_i, X_j] = c^k_{ij} X_k$$

Siano $Y_1, \dots, Y_k$ le n-prolongations di $X_1, \dots, X_k$; formano ancora un'algebra?

Thm: $[Y_i, Y_j] = c^k_{ij} Y_k$ $\qquad \mathcal{G}^{(n)} \simeq \mathcal{G}$

Corollario: Le simmetrie di una ED formano una algebra di Lie

Prova del thm Intanto osserviamo che la prol. è un'operazione lineare; i campi di contatto in $J^n M$ sono ovviamente un'algebra (v. def. attraverso preserv. dei piani di contatto) e quindi $[Y_i, Y_j]$ è ancora di contatto. È facile vedere che $\pi [Y_i, Y_j] = [X_i, X_j]$, quindi $[Y_i, Y_j] = pr^{(n)} [X_i, X_j]$.

Esercizio Provare a dimostrare il thm. per calcolo diretto

Prova del cor.: Se $Y_i : S_\Delta \to TS_\Delta$, anche $[Y_i, Y_j] : S_\Delta \to TS_\Delta$; ma allora X_i ($Y_i = pr^{(n)} X_i$) sono LP simm., e $[X_i, X_j]$ è tale che $pr [X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] : S_\Delta \to TS_\Delta$, ossia $[X_i, X_j]$ è simmetria LP.

Notazione L'algebra di simmetria di Δ sarà denotata come $\mathcal{G}_\Delta = \{X \in \mathcal{X}(M) : X^{(n)} : S_\Delta \to TS_\Delta\}$

Caratteristiche dei campi di vettori

Dato un campo $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$,

definiamo la sua caratteristica

$$\boxed{Q^\alpha = \varphi^\alpha - \xi^i u^\alpha_i}$$

La prol. formula diventa

$$\psi^\alpha_J = D_J Q^\alpha + \xi^i u^\alpha_{J,i}$$

Possiamo scrivere il campo evoluzionario associato ad X come

$$X_Q = Q^\alpha(x,u,p) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

i campi X e X_Q hanno le stesse linee integrali (proiettate su M)

Thm $\quad pr^{(n)} X = pr^{(n)} X_Q + \sum \xi^i D_i$

Prova $\quad pr^{(n)} X_Q = \sum (D_J Q^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \qquad$ (per $\xi = 0$)

$$= \sum D_J(\varphi^\alpha - \xi^i u^\alpha_J) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} = pr^{(n)} X - \xi^i u^\alpha_{J,i}$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{J,\alpha} u^\alpha_{J,i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}$$

—

Esempi:

$$X = -u\,\partial_x + x\,\partial_u \quad \to \quad X_Q = (x + u u_x)\,\partial_u$$

$$X = \alpha\,\partial_x + \beta\,\partial_u \quad \to \quad X_Q = (\beta - \alpha u_x)\,\partial_u$$

$$X = \alpha x\,\partial_x + \beta u\,\partial_u \quad \to \quad X_Q = (\beta u - \alpha x u_x)\,\partial_u$$