1

SIMMETRIE DI ODEs E LORO USO

Fattore integrante

L'equazione differenziale

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad \left(\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right)$$

è detta esatta se

$$M dx + N dy = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Questo è il caso se e solo se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

La soluzione dell'equazione sarà allora ovviamente

$$F(x,y) = \text{cost.}$$

Esempio: $[\mathrm{sen}(xy) + xy\cos(xy)]\,dx + x^2\cos(xy)\,dy = 0$,

$$F = x\,\mathrm{sen}(xy)$$

In alcuni casi, anche se l'equazione non è esatta, ammette un fattore integrante μ, tale che

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy = dF$$

Esempio: $(x+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

$$\mu = 1/x^2 \quad ; \quad F = x\,e^{-y^2/x}$$

2

Thm.: Se l'equazione $P dx + Q du = 0$ ha una simmetria $X = \xi \partial_x + \varphi \partial_u$, allora

$$R(x,u) = [\xi P + \varphi Q]^{-1}$$

è un fattore integrante.

Prova: Rivediamo il caso gen. per

$$u_x = F(x,u)$$

$$X^{(1)} = \xi\partial_x + \varphi\partial_u + \underbrace{[D_x(\varphi - \xi u_x) + \xi u_{xx}]}_{\psi}\partial_{u_x}$$

$$X^{(1)}(\Delta) = \psi - \xi F_x - \varphi F_u =$$

$$= \varphi_x + u_x\varphi_u - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \xi F_x - \varphi F_u$$

$$X^{(1)}(\Delta)\Big|_{\Delta=0} = \varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)F - \xi_u F^2 - \xi F_x - \varphi F_u$$

In questo caso, $F = -\dfrac{P}{Q}$; $F_x = -\dfrac{P_x Q - P Q_x}{Q^2}$,

$F_u = -\dfrac{P_u Q - P Q_u}{Q^2}$, e le Det. Eqs. sono

$$\varphi_x + (\varphi_u - \xi_x)\frac{P}{Q} - \xi_u\frac{P^2}{Q^2} + \xi\frac{P_x Q - P Q_x}{Q^2} + \varphi\frac{P_u Q - P Q_u}{Q^2} = 0$$

$$Q^2\varphi_x - PQ(\varphi_u - \xi_x) - P^2\xi_u + \xi(P_x Q - P Q_x) + \varphi(P_u Q - P Q_u) = 0$$

La condizione che R sia un fatt. int. è che

$$\partial_u (RP) = \partial_x (RQ)$$

$$R_u P + R P_u = R_x Q + R Q_x$$

Con l'espressione suggerita per R ho

$$R_x = -R^2 \cdot (\xi_x P + \xi P_x + \varphi_x Q + \varphi Q_x)$$

$$R_u = -R^2 (\xi_u P + \xi P_u + \varphi_u Q + \varphi Q_u)$$

che soddisfa la condizione se e solo se

$$-R^2\left[(\xi_u P + \xi P_u) + (\varphi_u Q + \varphi Q_u)\right] P + R P_u =$$
$$= -R^2\left[(\xi_x P + \xi P_x) + (\varphi_x Q + \varphi Q_x)\right] Q + R Q_x$$

$$-(P^2 \xi_u + \xi P P_u + \varphi_u P Q + \varphi P Q_u) + \frac{1}{R} P_u =$$
$$-(\xi_x P Q + \xi P_x Q + \varphi_x Q^2 + \varphi Q Q_x) + \frac{1}{R} Q_x$$

cioè

$$-(P^2 \xi_u + \cancel{\xi P P_u} + \underline{\varphi_u P Q} + \varphi P Q_u) +$$
$$+ (\underline{\xi_x P Q} + \underline{\xi P_x Q} + \varphi_x Q^2 + \cancel{\varphi Q Q_x}) +$$
$$+ (\cancel{\xi P P_u} + \varphi P_u Q) - (\underline{\xi P Q_x} + \cancel{\varphi Q Q_x}) = 0$$

$$Q^2 \varphi_x - PQ(\varphi_u - \xi_x) - P^2 \xi_u + \xi(P_x Q - P Q_x) +$$
$$+ \varphi(P_u Q - P Q_u) = 0$$

cioè la stessa eq. delle simmetrie.

<u>Osservazione</u> Introducendo il fattore integrante R, l'equazione diviene $dF = 0$, con

$$dF = (RP)\,dx + (RQ)\,du$$

ossia $\dfrac{\partial F}{\partial x} = RP$; $\dfrac{\partial F}{\partial u} = RQ$

Applichiamo X ad F:

$$X(F) = \xi F_x + \varphi F_u = \xi R P + \varphi R Q =$$
$$= R(\xi P + \varphi Q) = 1$$

Dunque il risultato ottenuto sul FI può essere interpretato come segue: esiste una trasf. di coordinate $(x,u) \to (z,F)$ tale che nelle nuove coordinate

$$X = \frac{\partial}{\partial F}$$

e l'equazione $\Delta := R\left[P\,dx + Q\,dy\right] = 0$ si riduce a $F = c$, ovvero Δ non dipende da z.

In effetti, scegliendo $z = x$, l'equazione

$$\frac{du}{dx} = f(x,u) = -\frac{P(x,u)}{Q(x,u)} \quad ; \quad P(x,u)\,dx + Q(x,u)\,du = 0$$

diviene $dF/dz = 0$:

$$dF = RP\,dx + RQ\,du \quad ; \quad dz = dx$$

$$\frac{dF}{dz} = RP + RQ\frac{du}{dx} = RP + RQ\cdot\left(-\frac{P}{Q}\right) = 0$$

5

Coordinate canoniche

In generale, data un'equazione

$$\Delta: \; F(x,u,\dots,u_{(n)})=0$$

che ammette una simmetria

$$X = \xi\partial_x + \varphi\partial_u$$

possiamo (tentare di) passare a nuove coordinate (z,w), così che l'equazione sarà

$$\Delta: \; G(z,w,\dots,w_{(n)})=0$$

in cui $X = \frac{\partial}{\partial w}$ $\underbrace{X^{(n)}=X}$. In questo caso $X(\Delta)=0 \Rightarrow \Delta$ non dipende da w e scrivendo $y = dw/dz$, avremo

$$\Delta: \; H(z,y,\dots,y_{n-1})=0$$

cioè abbiamo abbassato il grado dell'equazione.

Esempio 1: Consideriamo eq. autonoma 2° ord.:

$$\Delta: \; F(u,u_x,u_{xx})=0 \qquad X=\partial_x$$

$$z=u \;,\; w=x$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{w_z} \;;\; \frac{d^2u}{dx} = -\frac{w_{zz}}{w_z^2}\frac{dz}{dx} =$$

$$= -\frac{w_{zz}}{w_z^2}u_x = -\frac{w_{zz}}{w_z^3}$$

6

e $\Delta: \; F(z, 1/w_z, -w_{zz}/w_z^3) =$

$$= H(z, y, y_z) \qquad y := w_z$$

Per

$$u_{xx} = 2uu_x \;\Rightarrow\; -\frac{w''}{w'^3} = 2z\frac{1}{w'}$$

$$\frac{1}{w'}\left(2zw'^2 + w''\right)=0$$

$$2zy^2(z) + y'(z)=0$$

$$\frac{dy}{y^2} = -2z\,dz$$

$$-\frac{1}{y} = -z^2 \; c$$

$$y(z) = \frac{1}{C+z^2}$$

Esempio 2: Eq. lineare omogenea 2° ordine:

$$u_{xx} + p(x)u_x + q(x)u = 0$$

$$X = u\partial_u$$

$$z=x \;,\; w=\ln u$$

$$x=z \;,\; u=e^w$$

$$\partial_u = z_u\partial_z + w_u\partial_w = \frac{1}{u}\partial_w = e^{-w}\partial_w$$

$$X := \partial_w$$

$$\partial_x = \partial_z + u_x/u \, \partial_u$$

$$u = e^w \; ; \quad u_x = w_x e^w$$

$$u_{xx} = (w_{xx} + w_x^2) e^w$$

$$\Delta: \quad (w_{xx} + w_x^2) e^w + p(x) w_x e^w + q(x) e^w =$$

$$= e^w \left[w_{xx} + w_x^2 + p(x) w_x + q(x) \right] = 0$$

$$y \equiv w_x$$

$$\Delta: \quad y_x + y^2 + p(x) y + q(x) = 0 \qquad \text{(Riccati eq.)}$$

OSSERVAZIONE. Nel passare a coordinate canoniche (z, w) stiamo ottenendo che z, w_z, w_{zz}, ... sono invarianti per il campo $X = \partial_w$; in altre parole, qualunque equazione $H(z, w_z, \dots w_{(n)}) = 0$ avrà X come simmetria. Tornando alle variabili iniziali (x,u), qualunque eq. $F(x, u, u_x, \dots, u_{(n)}) = 0$ ottenuta a partire da $H=0$ avrà X come simmetria.

I $w_z = w_z(x,u,u_x)$, $w_{zz} = w_{zz}(x,u,u_x,u_{xx})$, ... sono detti invarianti differenziali per X.

Invarianti differenziali

Un ID per X è una funz. $I_n : J^n M \to \mathbb{R}$: $X^{(n)}(I) = 0$

Esempio
$$X = -u\partial_x + x \partial_u$$
$$X^{(1)} = X + (1 + u_x^2)\partial_{u_x}$$

$$I_0 = \rho = (x^2 + u^2)$$

$$I_1 = \frac{x u_x - u}{x + u u_x}$$

$$I_2 =$$

Thm: Se η, ζ sono ID di ord. n, allora
$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{D_x \zeta}{D_x \eta}$$
è ID di ord. $n+1$.

Prova. La formula ricorsiva della prol. form. è
$$\Psi^{(n+1)} = D_x \Psi^{(n)} - (D_x \xi) u_{n+1}$$
$$X^{(n+1)} = X^{(n)} + \Psi^{(n+1)} \partial_{n+1}$$
$$X^{(n+1)}\left[\frac{D_x\zeta}{D_x\eta}\right] = \frac{\left[X^{(n+1)}(D_x\zeta)\right](D_x\eta) - (D_x\zeta) X^{(n+1)}(D_x\eta)}{(D_x\eta)^2} \qquad (*)$$

Ora notiamo che
$$D_x\left[X^{(n)}(\zeta)\right] = X^{(n+1)}(D_x\zeta) + (D_x\xi)\cdot(D_x\zeta) \qquad (**)$$

Infatti, $\quad [\psi^{(0)} = \varphi, \ \partial_0 = \partial_u]$

$$X^{(n)}(\zeta) = \xi(\partial_x \zeta) + \sum_{k=0}^{n} \psi^{(k)}(\partial_k \zeta)$$

$$D_x\left[X^{(n)}(\zeta)\right] = (D_x \xi)\,\zeta_x + \xi\,\zeta_{xx} + \sum (D_x \psi^{(k)})\,\partial_k \zeta + \sum \psi^{(k)} D_x(\partial_k \zeta)$$

$$= (D_x \xi)\,\zeta_x + \xi\,\zeta_{xx} + \sum \psi^{(k+1)}\,\partial_k \zeta + \sum (D_x \xi)\,u_{k+1}\,\partial_k \zeta + \sum \psi^{(k)} D_x(\partial_k \zeta)$$

$$= (D_x \xi)\left[\partial_x + \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}\,\partial_k \zeta\right] + \xi\,\zeta_{xx} + \sum \psi^{(k+1)}\partial_k \zeta + \sum \psi^{(k)} D_x(\partial_k \zeta)$$

$$= (D_x \xi)(D_x \zeta) + \xi\,\zeta_{xx} + \sum \psi^{(k)} D_x(\partial_k \zeta) + \psi^{(k+1)}(\partial_k \zeta)$$

$$= (D_x \xi)(D_x \zeta) + X^{(n)}(D_x \zeta) + \psi^{(k+1)}(\partial_k \zeta)$$

Ma $\partial_{n+1}[D_x \zeta] = \partial_{n+1}\left[u_{n+1}(\partial_n \zeta)\right] = \partial_n \zeta$,

$$D_x\left[X^{(n)}(\zeta)\right] = (D_x \xi)(D_x \zeta) + X^{(n+1)}(D_x \zeta) \qquad \text{cvd.}$$

Possiamo riscrivere questa relazione, dato che

$$X^{(n)}(\zeta) = 0$$

(essendo ζ un inv. diff. di ord. n), come

$$X^{(n+1)}(D_x \zeta) = -(D_x \xi)(D_x \zeta)$$

e quindi la $(*)$ è

$$X^{(n+1)}\left[\frac{D_x \zeta}{D_x \eta}\right] = \frac{(D_x \zeta)(D_x \eta)(D_x \xi) - (D_x \eta)(D_x \zeta)(D_x \xi)}{(D_x \eta)^2} = 0$$

il che completa la dimostrazione

<u>OSSERVAZIONE</u> Ad ordine 0 possiamo avere al più 1 invar.; se abbiamo due ID di ord. 1, possiamo def.

$$\zeta^{(k+1)} = \frac{D_x \zeta^{(k)}}{D_x \eta}$$

e generare ID di ordine elevato a piacere (indip. dai precedenti) semplicemente calcolando derivate.

Equazioni equivalenti e simmetrie forti

Abbiamo detto che X è simmetria di Δ se
$X^{(n)}[\Delta] = \lambda\,\Delta$, $\quad \lambda : J^n M \to \mathbb{R}$
Se $\lambda \equiv 0$, diciamo che X è una simmetria forte per Δ.

Due equazioni Δ e $\tilde{\Delta}$ sono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Esempio: $\Delta : F(x,u,\dots,u_{(n)}) = 0$ e
$\tilde{\Delta} : [F(x,u,\dots,u_{(n)})]^2 = 0$ sono equivalenti;
come anche Δ e $\tilde{\Delta} = e^{G(x,\dots,u_{(n)})} \cdot F(x,\dots,u_{(n)}) = 0$.

In realtà, questi esempi coprono il caso più generale.

$\Delta : F = 0$ è non degenere se $dF \neq 0$ su S_Δ (l'eq. $F^2 = 0$ è degenere). Due eq. non degeneri Δ e $\tilde{\Delta}$ sono equivalenti $\Leftrightarrow$ $\tilde{\Delta} = e^G\,\Delta$.

Sia μ $(= e^G)$ mai zero, e X simmetria di Δ;
$\tilde{\Delta} = \mu\,\Delta$; $\quad X(\tilde{\Delta}) = X(\mu)\cdot\Delta + \mu\, X(\Delta)$.
$X(\Delta) = \lambda\,\Delta$, $\Rightarrow$ $X(\tilde{\Delta}) = [X(\mu) + \mu\lambda]\,\Delta$
e $\tilde{\Delta}$ ammette X come simm. forte se

$$X(\mu) = -\lambda\mu$$

Thm $\quad$ X è simm. di Δ $\Leftrightarrow$ $\exists\,\tilde{\Delta}$ equiv. a Δ per cui X è simm. forte

Dim: $\quad$ L'eq. precedente si risolve col metodo delle caratteristiche; nelle coord. canoniche $X = \partial_w$ e diviene

$$\partial_w \mu = \lambda\mu$$

$$\frac{dw}{\mu} = \frac{d\mu}{\lambda\mu} \quad ; \quad \mu = \int \lambda(z,w,\dots,w_{(n)})\,dw + \zeta(z,w_{(1)},\dots,w_{(n)})$$

Equazioni con simmetria assegnata

Grazie a questo thm., per determinare la più generale eq. con simmetria X assegnata possiamo lavorare a meno di equivalenza e considerare Δ che abbia X come simmetria forte.
Per questo, basta costruire gli invarianti differenziali fino all'ordine n richiesto (con la "formula magica" $\zeta^{(n+1)} = D_x \zeta^{(n)} / D_x \eta$):
la Δ sarà una funzione arbitraria di
$\eta, \zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n)}$.

Esempio: $X = -u\partial_x + x\,\partial_u \;; \quad n=2$

$\xi = -u\,,\ \varphi = x$

$\eta = x^2 + u^2$

$\zeta^{(1)} = \dfrac{x u_x - u}{x + u u_x}$

$X^{(1)} = X + (1+u_x^2)\partial_1 + 3u_x u_{xx}\,\partial_2$

$$X^{(1)}\cdot\zeta^{(1)} = \Big[(\xi u_x + x\psi - \varphi)(x+uu_x) - (\xi + \varphi u_x + u\psi)(xu_x - u)\Big]\Big/(x+uu_x)^2 =$$

$$= \Big[(-uu_x + x(1+u_x^2) - x)(x+uu_x) - \big(-u + xu_x + u(1+u_x^2)\big)(xu_x - u)\Big]\Big/(\ )^2 =$$

$$= \Big[(xu_x^2 - uu_x)(x+uu_x) - (xu_x + uu_x^2)(xu_x - u)\Big]\Big/(\ )^2$$

$$= \frac{u_x}{(x+uu_x)^2}\Big[(xu_x - u)(x+uu_x) - (x+uu_x)(xu_x-u)\Big] = 0$$

$$\zeta^{(2)} = \frac{D_x\zeta^{(1)}}{D_x\eta} = \frac{(u_x + xu_{xx} - u_x)(x+uu_x) - (xu_x - u)(1+u_x^2+uu_{xx})}{2(x+uu_x)\cdot(x+uu_x)^2}$$

$$= \frac{x^2u_{xx} + x\cancel{uu_x}u_{xx} - xu_x + u - xu_x^3 + uu_x^2 - x\cancel{uu_xu_{xx}} + u^2u_{xx}}{2(x+uu_x)^3}$$

$$= \frac{(x^2+u^2)u_{xx} - (xu_x - u) - u_x^2(xu_x-u)}{2(x+uu_x)^3} =$$

$$= \frac{\eta}{2}\frac{u_{xx}}{(x+uu_x)^3} - \frac{\zeta^{(1)}}{2(x+uu_x)^2} - \frac{\zeta^{(1)}u_x^2}{2(x+uu_x)^2}$$

$$= \frac{\eta}{2}\frac{u_{xx}}{(x+uu_x)^3} - \frac{1}{2}\zeta^{(1)}\frac{1+u_x^2}{(x+uu_x)^2}$$

Controlliamo che $X^{(2)}\zeta^{(2)} = 0$; ovviamente $X^{(2)}(\eta) = X^{(2)}(\zeta^{(1)}) = 0$;

$$X^{(2)}[\zeta^{(2)}] = \frac{1}{2}\left\{\eta\left[\frac{3u_xu_{xx}}{(x+uu_x)^3} - \frac{3u_{xx}\,X^{(1)}[x+uu_x]}{(x+uu_x)^4}\right] + \right.$$

$$\left. - \zeta^{(1)}\left[\frac{2u_x(1+u_x^2)}{(x+uu_x)^2} - \frac{2(1+u_x^2)\,X^{(1)}[x+uu_x]}{(x+uu_x)^3}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(x+uu_x)^3}\left[3(x^2+u^2)u_xu_{xx} - \frac{2(xu_x-u)}{(x+uu_x)}\cancel{(x+uu_x)}u_x(1+u_x^2)\right]\right.$$

$$- \frac{1}{(x+uu_x)^4}\left[3(x^2+u^2)u_{xx} - \frac{2(xu_x-u)}{(x+uu_x)}(1+u_x^2)\cancel{(x+uu_x)}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\left(-u + xu_x + u(1+u_x^2)\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2(x+uu_x)^4}\left\{\Big[3(x^2+u^2)u_{xx} - 2(xu_x-u)(1+u_x^2)\Big](x+uu_x)u_x\right.$$

$$\left. - \Big[3(x^2+u^2)u_{xx} - 2(xu_x-u)(1+u_x^2)\Big](x+uu_x)u_x\right\}$$

$= 0$

Cioè abbiamo effettivamente costruito l'invar. diff. di ordine 2.

Sistemi di equazioni ordinarie 1° ordine

Ogni equazione di ordine n si riduce ad un sistema di n equaz. del 1° ordine; vediamo cosa implica una simmetria per un sistema

$$\frac{du^\alpha}{dx} = F^\alpha(x, \underline{u}) \qquad \alpha = 1, \dots, r$$

Scriviamo la simmetria come

$$X = \xi \partial_x + \sum_{\alpha=1}^{r} \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

$$X^{(1)} = \xi \partial_x + \varphi^\alpha \partial_\alpha + \Psi^\alpha \partial/\partial u^\alpha_x$$

$$\Psi^\alpha = D_x(\varphi^\alpha - \xi u^\alpha_x) + \xi u^\alpha_{xx} =$$
$$= \varphi^\alpha_x + u^\beta_x \varphi^\alpha_{u^\beta} - \xi_x u^\alpha_x - (\partial\xi/\partial u^\beta) u^\alpha u^\beta$$

Passiamo a nuove coordinate (LOCALI!) (y, w^α) per cui $X = \dfrac{\partial}{\partial w^r}$ (thm. del flow box);

ora $y, w^1, \dots, w^{r-1}$ sono invarianti per X, dunque avrò

$$\begin{cases} \dfrac{dw^\alpha}{dy} = G^\alpha(y, w^1, \dots, w^{r-1}) & \alpha = 1, \dots, r-1 \\[2ex] w^r(y) = \displaystyle\int G^r(y, w^1, \dots, w^{r-1})\, dy + c \end{cases}$$

Esempio:

$$\frac{du}{dx} = F(u, v) \qquad\qquad (r = 2)$$
$$\frac{dv}{dx} = G(u, v)$$

$$X = \partial_x$$

$$y = u, \quad w = v, \quad z = x \qquad\qquad (w = w(y),\ z = z(y))$$

$$\frac{dw}{dy} = \frac{dv/dx}{du/dx} = \frac{G(u,v)}{F(u,v)} = \frac{G(y,w)}{F(y,w)} := \varphi(y,w)$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{F(u,v)} = \frac{1}{F(y,w)}$$

Quindi ci siamo ridotti al caso di una equazione

$$\frac{dw}{dy} = \varphi(y, w)$$

e della integrazione

$$dz = \frac{dy}{F(y,w)} \quad ; \quad z = \int \frac{dy}{F(y,w)} + c$$