SIMMETRIE DI PDE'S

L'equazione del calore

L'equazione del calore (o eq. di diffusione) è

$$\Delta: \quad u_t = u_{xx}$$

* Scriviamo $X = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \varphi\partial_u$; la det. eq. è

$$\Psi^{(t)} - \Psi^{(xx)}\Big|_{S_\Delta} = 0$$

Dalla prol. formula,

$$\Psi^{(t)} = \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2$$

$$\begin{aligned}\Psi^{(xx)} = {} & \varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + \\ & - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\varphi_u - 2\xi_x) u_{xx} + \\ & - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}& \varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t) u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 + \\ & - \varphi_{xx} - (2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) u_x + \tau_{xx} u_{xx} - (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 + \\ & + 2\tau_{xu} u_x u_{xx} + \xi_{uu} u_x^3 + \tau_{uu} u_x^2 u_{xx} - (\varphi_u - 2\xi_x) u_{xx} + \\ & + 2\tau_x u_{xxx} + 3\xi_u u_x u_{xx} + \tau_u u_{xx}^2 + 2\tau_u u_x u_{xxx} = 0\end{aligned}$$

0) u_{xxx} : $\tau_x = 0$

1) u_x^3 : $\xi_{uu} = 0$

2) u_x^2 : $\varphi_{uu} - 2\xi_{xu} = 0$

3) $u_x^2 u_{xx}$: $\tau_{uu} = 0$

4) $u_x u_{xxx}$: $\tau_u = 0$

5) $u_x u_{xx}$: $\xi_u + \tau_{xu} = 0$

6) u_{xx} : $\cancel{\varphi_u} - \tau_t + \tau_{xx} - \cancel{\varphi_u} + 2\xi_x = 0$

7) u_x : $+\xi_t + 2\varphi_{xu} - \xi_{xx} = 0$

8) 1 : $\varphi_t - \varphi_{xx} = 0$

(4): $\tau_u = 0 \Rightarrow \tau_{xu} = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \xi_u = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \varphi_{uu} = 0$

$\tau = \tau(x,t)$; $\xi = \xi(x,t)$; $\varphi = A(x,t) + B(x,t)\,u$

$\cancel{\tau_{xx} - \tau_t = 2B_x}$

$$\begin{cases} \tau_t - \tau_{xx} = 2\xi_x \\ \xi_t - \xi_{xx} = -2B_x \\ \varphi_t - \varphi_{xx} = 0 \end{cases}$$

(0) $\tau_x = 0$ $\qquad \tau_t = 2\xi_x \qquad (\partial_x : \ \xi_{xx} = 0$

$\xi_t = -2B_x$

$\varphi_t = \varphi_{xx}$

$\tau = \tau(t)$; $\xi = \mu(t) + \frac{1}{2}\tau_t x$

$$\xi_t = \mu'(t) + \frac{1}{2}\tau_{tt} x = -2B_x$$

$$\partial_x: \quad \frac{1}{2}\tau_{tt} = -2B_{xx}$$

$$B(x,t) = -\frac{1}{8}\tau_{tt} x^2 + \nu(t)\, x + \sigma(t)$$

Ora $\xi_t = -2B_x$ diventa

$$\mu'(t) + \cancel{\tfrac{1}{2}\tau_{tt}x} = \cancel{\tfrac{1}{2}\tau_{tt}x^2} - 2\nu(t)$$

$$\nu(t) = -\frac{1}{2}\mu'(t)$$

$$\tau = \tau(t)$$

$$\xi = \mu(t) + \frac{1}{2}\tau_t x$$

$$B(x,t) = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\mu_t x + \sigma(t)$$

$$\varphi = A(x,t) + B(x,t)u$$

$$\varphi_t - \varphi_{xx} = A_t + B_t u - A_{xx} - B_{xx}u$$

$$= (A_t - A_{xx}) + (B_t - B_{xx})u = 0$$

$$B_t - B_{xx} = -\frac{1}{8}\tau_{ttt}x^2 - \frac{1}{2}\mu_{tt}x + \sigma_t + -\frac{1}{4}\tau_{tt} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_{ttt} = 0 \;;\; \mu_{tt} = 0 \;;\; \sigma_t = \frac{1}{4}\tau_{tt}$$

$$\tau = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$
$$\mu = c_4 + c_5 t$$

$$\sigma_t = \frac{1}{2}c_3 \;;\; \sigma = c_6 + \frac{1}{2}c_3 t$$

$$\tau = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$

$$\xi = \mu + \frac{1}{2}\tau_t x = c_4 + c_5 t + \frac{1}{2}(c_2 + 2c_3 t)x$$

$$\varphi = A + Bu = A(x,t) + \left[-\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\mu_t x + \sigma\right]u =$$

$$= A(x,t) + \left[-\frac{1}{4}c_3 x^2 - \frac{1}{2}c_5 x + c_6 + \frac{1}{2}c_3 t\right]u$$

Le simmetrie sono:

c_1 :	∂_t	∂_t
c_2 :	$t\partial_t + (1/2)x\partial_x$	$2t\partial_t + x\partial_x$
c_3 :	$t^2\partial_t + xt\partial_x - ((1/4)x^2 + t/2)u\partial_u$	$4t^2\partial_t + 4xt\partial_x - (x^2+2t)u\partial_u$
c_4 :	∂_x	∂_x
c_5 :	$t\partial_x - (x/2)u\partial_u$	$2t\partial_x - xu\partial_u$
c_6 :	$u\partial_u$	$u\partial_u$
z :	$A\partial_u \quad (A_t = A_{xx})$	$A(x,t)\partial_u$

Cosa rappresentano queste?

∂_t, ∂_x: traslaz. in x, t $\longleftrightarrow$ eq. autonoma
$u\partial_u$: $u \to \lambda u$, scaling $\longleftrightarrow$ eq. lineare
$2t\partial_t + x\partial_x$: $x \to \lambda x$, $t \to \lambda^2 x$ scaling

z $\quad u \to u + A(x,t)$, A sol. $\longleftrightarrow$ principio di sovrappos. (lineare)

Le c_3, c_5 sono non-banali.

(5)

c_5: $\quad 2t\,\partial_x - xu\,\partial_u$

$$\frac{dt}{ds} = 0 \qquad t(s) = t_0$$

$$\frac{dx}{ds} = 2t \qquad x(s) = x_0 + 2ts = x_0 + 2t_0 s$$

$$\frac{du}{ds} = -xu \qquad \frac{du}{ds} = -x_0 u - 2t_0 u s$$

$$\frac{du}{u} = -x\,ds \qquad \ln u - \ln c = -\int (x_0 + 2t_0 s)\,ds$$

$$\ln u - \ln c = -x_0 s - t_0 s^2$$

$$u = u_0 \exp\left[-x_0 s - t_0 s^2\right]$$

quindi questa simmetria agisce con

$$(t,x,u) \to \left(t,\ x + 2\lambda t,\ u \exp\left[-\lambda^2 t - \lambda x\right]\right)$$

c_3: $\quad 4t^2\,\partial_t + 4xt\,\partial_x - (x^2+2t)\,u\,\partial_u$

$$\frac{dt}{ds} = 4t^2$$

$$\frac{dx}{ds} = 4xt$$

$$\frac{du}{ds} = -(x^2+2t)\,u$$

(6)

$$\frac{dt}{t^2} = 4\,ds \qquad -\frac{1}{t} = 4s - \frac{1}{t_0}$$

$$t(s) = \frac{t_0}{1-4t_0 s}$$

$$\frac{dx}{x} = 4t\,ds = \frac{4t_0}{1-4t_0 s}\,ds$$

$$\ln x = -\ln(1-4t_0 s) + \ln x_0$$

$$x(s) = \frac{x_0}{1-4t_0 s}$$

$$\frac{du}{u} = -(x^2+2t)\,ds = -\frac{x_0^2}{(1-4t_0 s)^2}\,ds - \frac{2t_0}{(1-4t_0 s)}\,ds$$

$$\ln u - \ln c = \frac{x_0^2}{4t_0}\frac{1}{(1-4t_0 s)} + \frac{1}{2}\ln(1-4t_0 s)$$

$$u(s) = c\sqrt{1-4t_0 s}\ \exp\left[\frac{x_0^2}{4t_0}\frac{1}{(1-4t_0 s)}\right]$$

per $s=0$, $\quad u(0) = c\exp\left[x_0^2/4t_0\right] = u_0$

$$c = u_0\, e^{-(x_0^2/4t_0)}$$

$$u(s) = u_0\sqrt{1-4t_0 s}\ \exp\left[\frac{x_0^2}{4t_0}\left(\frac{1}{1-4t_0 s} - 1\right)\right] =$$

$$= u_0\sqrt{1-4t_0 s}\ \exp\left(\frac{x_0^2 s}{1-4t_0 s}\right)$$

(7)

e quindi questa agisce come $\left[D=\sqrt{1-4t\lambda}\right]$

$$(x,t,u) \to \frac{x}{D^2},\ \frac{t}{D^2},\ u\,D\exp\left(\frac{x^2\lambda}{D^2}\right)$$

Ricordiamo che le simmetrie mappano soluzioni in soluzioni; quindi se $u=f(x,t)$ è soluzione, lo è anche $u=\tilde{f}(x,t)$.

∂_t	$\tilde{f}(x,t) = f(x,t-s)$
∂_x	$\tilde{f}(x,t) = f(x-s,t)$
$u\partial_u$	$\tilde{f}(x,t) = \lambda f(x,t)\ ;\ \lambda=e^s$
$2t\partial_t + x\partial_x$	$\tilde{f}(x,t) = f(\lambda x, \lambda^2 t);\ \lambda=e^{-s}$
$2t\partial_x - xu\partial_x$	$\tilde{f}(x,t) = e^{-xs+ts^2} f(x-2st, t)$
(*) $4t^2\partial_t + 4xt\partial_x - (x^2+2t)u\partial_u$	$\tilde{f}(x,t) = \frac{e^{-(x^2s/D^2)}}{D} f\left(\frac{x}{D^2},\frac{t}{D^2}\right)$ $\quad D=\sqrt{1-4ts}$
$A\partial_u \quad (A_t = A_{xx})$	$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) + s\,A(x,t)$

Notiamo che applicando la (*) a $u(x,t)=c$ otteniamo una funzione di forma gaussiana; in particolare per $c=\sqrt{s/\pi}$, ovvero per $s=\pi c^2$,

$$\tilde{f}(x,t) = \frac{c}{\sqrt{1+4\pi c^2 t}} \exp\left[\frac{-\pi c^2 x^2}{1+4\pi c^2 t}\right]$$

(8)

usando poi la traslazione in t, con $s' = -\frac{1}{4s}$, si ottiene

$$\tilde{\tilde{f}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-(x^2/4t)}$$

Più in generale, combinando trasformazioni del gruppo, possiamo ottenere (v. Olver, 2.41).

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+4s_6 t}} \exp\left[s_3 - \frac{s_5 x + s_6 x^2 - s_5^2 t}{1+4s_6 t}\right] \cdot f\left(\frac{e^{-s_4}(x-2s_5 t)}{1+4s_6 t} - s_1,\ \frac{e^{-2s_4} t}{1+4s_6 t} - s_2\right) + A(x,t)$$

L'equazione di Burgers

L'equazione di Burgers è

$$v_t = v_{xx} + 2 v v_x \qquad = D_x\left(v_x + v^2\right)$$

Passando a u tale che $u_x = v$, abbiamo la "potential Burgers" $(v_t = D_x u_t)$

$$u_t = u_{xx} + u_x^2$$

Le determining equations sono perciò

$$\psi^{(t)} - \psi^{(xx)} = 2 u_x \psi^{(x)}$$

il membro a sinistra è stato calcolato per l'equaz. del calore; il membro di destra è

$$2 u_x \left[\varphi_x + (\varphi_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t\right]$$

(attenzione: ora - anche a sinistra - $u_t = u_{xx} + u_x^2$) .

Anziché scrivere tutta l'equazione, estraiamo dapprima i termini con u_{xxx} (dopo la sost. di u_t e di $u_{xt} = u_{xxx} + 2 u_x u_{xx}$).

$$-2\tau_x u_{xxx} - 2\tau_u u_x u_{xxx} = 0 \quad \Rightarrow \tau_x = \tau_u = 0$$

quindi $\tau = \tau(t)$

Il coefficiente di $u_x u_{xx}$ è (usando $\tau_x = \tau_u = 0$) ξ_u, quindi $\xi_u = 0$, $\xi = \xi(x,t)$.

Scriviamo ora le determining equation per $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(x,t)$:

$$\varphi_t - \xi_t u_x + (\varphi_u - \tau_t)(u_{xx} + u_x^2) +$$
$$-\left[\varphi_{xx} + (2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) u_x + \varphi_{uu} u_x^2 + (\varphi_u - 2\xi_x) u_{xx}\right] =$$
$$= 2 u_x \left[\varphi_x + (\varphi_u - \xi_x) u_x\right]$$

(1) u_{xx}: $\quad \varphi_u - \tau_t - (\varphi_u - 2\xi_x) = 0$

(2) u_x^2: $\quad \varphi_u - \tau_t - \varphi_{uu} = 2(\varphi_u - \xi_x)$

(3) u_x: $\quad -\xi_t - (2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) = 2\varphi_x$

(4) 1: $\quad \varphi_t - \varphi_{xx} = 0$

(1): $\tau_t = 2\xi_x$; $\quad \xi = \mu(t) + \frac{1}{2}\tau_t x \quad \Rightarrow \xi_{xx} = 0$

(2) $\Rightarrow$ $\varphi_{uu} + \varphi_u = 2\xi_x - \tau_t = 0$

$$\varphi_u = \Psi, \quad \Psi_u = -\Psi, \quad \Psi = -e^{-u}\cdot \alpha(x,t)$$
$$\varphi = \alpha(x,t)\, e^{-u} + \beta(x,t)$$

ora la (3) si riduce a

$$-\mu_t - \frac{1}{2}\tau_{tt}\, x + 2\alpha_x(x,t)\, e^{-u} = 2\alpha_x e^{-u} + 2\beta_x$$

$$-\mu_t - \frac{1}{2}\tau_{tt}\, x = 2\beta_x$$

∂_x: $\quad -\frac{1}{2}\tau_{tt} = 2\beta_{xx}$

∂_x: $\quad 0 = \beta_{xxx}$

$$\beta(x,t) = w(t) + z(t)\, x + y(t)\, x^2$$

$\beta_{xx} = 2y = -\frac{1}{4}\tau_{tt} \qquad y = -\frac{1}{8}\tau_{tt}$

$\beta_x = z(t) - \frac{1}{8}\tau_{tt}\, x$

$$-\mu_t - \frac{1}{2}\tau_{tt}\, x = 2z - \frac{1}{4}\tau_{tt}\, x \quad ; \quad z = -\frac{1}{2}\mu_t$$

$$\beta(x,t) = w(t) - \frac{1}{2}\mu_t\, x - \frac{1}{8}\tau_{tt}\, x^2$$

(11)

dunque finora (abbiamo usato (1)-(3))

$$\tau = \tau(t)$$
$$\xi = \mu(t) + \tfrac{1}{2}\tau_t\, x$$
$$\varphi = \alpha(x,t)\, e^{-u} + \left[w(t) - \tfrac{1}{2}\mu_t x - \tfrac{1}{8}\tau_{tt}\, x^2\right]$$

Imponiamo ora la (4):

$$(\alpha_t - \alpha_{xx})\, e^{-u} + \left[w_t - \tfrac{1}{2}\mu_{tt} x - \tfrac{1}{8}\tau_{ttt} x^2 + \tfrac{1}{4}\tau_{tt}\right] = 0$$

questa si decompone in 4 equazioni:

$$\alpha_t - \alpha_{xx} = 0$$
$$\tau_{ttt} = 0$$
$$\mu_{tt} = 0$$
$$w_t + \tfrac{1}{4}\tau_{tt} = 0$$

$$\Rightarrow \tau = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$
$$\mu = c_4 + c_5 t$$
$$w_t = -\tfrac{1}{4}\tau_{tt} = -\tfrac{1}{2}c_3; \quad w = -\tfrac{1}{2}c_3 t + c_6$$

$$\tau = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$$
$$\xi = c_4 + c_5 t + \tfrac{1}{2}c_2 x + c_3 t x$$
$$\varphi = \alpha\, e^{-u} + \left[-\tfrac{1}{2}c_3 t + c_6 - \tfrac{1}{2}c_5 x - \tfrac{1}{4}c_3 x^2\right]$$

(12)

X_1: ∂_t
X_2: $2t\partial_t + x\partial_x$
X_3: $4t^2\partial_t + 4xt\partial_x - (x^2+2t)\partial_u$
X_4: ∂_x
X_5: $2t\partial_x - x\partial_u$
X_6: ∂_u
X_α: $\alpha(x,t)\, e^{-u}\partial_u$ $\qquad \alpha_t = \alpha_{xx}$

Notiamo che questa è molto simile all'algebra di simmetrie dell'equazione del calore, ~~che~~ cui differisce solo per X_6 e X_α.

Thm Se $\mathcal{G}_\Delta$ include un'algebra dipendente da una soluz. arbitr. di un'eq. lineare, allora Δ può essere ridotta a questa.

Col cambio di variabili $w = e^u$ $(u = \ln w)$, abbiamo $\partial_u = e^u \partial_w$, e $X_\alpha = \alpha(x,t)\,\partial_w$ (princ. di sovrapp. lineare!!!). In effetti,

$$u_t = \frac{1}{w} w_t\ ; \quad u_x = \frac{1}{w} w_x, \quad u_{xx} = \frac{w_{xx} w - w_x^2}{w^2}$$

$$\Delta:\ u_t - u_{xx} - u_x^2 = \frac{w_t}{w} - \frac{w_{xx}}{w} + \frac{w_x^2}{w^2} - \frac{w_x^2}{w^2} \Rightarrow w_t = w_{xx} \ !!$$

Abbiamo "scoperto" la trasformazione di Hopf-Cole!

1

Simmetrie di equazioni di evoluzione quasi-lineari

Per equazioni della forma

$$u_t = \sum_{K=1}^{N} A_{(K)}^{(x,t)} u_K + f(x,t,u) \qquad (N \geq 2) \qquad (*)$$

le det. eqs. si scrivono

$$\Psi^{(t)} = \sum A_K \Psi^{(K)} + \sum u_K X(A_K) + X(f)$$

$$\Psi^{(K)} = D_x^K [\varphi - \xi u_x - \tau u_t] + \xi u_{K+1} + \tau u_{t,K}$$
$$\Psi^{(t)} = D_t [\varphi - \xi u_x - \tau u_t] + \xi u_{xt} + \tau u_{tt}$$

$$\Psi^{(K)} = (D_K \varphi) - D_{K-1}(u_x D_x \xi + u_t D_x \tau)$$
$$\Psi^{(t)} = (D_t \varphi) - u_x (D_t \xi) - u_t (D_t \tau)$$

Vediamo che i termini u_s, $s > N$ appariranno solo attraverso $\Psi^{(N)}$, e saranno originati da
$(D_x \tau) \cdot D_{K-1} u_t = (D_x \tau) D_{K-1} [A_p u_p + f]$
Il più alto è u_{2N-1}, con coeff. $A_N (D_x \tau) =$
$= A_N \tau_x + A_N u_x \tau_u$, che implica
$\tau_x = \tau_u = 0 \qquad \tau = \tau(t)$

Il termine successivo è u_{2N-2}, con coeff. origin. da
$(D_x^2 \tau)(D_{N-2} u_t) + (D_x \tau)(D_{N-1} u_t) = 0$
etc.; in generale i termini u_p $p > N$ possono essere generati solo da termini contenenti u_t tramite la sostituzione $u_t = \sum A_K u_{(K)} + f$

2

Dato che $\tau = \tau(t)$, $D_x \tau = 0$; segue che

$$\Psi^{(K)} = (D_K \varphi) - D_{K-1}(u_x D_x \xi)$$
$$\Psi^{(t)} = (D_t \varphi) - u_x (D_t \xi) - u_t \tau_t$$

I termini contenenti u_N nelle det. eqs. sono

$$-\tau_t (A_N u_N) + [u_N (D_x \xi) - u_N \varphi_u] A_N - u_N X(A_N)$$

$$-A_N [\varphi_u + \tau_t - \xi_x - u_x \xi_u + X(A_N)/A_N] u_N = 0$$

$$\begin{cases} \xi_u = 0 \\ \varphi_u + \tau_t - \xi_x + A_N^{-1} X(A_N) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima $\xi = \xi(x,t)$; differenziando la seconda in u ho $\varphi_{uu} = 0$, ossia
$\varphi = \alpha(x,t) + \beta(x,t) \cdot u$

<u>Thm:</u> Le simmetrie (Lie-point) di una equaz. della forma $(*)$ hanno generatori della forma
$$X = \tau(t) \partial_t + \xi(x,t) \partial_x + [\alpha(x,t) + \beta(x,t) \cdot u] \partial_u$$

Le formule di prolungamento sono molto meno complicate in questo caso!

<u>Osservazione</u> Il risultato è vero (con la stessa dimostrazione) per qualsiasi dimensione spaziale

Il risultato si estende ulteriormente:

(3)

Equazioni di evoluzione non-lineari

Se abbiamo

$$u_t = A_0 u_N + F(x,t,u,\dots,u_{N-1})$$

(solo deriv. spaziali, non temporali, in F!), allora il risultato resta vero: a ordine $2N-1$ abbiamo $\tau_x = \tau_u = 0$, $\tau = \tau(t)$; a ord. N

$$A_0 u_N \left[\tau_t + \varphi_u - D_x(\xi) + X(A_0)/A_0\right] = 0$$

$\Rightarrow \xi_u = 0$

$\varphi_u + \tau_t - \xi_x + X(A)/A = 0$ $\qquad \partial_u : \quad \varphi_{uu} = 0$

Vediamo ora il caso di un'equazione

$$u_t = A_0 u_N^m + F(x,t,\dots u_{N-1}) \qquad m > 1$$

allora $\tau = \tau(t)$, e a ord. N (cioè per termini in cui appare u_N) abbiamo $[A_0 = A_0(x,t,\,]$

$$A_0 u_N \left[\tau_t + m\, u_N^{m-1} (\varphi_u - D_x\xi) - u_{N-1} D_N \xi) + X^{\cdot} (A_0)/A_0\right]$$

di nuovo, segue che $\xi_u = 0$; inoltre ora $\varphi_u = D_x \xi = \xi_x$, che nuovamente dà $\varphi_{uu} = 0$

Per un'equazione generale di tipo evolutivo,

$$u_t = F(x,t,u,\dots u_N)$$

$$\Psi^{(t)} = \sum_{K=0}^{N} \Psi^{(K)} \partial_K F + \xi(\partial_x F) + \tau(\partial_t F)$$

(4)

ancora una volta il termine u_{2N-1} dà $\tau_x = \tau_u = 0$, dunque $\tau = \tau(t)$. I termini con u_N sono

$$-F\tau_t = u_N\left[\varphi_u - D_x \xi\right] \frac{\partial F}{\partial u_N} + \sum_{K=0}^{N-1} \Psi^{(K)} \partial_K F + \xi \partial_x F + \tau \partial_t F$$

Scriviamo F come somma di termini omogenei in u_N, e sia $A = A(x,t,u,\dots u_{N-1})$ il coeff. del termine u_N^m di grado max - allora per thm. di Eulero

$$A\, u_N^m \left[\tau_t + (\varphi_u - D_x\xi)\, m + \frac{1}{A}\sum \Psi^{(K)} \partial_K A + \xi \partial_x A + \tau \partial_t A\right]$$

$$= A u_N^m \left[\tau_t + m(\varphi_u - \xi_x - \xi_u u_x) + \frac{1}{A} X^{(N-1)}(A)\right] = 0$$

$\Rightarrow \xi_u = 0$

$$\tau_t + m(\varphi_u - \xi_x) + \frac{1}{A} X^{(n-1)}(A) = 0$$

Quindi possiamo concludere che

$$\boxed{\tau = \tau(t), \quad \xi = \xi(x,t)}$$

$$\varphi_{uu} = -\frac{1}{m}\, \partial_u X^{(n-1)}[\ln(A)]$$

①

SOLUZIONI INVARIANTI

Consideriamo l'equaz. $\Delta: \mathcal{F}(x, u, \dots, u_{(n)}) = 0$ con simmetria G_Δ (e algebra $\mathcal{G}_\Delta$); la soluzione $u = f(x)$ è invariante sotto $G \subseteq G_\Delta$ (con algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_\Delta$) se $\forall g \in G$,

$$g(f) = f$$

Ricordiamo che sotto X la funzione $u = f(x)$ si trasforma in

$$\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}) + \varepsilon(\bar{\varphi} - \bar{\xi}^i u_i)$$

dunque $u = f(x)$ è $\mathcal{G}$-invariante se per tutti i generatori $X_\alpha = \xi^i_\alpha(x,u)\partial_i + \varphi_\alpha(x,u)\partial_u$ abbiamo

$$\varphi_\alpha(x, f(x)) = \sum_{i=1}^{q} \xi^i_\alpha(x, f(x))\, \partial_i f(x) \qquad (*)$$

Le soluzioni X-invarianti (ci restringiamo al caso di una sola simmetria per semplicità) sono soluzioni di

$$\begin{cases} \mathcal{F}(x, u, \dots, u_{(n)}) = 0 \\ \varphi(x,u) - \sum \xi^i(x,u)\, u_i = 0 \end{cases}$$

<u>Osservazione</u>: In realtà una soluzione può anche essere invariante sotto un campo di vettori $X \notin \mathcal{G}_\Delta$. Ad esempio $x(t) = 0$ è sol. di $\dot{x} = -x + x^2$, ed è invariante per $x \to -x$ che non è simm. dell'equazione. Per ora non trattiamo questo caso [conditional symmetries, Levi + Winternitz]

②

In effetti, usando coordinate canoniche è possibile effettuare una riduzione per simmetria di $\Delta \to \tilde{\Delta} = \Delta/G$.

Questo si fa con un metodo ben preciso:

(1) Determinare $\mathcal{G}_\Delta$, ossia tutti gli $X : S_\Delta \to TS_\Delta$

(2) Scegliere $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_\Delta$; con s = dim. orbite di G.

(3) Costruire un insieme completo di invarianti (funzionalmente) indipendenti, che chiamiamo

$$y^1 = \eta^1(x,u), \dots, y^{q-s} = \eta^{q-s}(x,u) \qquad (**)$$
$$v^1 = \zeta^1(x,u), \dots, v^p = \zeta^p(x,u)$$

La divisione corrisponde al fatto che vedremo le y^i come var. indip., le v^α come var. dip., $v^\alpha = v^\alpha(y)$. Qui $s = \dim(\mathcal{G})$ come sopra.

NB: Se $\xi^i = \xi^i(x)$, allora le $\eta = \eta(x)$

(4) Se G soddisfa la "condizione di trasversalità" (v. poi), possiamo risolvere le $(**)$ per $(x^1, \dots, x^{p-s}) = \tilde{x}$ e per $u^1, \dots, u^p$; le $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^s)$ sono variabili parametriche e determinano la G-orbita (ad esempio, sono il valore degli invarianti)

$$\tilde{x} = \gamma(y, v; \sigma) \qquad u = \delta(y, v; \sigma) \qquad (***)$$

(5) Usando $(**)$ e $(***)$ possiamo, considerando $v^\alpha = v^\alpha(y)$, differenziare in catena ed esprimere le derivate di u in termini di y, v, v_y e σ: $u_J = \delta^{(s)}(y, v_{(|J|)}; \sigma)$

③

(6) Sostituire le espressioni così ottenute per $x, u, \dots, u_{(n)}$ nell'equazione Δ; in questo modo otteniamo $\Delta/G = \tilde{\Delta}(y, v, \dots, v_{(n)})$ che è indipendente dalle variabili σ.

A questo punto non resta che da risolvere l'equazione ridotta $\tilde{\Delta}$. Se si ottiene una soluzione $v = h(y)$ di questa, allora una soluzione G-invariante di Δ è data da

$$\zeta(x,u) = h\,[\eta(x,u)]$$

Osservazione Le riduzioni rispetto a sottogruppi G e $G' \subseteq G_\Delta$ coniugati in G_Δ sono essenzialmente equivalenti; dunque è sufficiente considerare un insieme di sottogruppi. Questo punto verrà discusso in dettaglio in seguito (forse).

①

Esempio: ancora l'equazione del calore

Applichiamo l'algoritmo all'equazione del calore, considerando in particolare tre classi di soluzioni.

Onde viaggianti Cerchiamo soluzioni invarianti sotto

$$X = \partial_t + c\,\partial_x$$

ossia onde viaggianti con velocità c: infatti X porta $(x,t;u) \to (x + c\lambda,\, t+\lambda;\, u)$; $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x},\tilde{t}) - \varepsilon(\varphi_t + c\varphi_x)$ $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x} - c\lambda, \tilde{t} - \lambda)$. Gli invarianti sono

$$y = \eta(x,t) = x - ct \quad ; \quad v = \zeta(x,t,u) = u$$

e quindi le soluzioni invarianti $v = h(y)$ saranno

$$u = h\,(x - ct)$$

Abbiamo
$$u_t = v_y y_t = -c\,v_y\,;$$
$$u_x = v_y y_x = v_y$$
$$u_{xx} = v_{yy}$$

e quindi

$$\tilde{\Delta} = (u_t - u_{xx}) = -c\,v_y - v_{yy}$$

$$\tilde{\Delta}_\ast : \quad v_{yy} = -c\,v_y \qquad w = v_y \quad w_y = -cw \quad w = e^{-cy} w_0$$

$$v(y) = K_1\,e^{-cy} + K_2$$

Ora torniamo a u, x, t:

$$u(x-ct) = K_1 e^{-c(x-ct)} + K_2$$

<u>Soluzioni invarianti di scala</u> Cerchiamo sol. inv. per

$$X = 2t\partial_t + x\partial_x + 2\alpha u \partial_u$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ una costante (per ora) arbitraria.

* Questo campo genera

$$(x,t,u) \to (\lambda x, \lambda^2 t, \lambda^{2\alpha} u)$$

e lavorando in $t \geq 0$ abbiamo gli invarianti

$$y = x/\sqrt{t} \qquad v = u/t^\alpha$$

$$u = t^\alpha v$$

$$u_x = t^\alpha y_x v_y = t^{\alpha-1/2} v_y$$

$$u_{xx} = t^{\alpha-1} v_{yy}$$

$$u_t = \alpha t^{\alpha-1} v + t^\alpha y_t v_y = \alpha t^{\alpha-1} v - \frac{1}{2} x t^{\alpha-3/2} v_y$$

$$\tilde{\Delta} = u_t - u_{xx} = \alpha t^{\alpha-1} v - \frac{1}{2} x t^{\alpha-3/2} v_y - t^{\alpha-1} v_{yy} =$$

$$= t^{\alpha-1}\left[\alpha v - \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{t}} v_y - v_{yy}\right] =$$

$$= t^{\alpha-1}\left[\alpha v - \frac{1}{2} y v_y - v_{yy}\right]$$

che naturalmente è equivalente a

$$v_{yy} = -\frac{1}{2} y v_y + \alpha v$$

Le soluzioni di questa si scrivono in termini di funzioni speciali (si passa a $w = v e^{y^2/8}$), ma per valori specifici di α la soluzione può essere più semplice.

Per $\alpha = 0$, $v_{yy} = -\frac{1}{2} y v_y$; $w = v_y$,

$w_y = -\frac{1}{2} y w$; $w = \exp(-y^2/4)$;

$$v = K_1 \int e^{-y^2/4}\, dy + K_2 = K_1 E(y) + K_2$$

$$u = t^\alpha v = v = K_1 E(x/\sqrt{t}) + K_2$$

Per $\alpha = -(n+1)/2$, otteniamo

$$v(y) = e^{-y^2} H_n(y) \qquad [H_n = \text{Hermite}]$$

<u>Soluzioni invarianti per X_5.</u>

Infine, consideriamo $X = 2t\partial_x + xu\partial_u$

Gli invarianti sono

$$y = t \qquad v = u\, e^{x^2/4t}$$

(v. i calcoli fatti sull'azione finita di questo)

$$u = v e^{-x^2/4t}$$

$$u_x = -\frac{x}{2t} u \;;\; u_{xx} = -\frac{1}{2t} u + \frac{x^2}{4t^2} u = \left(\frac{x^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) v e^{-x^2/4t}$$

$$u_t = v_y e^{-x^2/4t} + \frac{x^2}{4t^2} v e^{-x^2/4t} = \left(v_y + \frac{x^2}{4t^2} v\right) e^{-x^2/4t}$$

$$\tilde{\Delta} = u_t - u_{xx} = \left[v_y + \frac{x^2}{4t^2} v - \frac{x^2}{4t^2} v + \frac{1}{2t} v \right] e^{-x^2/4t}$$

è equivalente a

$$v_y = -\frac{1}{2y} v$$

$$v(y) = K\, y^{-1/2}$$

$$u(x,t) = v\, e^{-x^2/4t} = \frac{K}{\sqrt{t}}\, e^{-x^2/4t}$$

Notiamo che questa è anche invariante di scala.

SIMMETRIE CONDIZIONALI

Abbiamo osservato in precedenza che una soluzione dell'equazione Δ potrebbe essere invariante sotto una trasformazione che non è una simmetria di Δ; ossia, dato che $u = f(\underline{x})$ viene trasformata da $X = \xi^i \partial_i + \varphi \partial_u$ in $\tilde{f} = f + \varepsilon[\varphi - \xi^i u_i]$, la u in questione sarà soluzione di

$$\begin{cases} \Delta : & F(x, u, \dots, u_{(n)}) = 0 \\ \Delta_s : & \varphi - \sum \xi^i u_i = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

le soluzioni di questo sistema sono ovviamente X-invarianti, e X è una simmetria del sistema (ovvero di Δ ristretta alle funzioni X-invarianti); possiamo dunque usare il nostro formalismo generale per il sistema $(*)$; notiamo comunque che $(*)$ è sovradeterminato (due equaz. per una funzione) e in generale non ha soluzione.

Un campo X per cui $(*)$ ammette soluzione è detto una simmetria condizionale di Δ (è simmetria di Δ con la condizione aggiuntiva Δ_s).

$$X^{(1)}_{;}\left[\Delta_S\right] = X(\varphi) - X(\xi^i)\,u_i - \xi^i\,\Psi^{(i)} =$$

$$= \varphi\cdot\varphi_u + \xi^i\varphi_i - \varphi\,\xi^i_u u_i +$$
$$- \xi^j\xi^i_j u_i - \xi^i\left[D_i\varphi - D_i(\xi^j)\,u_j\right] =$$

$$= \varphi\cdot\varphi_u + \cancel{\xi^i\varphi_i} - \varphi\,\xi^i_u u_i +$$
$$- \xi^j\cancel{\xi^i_j}u_i - \cancel{\xi^i\varphi_i} - \xi^i\varphi_{u}u_i +$$
$$+ \xi^i\cancel{\xi^j_i}u_j + \xi^i\xi^j_u u_i u_j =$$

$$= \varphi_u(\varphi - \xi^i u_i) - \xi^j_u u_j(\varphi - \xi^i u_i)$$
$$= (\varphi_u - \xi^j_u u_j)\,(\varphi - \xi^i u_i) =$$
$$= \left[\partial_u(\varphi - \xi^j u_j)\right](\varphi - \xi^i u_i) =$$
$$= (\partial_u \Delta_S)\cdot\Delta_S$$

e quindi X è, come ovvio, una simmetria di Δ_S

È bene notare alcuni punti:

1) Le simm. cond. <u>non</u> formano un'algebra
2) Le determining eqs. per le simm. di (*), cioè le condizionali di Δ <u>non</u> sono lineari: infatti ξ, φ appaiono sia in X che in Δ_S
3) È superfluo integrare l'azione delle X che sono SC di Δ, dato che questa è triviale sulle soluzioni di (*)
4) Le SC sono altrettanto utili di quelle standard per trovare soluzioni invarianti, e si usano allo stesso modo.

[Questo approccio è dovuto a Levi e Winternitz; la sua relazione col "metodo diretto" di Bluman e Cole è stata chiarita da Pucci e Saccomandi]

<u>Esempio</u> Per illustrare il metodo, usiamo ancora l'equazione del calore $u_t = u_{xx}$, e $X = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \varphi\partial_u$ con $\tau \neq 0$, cosicché riscalando scegliamo $\tau = 1$ (avremo formule più semplici)

$$\Delta_S:\quad u_t + \xi u_x - \varphi = 0$$
$$u_t = \varphi - \xi u_x$$
$$u_{xt} = \varphi_x + \varphi_u u_x - \xi_x u_x - \xi_u u_x^2 - \xi u_{xx}$$

Da queste e $u_t = u_{xx}$,

$$\varphi - \xi u_x = u_{xx}$$

Applichiamo $X^{(2)}$ sul sistema; $X^{(2)}(\Delta_s)\big|_{S_{\Delta_s}} = 0$ per costruzione, quindi dobbiamo solo considerare $X^{(2)}[\Delta]$, cioè

$$\Psi^{(t)} - \Psi^{(xx)}$$

Ora la condizione $\tau = 1$ semplifica le formule rispetto a quelle usate per calcolare le simmetrie dell'equazione del calore: abbiamo

$$\Psi^{(t)} - \Psi^{(xx)}\Big|_{(\tau=1)} = (\varphi_t - \varphi_{xx}) + $$
$$- (\xi_t + 2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) u_x +$$
$$+ (\varphi_u) u_t +$$
$$+ (2\xi_{xu} - \varphi_{uu}) u_x^2 +$$
$$+ \xi_{uu} u_x^3 +$$
$$- (\xi_u) u_x u_t +$$
$$+ (2\xi_x - \varphi_u) u_{xx} +$$
$$+ (3\xi_u) u_x u_{xx}$$

Dobbiamo ora imporre, per restringerci alla varietà soluzione di $(*)$, le relazioni date da Δ e da Δ_s:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u_t &= \varphi - \xi u_x \end{aligned}\right\} u_{xx} = \varphi - \xi u_x$$

$$X^2[\Delta]\big|_{S_\Delta \cap S_{\Delta_s}} =$$

$$= (\varphi_t - \varphi_{xx}) - (\xi_t + 2\varphi_{xu} - \xi_{xx}) u_x +$$
$$+ (\varphi_u)(\varphi - \xi u_x) + (2\xi_{xu} - \varphi_{uu}) u_x^2 +$$
$$+ \xi_{uu} u_x^3 - (\xi_u) u_x (\varphi - \xi u_x) +$$
$$+ (2\xi_x - \varphi_u)(\varphi - \xi u_x) + (3\xi_u) u_x (\varphi - \xi u_x) =$$

$$= (\varphi_t - \varphi_{xx} + \cancel{\varphi\varphi_u} + 2\varphi\xi_x - \cancel{\varphi\varphi_u})$$
$$+ u_x(\xi_{xx} - \xi_t - 2\varphi_{xu} - \cancel{\xi\varphi_u} - \varphi\xi_u + \cancel{\xi\varphi_u} + 3\varphi\xi_u \underset{-2\xi\xi_x}{})$$
$$+ u_x^2(2\xi_{xu} - \varphi_{uu} + \xi\xi_u - 3\xi\xi_u)$$
$$+ u_x^3(\xi_{uu})$$

u_x^3: $\quad \xi_{uu} = 0 \qquad \xi = \alpha(x,t) + \beta(x,t) u$

u_x^2: $\quad 2\beta_x - \varphi_{uu} - 2\alpha\beta - 2\beta^2 u = 0$

$$\varphi_{uu} = 2[\beta_x - \alpha\beta - \beta^2 u]$$

$$\varphi = A(x,t) + B(x,t) u + C(x,t) u^2 + D(x,t) u^3$$

$$\varphi_{uu} = 2C + 6Du = 2(\beta_x - \alpha\beta) - 2\beta^2 u$$

$$\begin{cases} D = -\frac{1}{3}\beta^2 \\ C = \beta_x - \alpha\beta \end{cases}$$

$$\varphi = A + Bu + (\beta_x - \alpha\beta) u^2 - \frac{1}{3}\beta^2 u^3$$

$$u_x: \quad \alpha_{xx} + \beta_{xx} u - \alpha_t - \beta_t u +$$
$$-2\left(B_x + 2(\beta_{xx} - \alpha_x\beta - \alpha\beta_x) u - 2\beta\beta_x u^2\right) +$$
$$2\beta\left(A + Bu + (\beta_x - \alpha\beta) u^2 - \tfrac{1}{3}\beta^2 u^3\right) +$$
$$-2(\alpha+\beta u)(\alpha_x + \beta_x u) = 0$$

$$u^3 \Rightarrow \quad \beta = 0 \rightarrow C = D = 0$$

$$\xi = \xi(x,t) \qquad (=\alpha)$$

$$\varphi = A + Bu$$

$$u_x: \quad \xi_{xx} - \xi_t - 2B_x - 2\xi\xi_x = 0$$

$$1: \quad (A_t - A_{xx}) + (B_t - B_{xx}) u + 2A\xi_x + 2B\xi_x u$$

$$\begin{cases} A_t = A_{xx} + 2A\xi_x \\ B_t = B_{xx} + 2B\xi_x \\ \xi_t = \xi_{xx} - 2B_x - 2\xi\xi_x \end{cases} \qquad (**)$$

Le equazioni $(**)$, che sono più difficili dell'equazione di partenza, sono nonlineari e dunque non si risolvono; possiamo però trovare delle soluzioni particolari abbastanza facilmente.

Esercizio: Controllare che tutte le simmetrie ($r=1$!) ordinarie dell'equazione del calore soddisfano $(**)$; cosa significa questo? È così per ogni equazione?

SIMMETRIE PARZIALI

Il concetto di simmetria condizionale (campo che lascia invarianti alcune soluzioni di Δ, ma non è una simmetria di Δ) può essere esteso al concetto di simmetria parziale: questo è un campo per cui esiste un sottoinsieme di soluzioni $\mathcal{S}_0$ a Δ, con grafici che danno $S^0_\Delta \subset S_\Delta$, lasciato invariante come insieme da X; ovvero abbiamo $X^{(n)}: S^0_\Delta \to TS_\Delta$ pur essendo in generale $X: S_\Delta \not\to TS_\Delta$.

L'insieme $\mathcal{S}_0$ corrisponde alle soluzioni di un sistema

$$\begin{cases} \Delta^{(0)} = 0 \\ \Delta^{(1)} = 0 \\ \vdots \\ \Delta^{(r)} = 0 \end{cases}$$

dove $\Delta^{(k+1)} = X^*[\Delta^{(k)}]$; si ha una PS genuina per

$$X^*(\Delta^{(k)})\big|_{S^{(k)}} \neq 0 \quad ; \quad X^*(\Delta^{(r)})\big|_{S^{(r)}} = 0$$

dove $S^{(k)} = S_{\Delta^{(0)}} \cap \dots \cap S_{\Delta^{(k)}}$

(Le SC corrispondono a $r=1$; in questo caso $\mathcal{S}_0$ è l'unione delle soluzioni invarianti).

__Esempio__

$$\Delta^{(0)}: \; u_t = u_{xx}(1+u) - u_x^2 \quad = u_{xx} + [u u_{xx} - u_x^2]$$

$$X = 2t\,\partial_x - xu\,\partial_u$$

$$\Delta^{(1)} = X^*[\Delta^{(0)}] = x(u_x^2 - u u_{xx})$$

In questo caso $X^*[\Delta^{(1)}]\big|_{S^{(1)}} = 0$ - le soluzioni sono

$$u_{[\lambda]}(x,t) = K \cdot \exp[-x\lambda + t\lambda^2]$$

$$X: \; u_{[\lambda]} \to u(x' - 2t'\lambda, t') \exp[-x'\lambda + t'\lambda^2]$$

$$\varphi \to \tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon(Q = \xi u_x - \tau u_t) =$$

$$= \varphi + \varepsilon[-xu - 2t u_x] =$$

$$= \varphi - \varepsilon[x \cdot u + 2\lambda t\, u] =$$

$$= \varphi - \varepsilon(x + 2\lambda t)\cdot\varphi \neq \varphi$$

Quindi la X (che è SC per un'altra classe di soluzioni) è una SP non banale

__Esempio__

Anziché considerare ancora l'equazione del calore, vediamo un'equazione d'onda:

$$\Delta^{(0)}: \; u_{xx} + u_{yy} + g(u)\,u_{xxx} = 0$$

$$X = y\,\partial_x - y\,\partial_x \qquad \text{(simm. solo se } g(u) \equiv 0\text{)}$$

$$\Delta^{(1)} := X^{(*)}[\Delta^{(0)}]\Big|_{\Delta^{(0)}=0} = 3g(u)\,u_{xxy}$$

$$\Delta^{(1)}: \quad u_{xxy} = 0$$

$$X^{(*)}[\Delta^{(1)}] = 2u_{xyy} - u_{xxx}$$

$$\Delta^{(2)} : \; 2u_{xyy} - u_{xxx} = 0$$

$$X^*[\Delta^{(2)}] = -7u_{xxy} + 2u_{yyy}$$

sulle soluzioni di $\Delta^{(1)}$, $u_{xxy} = 0$, quindi

$$\Delta^{(3)}: \; u_{yyy} = 0$$

$$X^*(\Delta^{(3)}) = -3u_{xyy}$$

$$\Delta^{(4)}: \; u_{xyy} = 0$$

$$X^{(*)}[\Delta^{(4)}] = -2u_{xxy} + u_{yyy} = 0$$

che è zero sulle soluzioni delle eq. precedenti.

Dunque X è una PS (di ordine 5!) per $\Delta^{(0)}$.

(10)

Possiamo determinare la soluzione generale del sistema $\{\Delta^{(0)}, \dots, \Delta^{(4)}\}$:

$$u(x,y) = A \cdot (x^2-y^2) + B\,xy + Cx + Dy + E$$

Solo $u(x,y) = E$ è ~~cost~~ invariante sotto X :

$$X[u] = (2xy+2yx)A + (y^2-x^2)B + Cy - Dx$$

$$= -B(x^2-y^2) + 4xy\,A - Dx + Cy$$

$$u \to \tilde{u} = \tilde{A}(x^2-y^2) + \tilde{B}(xy) + \tilde{C}x + \tilde{D}y + \tilde{E}$$

$$\tilde{A} = A + \varepsilon B$$
$$\tilde{B} = B + \varepsilon(4A)$$
$$\tilde{C} = C + \varepsilon D$$
$$\tilde{D} = D - \varepsilon C$$
$$\tilde{E} = E$$

<u>Osservazione</u> Se consideriamo $\Delta^{(0)}$ con $u_{xxx}=0$ (che implica l'annullarsi del termine che rompe la simmetria), X non è una simmetria del sistema (non lo è per $u_{xxx}=0$) - Le soluzioni non saranno trasformate in soluzioni -

(1)

SIMMETRIE GENERALIZZATE

Campi e simmetrie $\boxed{\text{generalizzate}}$

Un campo di vettori generalizzato in M è un campo $X = \xi^i \partial/\partial x^i + \varphi^\alpha \partial/\partial u^\alpha$ i cui coefficienti ξ^i, φ^α dipendono non solo da (x,u), ma anche dalle derivate di u (fino ad ordine r, detto anche ordine del campo X).

L'estensione di X nello spazio $J^n M$ è ancora definita dalla prolongation formula:

$$X^{(n)} = X + \sum_{|J|=1}^{n} \Psi^{(J)}_{(\alpha)} \partial/\partial u^\alpha_J \; ; \quad \Psi^{(J)}_\alpha = D_J[\varphi^\alpha - \xi^k u^\alpha_k] + \xi^k u^\alpha_{Jk}.$$

Esempio: $X = \boxed{x u_x}\, \partial_x + \boxed{u_{xx}}\, \partial_u \; ; \; \Psi^{(1)} = u_{xxx} - (x u_{xx} + u_x) u_x$

Risulta conveniente introdurre la "estensione infinita" $X^{(\infty)} = X^*$

Una simmetria generalizzata dell'equazione Δ è un campo generalizzato tale che $X^{(*)}[\Delta]\big|_{S_\Delta} = 0$

Esempio: $\Delta: u_t - u_{xx} = 0$; $X = u_x \partial_u$; allora

$X^{(2)} = u_x \partial_u + u_{xt} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + u_{xtt} \partial_{u_{tt}} + u_{xxt} \partial_{u_{xt}} + u_{xxx} \partial_{u_{xx}}$;

$$X^{(2)}[\Delta] = u_{xt} - u_{xxx} = D_x(u_t - u_{xx})$$

$= 0$ su S_Δ (in generale, per ogni op. diff. $\mathcal{D}$, $(\mathcal{D}u)\partial_u$ è

(2)

Campi evoluzionari

Se $\xi \equiv 0$, ossia $X = \varphi^\alpha(x,u,\dots,u_{(n)}) \partial/\partial u^\alpha$, diciamo che X è un campo evoluzionario. In questo caso si scrive abitualmente

$$X \equiv X_Q = Q^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

e Q^α è detta la caratteristica del campo.

Notiamo che per questi campi

$$\Psi^{(J)}_\alpha = D_J(Q^\alpha)$$

Al campo $X = \xi^i \partial_{x^i} + \varphi^\alpha \partial_{u^\alpha}$ associamo il suo rappresentante evoluzionario

$$X_Q = (\varphi^\alpha - \xi^i u^\alpha_i) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

con caratteristiche $Q^\alpha = \varphi^\alpha - \xi^i u^\alpha_i$.

Esercizio: Data una funzione $u = f(x)$, come viene trasformata sotto l'azione di X_Q? E sotto l'azione di un campo X che ha X_Q come rappr. evoluz.?

Notiamo che il calcolo della prolongatione è molto più semplice per campi evoluzionari; sarebbe dunque conveniente potersi ridurre a considerare questi. L'esercizio precedente indica che ciò è possibile.

Thm <u>Il campo X è simmetria dell'eq. Δ se e solo se X_Q lo è.</u>

<u>Dimostrazione:</u> $Q^\alpha = \varphi^\alpha - \xi^i u^\alpha_i$; $X^{(1)} = \xi^i \partial_i + \varphi^\alpha \partial_\alpha + \Psi^{(1)}_\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha_j}$

$$D_J Q^\alpha = (D_J \varphi^\alpha) - D_J(\xi^i u^\alpha_i) =$$

$$= \Psi^{(J)}_\alpha - \xi^i u^\alpha_{J,i}$$

e dunque $\Psi^{(J)}_\alpha = (D_J Q^\alpha) + \xi^i u^\alpha_{J,i}$

$$X^{(n)} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + (D_J Q^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} + \xi^i u^\alpha_{J,i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} =$$

$$= \varphi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + (D_J Q^\alpha) \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} + \xi^i \left[\frac{\partial}{\partial x^i} + u^\alpha_{J,i} \frac{\partial}{\partial u^\alpha_J} \right] =$$

$$= X^{(n)}_Q + \xi^i D^{(n)}_i$$

Abbiamo dunque mostrato che

$$\boxed{X^{(*)} = X^{(*)}_Q + \xi^i D_i} \qquad (*)$$

Applicando questa a Δ, e notando che ovviamente $D_i(\Delta)|_{S_\Delta} = 0$, il teorema è ovvio. ∎

<u>Esempio</u> Consideriamo le simmetrie dell'equaz. del calore

X	X_Q
∂_x	$-u_x \partial_u$
∂_t	$-u_t \partial_u$
$u\partial_u$	$u\,\partial_u$
$2t\partial_t + x\partial_x$	$-(xu_x + 2tu_t)\partial_u$
$2t\partial_x - xu\partial_u$	$-(xu + 2tu_x)\partial_u$
$4t^2\partial_t + 4xt\partial_x - (x^2+2t)u\partial_u$	$-[(x^2+2t)u + 4xtu_x + 4t^2u_t]\partial_u$
$\alpha(x,t)\partial_u$ $\quad [\alpha_t = \alpha_{xx}]$	$\alpha(x,t)\partial_u$

Controlliamo che X_Q siano simmetrie: le prime tre ~~sono~~ ovvie (v. esempio prec.), per $Q^* = xu_x + 2tu_t$

$D_t Q = xu_{xt} + 2tu_{tt} + 2u_t$; $D_x Q = u_x + xu_{xx} + 2tu_{xt}$;

$D_{xx} Q = u_{xx} + u_{xx} + xu_{xxx} + 2tu_{xxt}$. Quindi

$$X^{(*)}_Q[\Delta] = 2u_t + 2tu_{tt} + xu_{xt} - 2u_{xx} - xu_{xxx} - 2tu_{xxt} .$$

Su S_Δ, $u_t = u_{xx}$, $u_{tt} = u_{xxt}$, $u_{xt} = u_{xxx}$.

Per $Q = xu + 2tu_x$, $D_t Q = xu_t + 2u_x + 2tu_{xt}$;

$D_x Q = u + xu_x + 2tu_{xx}$; $D_{xx} Q = u_x + u_x + xu_{xx} + 2tu_{xxx}$

$$X^{(*)}_Q[\Delta] = 2u_x + xu_t + 2tu_{xt} - 2u_x - xu_{xx} - 2tu_{xxx}$$

Per $Q = (x^2+2t)u + 4xtu_x + 4t^2u_t$,

$D_t Q = \underline{2u} + \underline{(x^2+2t)u_t} + \underline{4xu_x} + 4xtu_{xt} + \underline{8tu_t} + 4t^2u_{tt}$;

$D_x Q = 2xu + (x^2+2t)u_x + 4tu_x + 4xtu_{xx} + 4t^2u_{xt}$

$D_{xx} Q = \underline{2u} + 2xu_x + \underline{2xu_x} + \underline{(x^2+2t)u_{xx}} + 4tu_{xx} + \underline{4tu_{xx}} + 4xtu_{xxx} + 4t^2u_{xxt}$

$$X_Q^*[\Delta] = (2u-2u) + (x^2+2t)(u_t - u_{xx}) + 4x(u_x - u_x) + $$
$$+ 4xt(u_{xt} - u_{xxx}) + 8t(u_t - u_{xx}) +$$
$$+ 4t^2(u_{tt} - u_{xxt})$$

e nuovamente X_α è ovvia.

Simmetrie triviali e simmetrie equivalenti

Se Q^α è zero sulle soluzioni di Δ, $D_J Q^\alpha$ è anche zero, e dunque X_Q è una simmetria di Δ; queste simmetrie sono dette triviali (esempio: $Q^\alpha = \Delta \cdot f^\alpha$ o $(D_i \Delta) \cdot f^\alpha$).

Due campi X_P, X_R tali che $X_P - X_R = X_Q$ è una simmetria triviale di Δ, generano simmetrie equivalenti.

Thm Per un sistema di ODEs del 1° ordine, $u^\alpha_x = f^\alpha(x,u)$, ogni simmetria general. è equivalente ad una simmetria ordinaria con $\xi = 0$.

Dim Su S_Δ, $u^\alpha_x = f^\alpha$; $u^\alpha_{xx} = D_x f^\alpha = \partial_x f^\alpha + u^\beta_x f^\alpha_{u^\beta} = \partial_x f^\alpha + f^\beta \partial_\beta f^\alpha$ etc.; dunque tutte le derivate si esprimono in termini di x ed usando f.
$X_Q = Q^\alpha[x, u, u_x, \dots, u_{(n)}]\partial_u$ è quindi equivalente alla sua espressione ottenuta scrivendo $u_x, u_{xx}, \dots$ in questo modo:
$X_P = Q^\alpha[x, u, u_x(x,u,f), u_{xx}(x,u,f), \dots]\partial_{u^\alpha} \equiv P^\alpha(x,u)\partial_{u^\alpha}$ ∎

Esercizio: Come si estende questo risultato per equazioni di ordine superiore?

Calcolo delle simmetrie generalizzate

Per calcolare le simm. gener. di ordine r dato, procediamo come per le simmetrie standard, avendo cura di ricordare che ora ξ e φ, ossia Q, può dipendere non solo da x e u ma anche da $u_{(1)}, \dots, u_{(r)}$.
Possiamo evitare la ridondanza corrispondente a simmetrie equivalenti usando Δ già nell'espressione per ξ, φ, Q

Esempio: $r=1$, $\Delta: u_t = uu_x$; $Q = Q(x,t,u,u_x,u_t)$ ma per $u_t = uu_x$ basta considerare $Q = Q(x,t,u,u_x)$.

$$D_t Q = \partial_t Q + u_t \partial_u Q + u_{xt}\partial_{u_x} Q ; \qquad X_Q = Q\,\partial_u$$
$$D_x Q = \partial_x Q + u_x \partial_u Q + u_{xx}\partial_{u_x} Q$$

$$X_Q^*[\Delta] = (D_t Q) - u_x Q - u(D_x Q) =$$
$$= \partial_t Q - u\,\partial_x Q + (u_t - uu_x)\partial_u Q +$$
$$+ (u_{xt} - uu_{xx})\partial_{u_x} Q - u_x Q$$

$$X_Q^*[\Delta]\big|_{S_\Delta} = (\partial_t Q - u\partial_x Q) + (uu_{xx} + u_x^2 - uu_x)\partial_{u_x} Q - u_x Q =$$
$$= \partial_t Q - u\,\partial_x Q + u_x^2 \partial_{u_x} Q - u_x Q = 0$$

$$dt = \frac{dx}{-u} = \frac{du_x}{u_x^2} = \frac{dQ}{-u_x}$$

Notiamo che $Q = u_x$ è soluz. part.; quindi $Q = u_x\, P(x,t,u,u_x)$ con P soluz. dell'omog. associata [$\mathcal{L}(Q) = \alpha Q$; $Q = f \cdot P$; $\mathcal{L}(f)\cdot P + f\mathcal{L}(P) = \alpha(f) \cdot P$]

u è invariante, $u\,dt = -dx$, $ut = -x + c_2$;
$x + ut$ è anche invar.; $du_x/u_x^2 = -\frac{dx}{u}$; $-1/u_x = -\frac{1}{u}x + \tilde{c}_3$;

$\frac{u}{u_x} - x = u\tilde{c}_3 = c_3$;

$$P = P\left(x+ut,\ u,\ \frac{u}{u_x} - x\right)$$

$$Q = u_x\, P\left(x+ut,\ u,\ \frac{u}{u_x} - x\right)$$ -

<u>Attenzione</u> L'integrazione dell'azione infinitesima descritta da X_Q presenta delle sottigliezze, v. la discussione in [Olver, sez. 5.1] -

<u>Thm</u>: Se X_Q è evoluzionario e $F = F(x, u, \dots, u_{(n)})$,
$X_Q^{(n)}[D_i F] = D_i[X_Q^{(n)}(F)]$ -
Viceversa, se questa relazione è verificata, ossia se il campo Y su $J^n F$ soddisfa (∀F!)
$Y[D_i F] = D_i[Y F]$, allora $Y = X_Q^* + \sum_{i=1}^{q} c_i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

<u>Dim</u>: Scriviamo $Y = \xi^i \partial_i + \sum \Psi^{\alpha}_{(J)} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{(J)}}$; allora

$$YF = \xi^k (\partial_k F) + \Psi^{\alpha}_{(J)} \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}_J}$$

$$D_i(YF) = (D_i \xi^k)(\partial_k F) + \xi^k D_i(\partial_k F) + (D_i \Psi^{\alpha}_{(J)}) \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}_J} + \Psi^{\alpha}_{(J)} D_J\left(\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J} F\right)$$

Dato che $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum u^{\alpha}_{J,i} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J}$,

$$[D_i, \partial_k] = 0 \ ; \quad \left[D_i, \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J}\right] = -\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{(J-e_i)}}$$

$$D_i(YF) = (D_i \xi^k)(\partial_k F) + \xi^k \partial_k (D_i F) + \Psi^{\alpha}_{(J,+e_i)} \frac{\partial F}{\partial u^{\alpha}_J} +$$

$$= (D_i \xi^k)(\partial_k F) + \left(\xi^k \partial_k + \Psi^{\alpha}_J \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J}\right)(D_i F) =$$

$$= (D_i \xi^k)(\partial_k F) + Y(D_i F)$$

Per l'arbitrarietà di F, deve essere $(D_i \xi^k) = 0$ $\forall i, k$. ∎

<u>Corollario</u> Se X_Q è simm. di Δ, lo è anche per $(D_J \Delta)$ -

<u>Thm.</u> Se X_P, X_Q sono evoluzionari, allora $[X_P, X_Q] = X_R$ è evoluz. con caratteristica

$$R^{\alpha} = X_P^*(Q^{\alpha}) - X_Q^*(P^{\alpha})$$

<u>Dim.</u> $[X_P, D_i] = [X_Q, D_i] = 0$; lo stesso vale per $[X_P, X_Q]$ (che non contiene $\partial/\partial x^i$) - Quindi $[X_P, X_Q]$ è evoluzionario. L'espressione della caratt. è elementare -

<u>Thm</u> I campi evoluz. formano un'algebra di Lie. Le simm. gener. di Δ formano un'alg. di Lie -

⑨

Equazioni di evoluzione

Consideriamo un sistema di equazioni di evoluzione:

$$\Delta^\alpha : \; u^\alpha_t = F^\alpha[u] \qquad = F^\alpha(x, t, \partial u/\partial x, \partial^2 u/\partial x^2, \dots) \qquad (*)$$

e cerchiamo simmetrie evoluzionarie $X_Q = Q^\alpha \partial_\alpha$.

Usando $(*)$, possiamo non fare dipendere Q^α da $u_t, u_{xt}, \dots$

$Q^\alpha = Q^\alpha[u]$.

$$X_Q^*\left[u^\alpha_t - F^\alpha[u]\right] = \left(D_t Q^\alpha\right) - Q^\beta \partial_\beta F^\alpha - \sum (D_J Q^\beta) \partial_\beta F^\alpha =$$

$$\partial_t Q^\alpha + \sum u^\beta_{J,t} \frac{\partial Q^\alpha}{\partial u^\beta_J} - D_J Q^\beta \frac{\partial F^\alpha}{\partial u^\beta_J} +$$

e su S_Δ

$$X_Q^*[\Delta]\Big|_{S_\Delta} = \partial_t Q^\alpha + (D_J F^\beta) \frac{\partial Q^\alpha}{\partial u^\beta_J} - (D_J Q^\beta) \frac{\partial F^\alpha}{\partial u^\beta_J} =$$

$$= \partial_t Q^\alpha + X_F^*(Q^\alpha) - X_Q^*(F^\alpha)$$

Abbiamo quindi mostrato che:

Thm: X_Q è simm. di $u^\alpha_t = F^\alpha[u]$ se e solo se

$$X_{(\partial Q/\partial t)} = \left[X_Q, X_F\right]$$

Osservazione Con la notazione

$$\{P, Q\}^\alpha = X_P^*(Q^\alpha) - X_Q^*(P^\alpha)$$

questa si riscrive

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\{F, Q\}$$