①

SIMMETRIE DI PROBLEMI VARIAZIONALI

Equazioni di Eulero - Lagrange

Ricordiamo le equazioni di Eulero - Lagrange per un sistema con azione

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\, dt$$

Scelta una variazione $q \to q + \delta q$ ($\Rightarrow \dot{q} \to \dot{q} + \delta\dot{q} = \dot{q} + d_t \delta q$)

$$\delta S = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt =$$

$$= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \frac{d}{dt} \delta q^i \right] dt =$$

$$= \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \delta q^i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i \right] dt + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Se $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$, $\delta S = 0$ è equivalente (per l'arbitrarietà di δq^i) a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = 0$$

Per una teoria di campo, anziché $q = q(t)$ abbiamo $\phi^a = \phi^a(\underline{x})$ e l'azione sarà

$$S = \int_D \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi; x)\, d^n x \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

②

Per una variazione $\phi^a \to \phi^a + \delta\phi^a$, che implica $\partial_\mu \phi^a \to \partial_\mu \phi^a + \delta(\partial_\mu \phi^a) = \partial_\mu \phi^a + \partial_\mu(\delta\phi^a)$,

$$\delta S = \int_D \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \delta(\partial_\mu \phi^a) \right] dx^\mu$$

$$= \int_D \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta\phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \partial_\mu (\delta\phi^a) \right] dx^\mu$$

$$= \int_D \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \right] (\delta\phi^a)\, dx^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} (\delta\phi^a) \Big|_{\partial D}$$

e per $\delta\phi^a = 0$ su ∂D, $\delta S = 0$ dà

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} = 0$$

<u>Osservazione</u>: Procedendo allo stesso modo, ~~per~~ lagrangiane di ordine superiore (dipendenti da derivate di ordine più alto) si ha ad es.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \phi^a)} = 0$$

Teorema di Noether (meccanica)

Consideriamo una simmetria della lagrangiana, ossia X che lascia $\mathcal{L}$ invariata

$$X = \varphi^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i}$$

$$X^{(1)} = \varphi^i(q) \frac{\partial}{\partial q^i} + D_t(\varphi^i) \frac{\partial}{\partial \dot q^i} =$$

$$= \varphi^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j}\right) \dot q^j \frac{\partial}{\partial \dot q^i}$$

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = \varphi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} + \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j} \dot q^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i} = 0$$

usando EL,

$$\varphi^i \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i} + \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial q^j} \dot q^j\right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i} = 0$$

$$D_t\left[\varphi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i}\right] = 0$$

Abbiamo mostrato che <u>la quantità</u>

$$I(q,\dot q,t) = \varphi^i(q) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i}$$

<u>è conservata sotto il flusso dinamico</u>

(teorema di Noether)

<u>Osservazione</u> La dimostrazione resta valida anche per $\varphi = \varphi(q,t)$: ora $\Psi^{(1)} = \varphi^i_t + \dot q^j \partial\varphi^i/\partial q^j = D_t\varphi^i$

e $X^{(1)}[\mathcal{L}] = \varphi^i \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} + (D_t\varphi^i)\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i}$; Se $X^{(1)}[\mathcal{L}]=0$, usando EL abbiamo

$$\varphi^i \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i} + (D_t\varphi^i)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i} = D_t\left[\varphi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^i}\right] = 0$$

Se $\tau \neq 0$, bisogna far attenzione a come si modificano il dominio e la misura di integrazione in $A = \int \mathcal{L} dt$.

Teorema di Noether (teoria dei campi)

Il thm. e la sua dim. restano validi anche nel contesto della teoria dei campi:

$$X = \eta^\alpha(x,\phi)\frac{\partial}{\partial \phi^\alpha} \quad ; \quad \Psi^{(\alpha)}_{(i)} = D_i \eta^\alpha$$

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = \eta^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} + (D_i\eta^\alpha)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_i}$$

Se $X^{(1)}[\mathcal{L}]=0$, usando EL,

$$\eta^\alpha \frac{d}{dx^i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_i} + (D_i\eta^\alpha)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_i} = D_i\left[\eta^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_i}\right] = 0$$

ed abbiamo una legge di conservazione

$$\sum_{i=1}^{q} D_i\left[\eta^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_i}\right] = 0$$

<u>Leggi di conservazione</u>

Consideriamo un sistema Δ di eq. per $\phi = \phi(\underline{x}, t)$
Una legge di conservazione è un'espressione

$$D_t \rho + \sum D_i \sigma^i \qquad \rho = \rho(x,t,\phi,\dots\phi_{(n)}),\ \sigma = \sigma(x,t,\dots\phi_{(n)})$$

che si annulla su S_Δ – La ρ è detta densità conservata, $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \dots, \sigma^{n-1})$ è il flusso associato – Consideriamo

$$R_\Omega = \int_\Omega \rho(x,t,\phi, \dots \phi_{(n)})\, d^n x \equiv R_\Omega[\phi]$$

<u>Thm</u>: Se $(\rho, \vec{\sigma})$ danno una legge di cons. per Δ, allora

$$R_\Omega[\phi](t) - R_\Omega[\phi](t_0) = -\int_{t_0}^{t} \left(\int_{\partial\Omega} \vec{\sigma}(x, \theta, \phi, \dots, \phi_{(n)}) \cdot d\vec{s} \right) d\theta$$

e viceversa se questa vale $\forall t, \Omega$ allora $(\rho, \vec{\sigma})$ definiscono una legge di cons.

<u>Dim</u>: $$\frac{d}{dt} R_\Omega[\phi](t) = \int_\Omega (D_t \rho)\, d^n x = -\int_\Omega (D_i \sigma^i)\, d^n x = -\int_{\partial\Omega} \vec{\sigma} \cdot d\vec{s}$$

per il thm. della divergenza – Viceversa questo può essere vero per Ω arbitrario solo se $D_t \rho = -\mathrm{Div}(\sigma)$ – ∎

<u>Cor.</u> Se Ω è limitato e $\sigma|_{\partial\Omega} = 0$, allora $R_\Omega[\phi]$ è costante $\forall \phi$ –

<u>Esempio</u> Se $\vec{u}$ è la velocità di un fluido, l'eq. di continuità è

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0$$

in questo caso, $\vec{\sigma} = \rho \vec{u}$ – Ora $R_\Omega = \int_\Omega \rho\, d^n x$ rappresenta la massa nel dominio Ω –

Se $P = (\rho, \vec{\sigma})$ è tale che $P|_{S_\Delta} = 0$, abbiamo una legge di conservazione (triviale)

<u>Esempio</u>: $$\begin{cases} u_t = v_x \\ u_x = v_t \end{cases} \Rightarrow u_{xx} = u_{tt}$$

$$\rho = \frac{1}{2}(u_x^2 + u_t^2) \quad ; \quad \sigma = -u_t u_x$$

$$D_t \rho + D_x \sigma = u_x u_{xt} + u_t u_{tt} - u_t u_{xx} - u_x u_{xt} = u_t (u_{tt} - u_{xx}) = u_t \cdot \Delta$$

Possiamo avere una situazione ancor più degenere se $\mathrm{Div}(P) = 0 \quad \forall \phi$ (anche non soluz. di Δ); in questo caso parliamo di legge di conservazione nulla (come per le lagrangiane)

Thm $\mathrm{Div}(P) \equiv 0$ se e solo se esistono funz. $Q_{ij} = -Q_{ji}$ tali che
$$P_i = D_j Q_{ij}$$

(è una versione "totale" del lemma di Poincaré).

Per $n=3$ abbiamo che $\mathrm{Div}(P) \equiv 0$ se e solo se P è il "rotore totale" di $\tilde{Q}$, $P_i = \varepsilon_{ijk} D_j \tilde{Q}_k$

Esempio di Legge di conservazione

Abbiamo visto in precedenza (thm. di Noether per teoria dei campi) che per $X = \eta^\alpha \partial/\partial\phi^\alpha$ una simmetria di $\mathcal{L}$ (e quindi una simmetria variazionale: X non agisce su (x,t), quindi $\mathcal{L} d^n x = \mathcal{L}\, dt\, d^{n-1}\vec{x}$ è preservata) la legge di conservazione associata si scrive

$$D_t\, \eta^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_t} + D_i\, \eta^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_i} = 0$$

In questo caso, dunque
$$\rho = \eta^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_t} \; ; \qquad \sigma^i = \eta^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_i}$$

$$R = \int_\Omega \rho\, d^{n-1}x \; ; \qquad \frac{dR}{dt} = -\int_{\partial\Omega} \vec{\sigma} \cdot d\vec{s}$$

Simmetrie variazionali

Nel caso di un problema variazionale definito dalla n-forma $\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\phi}, \underline{\phi}_x, \dots)\, d^n x$, diciamo che X è una simmetria variazionale se preserva $\mathcal{L} d^n x$. (detta anche "simmetria di Noether")

Abbiamo $L_{X^{(1)}}[\mathcal{L} d^n x] = [X^{(1)}(\mathcal{L})]\, d^n x + \mathcal{L} L_X d^n x$;

scrivendo $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial \phi^\alpha}$,

$L_X(d^n x) = \mathrm{Div}(\xi) \cdot d^n x$ (perché $d^n x$ è la forma di volume!) e quindi

$$L_{X^{(1)}}[\mathcal{L} d^n x] = \left(X^{(1)}[\mathcal{L}] + \mathcal{L}\, \mathrm{Div}(\xi) \right) d^n x$$

ovvero X è simmetria variazionale per $\mathcal{L}$ se e solo se (NB: la def. verrà estesa in seguito)

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] + \mathcal{L}\, \mathrm{Div}(\xi) = 0$$

Esempio: Per $q=1$, $p=1$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t; q, \dot{q})$ e $X = \tau \partial_t + \eta \partial_q$; $X^{(1)} = X + \Psi \partial_{\dot{q}}$

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = \tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + [(D_t \eta) - (D_t \tau)\dot{q}] \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

$\mathrm{Div}(\tau) \equiv (D_t \tau)$

quindi X è SV se e solo se

$$\tau \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + (D_t \eta) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} + (D_t \tau)\left[\mathcal{L} - \dot{q} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right] = 0$$

Esempio:

Il problema delle geodesiche corrisponde a

$$\mathcal{L} = \sqrt{1+\dot{q}^2}$$

Vediamo $X = -q\partial_t + t\partial_q$; $\tau = -q$, $\eta = t$;

$\partial\mathcal{L}/\partial t = \partial\mathcal{L}/\partial q = 0$

$$(D_t\eta)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} + (D_t\tau)\left(\mathcal{L} - \dot{q}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right) =$$

$$= + \frac{1}{2\sqrt{1+\dot{q}^2}}\,2\dot{q} - \dot{q}\left(\sqrt{1+\dot{q}^2} - \frac{\dot{q}^2}{\sqrt{1+\dot{q}^2}}\right) =$$

$$= \frac{\dot{q}}{\mathcal{L}} - \dot{q}\left(\frac{1+\dot{q}^2-\dot{q}^2}{\mathcal{L}}\right) = 0$$

Quindi le rotazioni in (t,q) generano una simmetria variazionale

Osservazione Se nell'ambito lagrangiano è naturale richiedere l'invarianza della forma $\mathcal{L}\,dt$, in quello hamiltoniano dovremo trattare questa come la forma $p_i dq^i - H\,dt$. Un campo che preserva questa sarà detta una simmetria di Cartan.

Thm: Se X e Y sono SV per $\mathcal{L}$, lo è anche $[X,Y]$; dunque le SV di $\mathcal{L}$ formano un'algebra di Lie.

Dim: Ovvia dato che SV $\Leftrightarrow$ preservare $\mathcal{L}\,d^nx$.

Lagrangiane nulle

Se le equazioni di EL per $\mathcal{L}$ sono identicamente soddisfatte, diciamo che $\mathcal{L}$ è una lagrangiana nulla. (La situazione è non-triviale a livello globale, v. teorie di Chern-Simons)

Se $\vec{P} = (P^1, \dots, P^n)$ è una funzione $\vec{P}: J^kM \to \mathbb{R}^n$,

$\mathrm{Div}(P) = D_\mu P^\mu$.

Thm $\mathcal{L}$ è nulla se e solo se $\mathcal{L} = \mathrm{Div}(P)$.

Dim Diamo la dim. per $\mathcal{L}$ del primo ordine (il caso generale è analogo). Se $\mathcal{L} = \mathrm{Div}(P)$,

$$S = \int_B \mathcal{L}\,d^nx = \int_B \mathrm{Div}(P)\,d^nx = \int_{\partial B}\vec{P}\cdot d\vec{\sigma}$$

e $\delta S \equiv 0$ per $\delta\phi = 0$ su ∂B.

Viceversa, sia $\mathcal{L}$ nulla;

$$\delta S = \int_B\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha}\delta\phi^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha_\mu}\delta\phi^\alpha_\mu\right)d^nx =$$

$$= \int_B\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha}\delta\phi^\alpha + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha_\mu}D_\mu\delta\phi^\alpha\right)d^nx =$$

$$= \int_B\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - D_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha_\mu}\right)\delta\phi^\alpha + \int_B D_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\mu_\alpha}\delta\phi^\alpha\right)d^nx$$

$$= \int_B D_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\mu_\alpha}\delta\phi^\alpha\right]d^nx = \int_B \mathrm{Div}\left[\hat{P}(\phi,\phi_\mu^\alpha,\delta\phi)\right]d^nx$$

$$\hat{P}^\mu := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\mu_\alpha}\delta\phi^\alpha \quad ; \quad \hat{P}^\mu\Big|_{\partial B} = 0 \qquad (\delta\phi^\alpha = 0)$$

Quindi $\delta S = 0 \ \forall \delta\phi : \delta\phi|_{\partial B} = 0$; per $\mathcal{L}$ abbiamo

$$\mathcal{L}(x,\phi,\phi_\mu) = \mathcal{L}(x,\varepsilon\phi,\varepsilon\phi_\mu)\big|_{\varepsilon=1} =$$
$$= \mathcal{L}(x,0,0) + \int_0^1 \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varepsilon}(x,\varepsilon\phi,\varepsilon\phi_\mu)\, d\varepsilon =$$
$$= \mathcal{L}(x,0,0) + \int_0^1 \int_B \mathrm{Div}\left[\hat{P}(\varepsilon\phi,\varepsilon\phi_\mu,\varepsilon\delta\phi)\right] d^n x =$$
$$= \mathcal{L}(x,0,0) = \mathrm{div}(P(x))$$

Corollario $\mathcal{L}$ e $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mathrm{Div}(P)$ determinano le stesse equazioni di Eulero - Lagrange.

Si tratta di un'immediata generalizzazione del fatto ben noto che in meccanica possiamo sempre eliminare da $\mathcal{L}$ una derivata totale dF/dt.

Lagrangiane equivalenti

Dato il risultato precedente, diremo che $\mathcal{L} \approx \tilde{\mathcal{L}}$ se $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$ con $\delta\mathcal{L}$ una lagrangiana nulla ($\mathcal{L}$ e $\tilde{\mathcal{L}}$ sono equivalenti)

Osservazione: Notiamo che $\mathcal{L}$ e $\tilde{\mathcal{L}} = \lambda\mathcal{L}$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$) determinano le stesse EL, ma non sono equivalenti.

Simmetria delle equazioni di Eulero - Lagrange

Se X preserva $\mathcal{L}\, d^n x$, sarà ovviamente anche una simmetria delle equaz. di EL; il viceversa NON è vero: le EL sono lasciate invarianti anche, in generale, da trasf. che non sono una simm. variaz. per $\mathcal{L}$.

Esempio Per l'oscillatore armonico,
$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(q^2 + \dot{q}^2)$; la trasf. $X = q\,\partial_q$,
$X^{(1)} = q\,\partial_q + \dot{q}\,\partial_{\dot{q}}$ non lascia $\mathcal{L}$ invariata:
$X^{(1)}[\mathcal{L}] = 2\mathcal{L}$, $e^{\lambda X^{(1)}}[\mathcal{L}] = e^{2\lambda}\mathcal{L}$
D'altra parte, $X^{(1)}$ è ovviamente una simmetria delle EL, ossia $\Delta : \ddot{q} + q = 0$.

In particolare, se $X^{(1)}[\mathcal{L}]$ è una lagrangiana nulla (o una lagr. equiv. a $\mathcal{L}$), le equaz. di EL saranno preservate da X.

Thm Se $X = \xi^i \partial/\partial x^i + \eta^\alpha \partial/\partial\phi^\alpha$ soddisfa per qualche funzione $P : J^n M \to \mathbb{R}^q$

$$X^{(n)}[\mathcal{L}] + \mathcal{L}\,\mathrm{Div}(\xi) = \mathrm{Div}(P)$$

allora X è simmetria delle equazioni di EL per $\mathcal{L}$.

Dim: $e^{\lambda X^{(n)}}[\mathcal{L}] = \mathcal{L}_{(\lambda)}$ è equivalente a $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{(0)}$ *

④

Osservazione: Per quanto detto prima, il teorema vale anche per

$$X^{(n)}[\mathcal{L}] + \mathcal{L}\,\mathrm{Div}(\xi) = \mathrm{Div}(P) + \sigma\mathcal{L}$$

con $\sigma \in \mathbb{R}$, anche se in questo caso $e^{\lambda X^{(n)}}[\mathcal{L}] = \mathcal{L}_{(\lambda)}$ non è equivalente a $\mathcal{L}$.
Notiamo comunque che in questo caso abbiamo sempre $\tilde{X} = \tilde{\xi}^i \partial_{x^i} + \tilde{\eta}^a \partial_{u^a}$ che è nelle condizioni del thm. precedente, con $\tilde{\eta}^a = \eta^a$, $\tilde{\xi}^i = \xi^i + \sigma x^i$.

①

Simmetrie variazionali (bis)

Le considerazioni precedenti inducono ad estendere il concetto di simmetria variazionale: diremo che X è simm. var. se preserva $\mathcal{L}dt$ a meno di forme nulle, ossia a meno di $\mathcal{R}dt$ con $\mathcal{R}$ una lagr. nulla. In altre parole, se

$$X^{(n)}[\mathcal{L}] + \mathcal{L}\,\mathrm{Div}(\xi) = \mathrm{Div}\, P$$

Notiamo che per campi evoluzionari ($\xi = 0$) questa si riduce a $X^{(n)}[\mathcal{L}] = \mathrm{Div}(P)$.
Per il caso della meccanica, abbiamo che X è SV di $\mathcal{L}$ se $\exists F$ per cui ($F = F(t,q,\dot{q})$)

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = D_t F$$

Notiamo che il teorema di Noether, nella forma vista in precedenza, trattava il caso $D_t F = 0$; è naturale chiedersi se con la nuova def. di simm. var. abbiamo ancora quantità conservate associate alle SV.

Teorema di Noether (bis)

Assumiamo che X sia SV per $\mathcal{L}$; dunque

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = D_t P \qquad (*)$$

e $$X^{(1)}[\mathcal{L}] = \eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^a} + (D_t \eta^a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a}$$

Sulla varietà soluzione per EL,

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = \eta^a \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} + (D_t \eta^a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} =$$

$$= D_t \left(\eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \right)$$

Da $(*)$ abbiamo dunque

$$D_t \left(\eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} \right) = D_t F$$

$$D_t \left[\eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} - F \right] = 0$$

Dunque, abbiamo ancora una quantità conservata

$$I(t,q,\dot{q}) := \eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^a} - F$$

(Per F=cost. ci riduciamo al caso considerato in precedenza)

Osservazione La dimostrazione resta valida se η^a dipendono anche da $\dot{q}, \ddot{q}$ etc. (in realtà una volta ridottici alla S_Δ la dip. da $\ddot{q}$ e derivate superiori si elimina); dunque il thm sulla conservazione di I vale anche per $\eta^a = \eta^a(t,q,\dot{q})$ -

In particolare, consideriamo un campo $X = \tau \partial_t + \varphi^\alpha \partial_\alpha$ ed il suo rappresentante evoluzionario $X_Q = Q^\alpha \partial_\alpha$, $Q^\alpha = \varphi^\alpha - \tau \dot{q}^\alpha$ -

Se X_Q è SV per $\mathcal{L}$, abbiamo la quantità conservata suindicata.

Thm X è SV per $\mathcal{L}$ se e solo se il suo rappr. evoluz. X_Q lo è -

Dim: Abbiamo visto in precedenza che

$$X^{(n)} = X_Q^{(n)} + \xi^i D_i$$

In questo caso ciò significa

$$X^{(1)} = X_Q^{(1)} + \tau D_t$$

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = X_Q^{(1)}[\mathcal{L}] + \tau (D_t \mathcal{L})$$