Se X è SV per $\mathcal{L}$, $\exists F$ per cui

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] + \mathcal{L}(D_t \tau) = dF \quad ; \qquad (*)$$

usando la relazione precedente,

$$X^{(1)}_Q[\mathcal{L}] + \tau(D_t\mathcal{L}) + \mathcal{L}(D_t\tau) = dF$$

$$X^{(1)}_Q[\mathcal{L}] = D_t F - D_t(\tau\mathcal{L}) = $$
$$= D_t(F - \tau\mathcal{L})$$
$$= D_t(F_Q)$$

<u>Thm</u> Se X è SV di $\mathcal{L}$ e soddisfa $(*)$, allora la quantità

$$I := (\varphi^\alpha - \tau\dot{q}^\alpha)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} - F + \tau\mathcal{L} =$$
$$= \left(\varphi^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha} - F\right) + \tau\left[\mathcal{L} - \dot{q}^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^\alpha}\right]$$

è conservata.

<u>Dim</u> Segue immediatamente dal thm. precedente e dal thm. di Noether per simm. variaz. evoluzionarie.

<u>Osservazione</u> Con la notazione $p_\alpha = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}^\alpha$,

$$I = (p_\alpha\varphi^\alpha - F) - \tau(p_\alpha\dot{q}^\alpha - \mathcal{L}) = (p_\alpha\varphi^\alpha - F) - H\tau$$

<u>Teorema di Noether per la teoria dei campi (bis)</u>

Possiamo ripetere la discussione anche nel quadro della teoria dei campi; ora $X = \eta^\alpha\partial/\partial\phi^\alpha$ è SV di $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\phi}, \phi_\mu, \dots)$ se $\exists P = (P^1, \dots, P^r)$:

$$X^{(n)}[\mathcal{L}] = \mathrm{Div}(P)$$

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = \eta^\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} + (D_\mu\eta^\alpha)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha_\mu} = D_\mu P^\mu$$

usando EL,

$$X^{(1)}[\mathcal{L}]\Big|_{S_\Delta} = \eta^\alpha D_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha_\mu} + (D_\mu\eta^\alpha)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha_\mu} =$$
$$= D_\mu\left[\eta^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha_\mu}\right] = D_\mu P^\mu$$

e quindi la legge di conservazione è

$$D_\mu\left[\eta^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha_\mu} - P^\mu\right] = 0$$

Abbiamo considerato il caso di X evoluzionario; come già per la meccanica, questa non è in realtà una limitazione.

Thm X è SV per $\mathcal{L}$ se e solo se il suo rappr. evoluz. lo è.

Dim: $X^{(n)} = X_Q^{(n)} + \xi^\mu D_\mu$

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] = X_Q^{(1)}[\mathcal{L}] + \xi^\mu D_\mu \mathcal{L}$$

Ma se X è SV per $\mathcal{L}$, $\exists F = (F^1, \dots, F^q)$ per cui

$$X^{(1)}[\mathcal{L}] + \mathcal{L}\,\mathrm{Div}(\xi) = \mathrm{Div}(F) \qquad (*)$$

Usando la rel. precedente,

$$X_Q^{(1)}[\mathcal{L}] + \xi^\mu D_\mu \mathcal{L} + \mathcal{L} D_\mu \xi^\mu = D_\mu F^\mu$$

$$X_Q^{(1)}[\mathcal{L}] = D_\mu\left(F^\mu - \mathcal{L}\xi^\mu\right) =$$

$$:= D_\mu\left[F_Q^\mu\right]$$

Thm Se $X \overset{= \xi^\mu \partial_\mu + \eta^\alpha \partial_\alpha}{}$ soddisfa $(*)$, allora si ha una legge di conservazione

$$D_\mu\left[\left(\eta^\alpha - \xi^\mu \phi^\alpha_\mu\right)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_\mu} - \left(F^\mu - \mathcal{L}\xi^\mu\right)\right] =$$

$$= D_\mu\left[\left(\eta^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_\mu} - F^\mu\right) + \xi^\mu\left(\mathcal{L} - \phi^\alpha_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_\mu}\right)\right] = 0$$

Dim: Immediata dai risultati precedenti.

Osservazione: Se $\pi^\mu_\alpha = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha_\mu}$, la legge di conservazione si scrive

$$D_\mu\left[\left(\pi^\mu_\alpha \eta^\alpha - F^\mu\right) + \xi^\mu\left(\mathcal{L} - \pi^\mu_\alpha \phi^\alpha_\mu\right)\right] =$$

$$= D_\mu\left[\left(\pi^\mu_\alpha \eta^\alpha - F^\mu\right) - \mathcal{H}\xi^\mu\right] = 0$$

Operatori di ricorrenza

Se per l'equazione Δ ogni volta che $X_Q = Q^\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u}$ è una simmetria, anche $\tilde{\mathcal{R}}X_Q = (\mathcal{R}Q)^\alpha[u]\frac{\partial}{\partial u}$ lo è, diciamo che $\mathcal{R}$ è un operatore di ricorrenza per Δ.

Osservazione. Una simmetria porta soluzioni in soluzioni; un OR porta simmetrie in simmetrie. In qualche senso, l'OR è una simmetria delle determining equations (per simm. evoluz.); notiamo comunque che l'OR in generale cambia l'ordine di X_Q.

Esempio. $\Delta: u_t - u_{xx}$, $\mathcal{R} = D_x$.
Infatti X_Q è SG di Δ se $D_tQ - D_{xx}Q = 0$, e se Q soddisfa questa, anche D_xQ va bene. (naturalmente ogni $\mathcal{R} = D_x^k$ va bene; inserire dei D_t è inutile perché su S_Δ $D_t = D_x^2$)

Quindi se abbiamo una simmetria X_{Q_0} ad un OR, possiamo ottenere un'infinità [illegible] ...tria.

Esempio. Per l'eq. del calore, con $Q_0 = u$,

$Q_1 = \mathcal{R}Q_0 = u_x$, $Q_2 = \mathcal{R}Q_1 = u_{xx}$,

$Q_3 = \mathcal{R}Q_2 = u_{xxx}$, ...

Abbiamo anche un secondo operatore di ricorrenza, $\mathcal{R}_2 = tD_x + \frac{1}{2}x$. Questo dà

$Q_4 = \mathcal{R}_2 Q_0 = tu_x + \frac{1}{2}xu$;

$Q_5 = \mathcal{R}_2 Q_1 = tu_{xx} + \frac{1}{2}xu_x$

$Q_6 = \mathcal{R}_2 Q_2 = tu_{xxx} + \frac{1}{2}xu_{xx}$

$Q_7 = \mathcal{R}_2 Q_4 = t^2u_{xx} + txu_x + (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}x^2)u$

etc. etc. Notiamo che in questo modo abbiamo ottenuto i rappresentanti evoluz. delle simm. ordinarie di Δ, più altre SG.

Per verificare che $\mathcal{R}_2$ sia un OR,

$$D_t(\mathcal{R}_2Q) - D_x^2(\mathcal{R}_2Q) =$$
$$= D_t\left(tQ_x + \frac{x}{2}Q\right) - D_x^2\left(tQ_x + \frac{x}{2}Q\right) =$$
$$= Q_x + tQ_{xt} + \frac{x}{2}Q_t - tQ_{xxx} - Q_x - \frac{x}{2}Q_{xx} =$$
$$= tD_x(Q_t - Q_{xx}) + \frac{x}{2}(Q_t - Q_{xx}) =$$
$$= \left(tD_x + \frac{x}{2}\right)[Q_t - Q_{xx}].$$

Questo calcolo si può anche interpretare come segue: se $\mathcal{R}_0 = D_t - D_x^2$ è l'operatore associato all'equazione determinante (cioè Q dà una SG di $\Delta \iff Q \in \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_0)$), abbiamo mostrato che

$$[\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_0] = 0$$

Notiamo che $[\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1] = 0$, e che

$$[\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_1] = [tD_x + x/2, D_x] = -\frac{1}{2} \ .$$

Più in generale, un OR è un operatore differenziale (totale) che commuta con l'oper. diff. $\mathcal{R}_0 \equiv \mathcal{R}_\Delta$ che descrive le equazioni determinanti per le simmetrie (evoluzionarie) di Δ [NB: per Δ lineare questo coincide con l'equaz., per Δ nonlineare no; v. poi]

Non è noto se tutte le SG di un'eq. diff. lineare si possono ottenere applicando OR a (rappres. evoluz. di) simmetrie ordinarie.

<u>Thm</u> Se Δ è un sistema di equaz. lineari, allora un oper. diff. lin. $\mathcal{R}$ che non dipende da u e sue derivate è un OR per Δ se e solo se $Q = \mathcal{R}[u]$ è la caratt. di una SG per Δ.

<u>Dim</u> È la def. di OR, ristretta ad equaz. lineari.

<u>Osservazione</u> La teoria delle simm. per Δ lineari può essere sviluppata interamente in termini di operatori di ricorrenza; v. Miller, "Symmetry and separation of variables".

<u>Derivata di Frechet</u>

Per descrivere l'operatore $\mathcal{R}_0$ associato alle determ. eqs. per le simm. evoluz. di Δ, introduciamo (o richiamiamo) il concetto di derivata di Fréchet (der. direz. in sp. funz.)

Se $F = F(x, u, \dots u_{(n)}) \equiv F[u]$, allora

$$\frac{\delta F}{\delta v} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{d}{d\varepsilon}\Big(F[u + \varepsilon v] \Big) := \mathcal{D}_F(v)$$

<u>Esempio</u> $F[u] = u_x u_{xx}$;

$$F[u+\varepsilon v] = (u_x + \varepsilon v_x)(u_{xx} + \varepsilon v_{xx}) =$$
$$= u_x u_{xx} + \varepsilon(u_x v_{xx} + v_x u_{xx}) + \varepsilon^2 v_x v_{xx}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} F[u+\varepsilon v] = (u_x v_{xx} + v_x u_{xx}) + 2\varepsilon v_x v_{xx}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{d}{d\varepsilon} F[u+\varepsilon v] \right) = u_x v_{xx} + v_x u_{xx} = \frac{\delta F}{\delta v}$$

Dunque, la derivata di Frechet è un operatore differenziale, che denoteremo con $\mathcal{D}$; la der. di F nella direz. Q sarà $\mathcal{D}_F(Q)$

<u>Esempio</u>: Nel caso precedente,

$$\mathcal{D}_F = u_x D_x^2 + u_{xx} D_x$$

Thm Se $X_Q = Q^\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ è un campo evoluzionario e $P^\alpha[u] : J^n M \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}_P \cdot Q = X_Q^{(n)}[P]$$

Dim: $$X_Q^{(n)}[P] = \sum (D_J Q^\beta) \frac{\partial P^\alpha}{\partial u^\beta_J} ;$$

d'altra parte,

$$\mathcal{D}_P [Q] = \lim \frac{1}{\varepsilon} P^\alpha [u + \varepsilon Q]$$

e scrivendo $\delta u^\beta = Q^\beta$, $\delta u^\beta_J = D_J Q^\beta$,

$$P^\alpha[u + \varepsilon Q] = \sum \frac{\partial P^\alpha}{\partial u^\beta_J} \delta u^\beta_J = \sum (D_J Q^\beta) \frac{\partial P^\alpha}{\partial u^\beta_J}$$

Dunque stiamo solo dicendo che possiamo esprimere la derivata di Fréchet nel nostro linguaggio dei campi evoluzionari.

La derivata di Fréchet è uno degli strumenti di base dell'analisi funzionale (e quindi era utile discutere la relazione tra il nostro linguaggio e questa); la si incontra anche nelle discussioni usuali dei sistemi di evoluzione nonlineari integrabili.

Operatori di ricorrenza per sistemi nonlineari

Torniamo ora agli operatori di ricorrenza per equazioni nonlineari $\Delta^\alpha : F^\alpha[u] = 0$. Il campo evoluzionario X_Q è simmetria se

$$X_Q^{(\infty)} [\Delta^\alpha] \Big|_{S_\Delta} = 0$$

In altre parole, richiediamo che $X_Q^{(\infty)}(F^\alpha)$ sia nulla su $\vec{F}[u] = 0$; ma

$$X_Q^{(\infty)}[F^\alpha] = \sum (D_J Q^\beta) \frac{\partial F^\alpha}{\partial u^\beta_J}$$

e le equazioni determinanti sono

$$\sum_J \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^\beta_J} \right)_{S_\Delta} \cdot D_J Q^\beta = 0$$

L'operatore a primo membro si può pensare come un operatore differenziale matriciale

$$\mathcal{R}_0{}^\alpha{}_\beta = \sum_J \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^\beta_J} \right) D_J$$

e ovviamente per una sola equazione abbiamo

$$\mathcal{R} := \mathcal{R}_0 = \sum_J \left(\frac{\partial F}{\partial u_J} \right) D_J \qquad (*)$$

Questo operatore descrive (nel caso scalare) le equaz. determ. per simm. evoluz., e quindi la nostra discussione precedente si riduce a:

<u>Thm</u> $\mathcal{R}$ è un operatore di ricorrenza per l'equazione Δ: $F[u]=0$ se e solo se

$$[\mathcal{R}, \mathcal{R}_0]\Big|_{S_\Delta}\Big|_{\mathrm{Ker}\,\mathcal{R}_0} = 0$$

<u>Osservaz.</u> Possiamo sempre pensare $\mathcal{R}$ come dipendente solo da u_J che sono indip. su S_Δ; se $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ su S_Δ, i due OR sono equivalenti.

<u>Osservaz.</u> Come già notato in precedenza, X_Q è SG di $\Delta \iff Q \in \mathrm{Ker}(\mathcal{R}_0)$ -

<u>Corollario</u> Gli OR per Δ formano una algebra di Lie.

Notiamo anche che $\mathcal{R}_0 = \mathcal{D}_F$ (deriv. di Frechet); dunque $\mathcal{R}$ è OR $\iff [\mathcal{D}_F, \mathcal{R}]\Big|_{S_\Delta}\Big|_{\mathrm{Ker}} = 0$, ovvero se esiste un oper. diff. (totale) $\hat{\mathcal{R}}$ tale che $\mathcal{D}_F \mathcal{R} = \hat{\mathcal{R}} \mathcal{D}_F$ -

Notiamo infine che per avere

$$[\mathcal{R}, \mathcal{R}_0]_{\mathrm{Ker}\,\mathcal{R}_0} = 0$$

deve essere $[\mathcal{R}, \mathcal{R}_0] = \sum \mathcal{C}^J[u]\, D_J$

Queste considerazioni si estendono immediatamente al caso di sistemi; ora $\underline{Q}$ è un vettore, $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}_0$ operatori diff. matriciali; X_Q è simm. di Δ se e solo se

$$\underline{Q} \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{R}_0 \qquad (\mathcal{R}_0)^\alpha{}_\beta Q^\beta = 0$$

e $\mathcal{R}$ è OR se e solo se

$$[\mathcal{R}_0, \mathcal{R}] = (\mathcal{C}^J)^\alpha{}_\beta D_J$$

$$\shortparallel$$

$$\mathcal{R}_0{}^\alpha{}_\gamma \mathcal{R}^\gamma{}_\beta - \mathcal{R}^\alpha{}_\gamma \mathcal{R}_0{}^\gamma{}_\beta$$

<u>Esempio</u>: Per l'equazione di Burgers

$$F[u] = u_t - u_{xx} - u_x^2$$

$$\mathcal{R}_0 = D_t - D_x^2 - 2u_x D_x$$

Abbiamo due operatori di ricorrenza:

$$\mathcal{R}_1 = D_x + u_x$$

$$\mathcal{R}_2 = t D_x + t u_x + \frac{x}{2}$$

In effetti, abbiamo

$$\mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 = D_t D_x - D_x^3 - 2u_x D_x^2 + u_{xt} - u_{xxx} - 2u_x u_{xx} - 2u_{xx} D_x + u_x D_t - u_x D_x^2 - 2u_x^2 D_x$$

Su S_Δ, $u_{xt} = u_{xxx} + 2u_x u_{xx}$, quindi

$$\mathcal{R}_0 \mathcal{R}_1 \Big|_{S_\Delta} = D_x D_t - D_x^3 - 2u_x D_x^2 + \cancel{2u_x u_{xx}} - \cancel{2u_x u_{xx}} + u_x D_t - 2u_{xx} D_x - u_x D_x^2 - 2u_x^2 D_x$$

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_0 = D_x D_t - D_x^3 - 2u_{xx} D_x - 2u_x D_x^2 + u_x D_t - u_x D_x^2 - 2u_x^2 D_x$$

$$[\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1]_{S_\Delta} = 0$$

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 = t D_x^2 + t u_{xx} + t u_x D_x + \frac{1}{2} + \frac{x}{2} D_x + t u_x D_x + t u_x^2 + \frac{x}{2} u_x$$

$$\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = t D_x^2 + t u_{xx} + t u_x D_x + t u_x D_x + t u_x^2 + \frac{x}{2} D_x + \frac{x}{2} u_x$$

$$[\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2] = \frac{1}{2} \qquad \text{(commuta con } \mathcal{R}_0\text{)}$$

<u>Attenzione</u> È possibile considerare OR non differenziali ma integrodifferenziali. Questo si applica, ad esempio, nella teoria dei sistemi integrabili (KdV).

<u>Leggi di conservazione per problemi non variazionali</u>

Se $\mathcal{R} = R^J[u]D_J$ è un operatore differenziale, possiamo definire un <u>operatore aggiunto</u> $\mathcal{R}^*$ (formalmente) come l'operatore per cui

$$\int_\Omega (Q \cdot \mathcal{R}^* P)\, dx = \int_\Omega (P \cdot \mathcal{R} Q)\, dx$$

per qualsiasi Ω e per ogni P, Q che si annullino su $\partial\Omega$.

Integrando per parti abbiamo che se $\mathcal{R} = R^J[u]D_J$, allora

$$\mathcal{R}^* = (-D)_J \cdot R_J$$

(cioè $\mathcal{R}^*(Q) = (-D)_J(R_J Q)$).

<u>Esempio</u> Per $x \in \mathbb{R}_1$, $u \in \mathbb{R}_1$, sia $\mathcal{R} = uD_x + D_x^2$; allora $R_0 = 0$, $R_1 = u$, $R_2 = 1$ ($R_k = 0$ $k > 2$).

$\mathcal{R}^*(Q) = (-D_x)(uQ) + (-D_x)^2 Q = -u_x Q - uQ_x + Q_{xx}$

$\mathcal{R}^* = -u_x - uD_x + D_x^2$.

In effetti,

$$\int_\Omega (P \cdot \mathcal{R}^* Q)\, dx = \int_\Omega P \cdot (-u_x Q - uQ_x + Q_{xx})\, dx$$

$$= \int_\Omega -P \cdot (D_x(Qu))\, dx + \int_\Omega P(D_x^2 Q)\, dx = -\int_\Omega [D_x(uPQ) - uQ D_x P]\, dx$$

$$+ \int_\Omega D_x[P D_x Q]\, dx - \int_\Omega (D_x P\, D_x Q)\, dx =$$

(usando $P = Q = 0$ su $\partial\Omega$)

$$= \int_\Omega (uQ D_x P)\, dx - \int_\Omega [D_x(D_x P \cdot Q) - (D_x^2 P) Q]\, dx =$$

$$= \int_\Omega (uQ D_x P)\, dx + \int_\Omega Q (D_x^2 P)\, dx =$$

$$= \int_\Omega Q \cdot \mathcal{R}(P)\, dx$$

Per un operatore matriciale $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\mu\nu}$ con componenti $(R^J_{\mu\nu})\, D_J$, l'aggiunto sarà l'operatore matriciale ottenuto trasponendo gli aggiunti: $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^*_{\nu\mu} = (-D_J)\, R^J_{\nu\mu}$

ossia $\mathcal{R}^*_{\nu\mu} \Psi^\mu = (-D_J)[R^J_{\nu\mu} \Psi^\mu]$.

Per il prodotto di due operatori, abbiamo

$$(\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2)^* = \mathcal{R}_2^* \mathcal{R}_1^*$$

Se $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$, diciamo che $\mathcal{R}$ è <u>autoaggiunto</u>.

<u>Esempio</u> Per $n=2$, $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} D_x & D_y \\ uD_x & uD_y \end{pmatrix}$, abbiamo

$$\int_\Omega (P \cdot \mathcal{R} Q) = \int [P^1 (Q^1_x + Q^2_y) + P^2 (uQ^1_x + u_x Q^2_y)]\, dx dy$$

$$= \int_\Omega (D_x P^1 Q^1 - Q^1 P^1_x) + (D_y \{P^1 Q^2 - Q^2 P^1_y) +$$

$$+ [D_x(uQ^1 P^2) - Q^1 D_x(uP^2)] + [D_y(u_x P^2 Q^2) - Q^2 D_y(P^2 u_x)]\, dx\, dy$$

③

$$= \int_\Omega \Big[-Q^1 D_x P^1 - Q^2 D_y P^1 - Q^1 (u_x P^2 + u P^2_x) +$$
$$- Q^2 (u_{xy} P^2 + u_x P^2_y) \Big] dx\,dy =$$

$$= \int_\Omega - Q^1 \left[D_x P^1 + u_x P^2 + u D_x P^2 \right] +$$
$$- Q^2 \left[D_y P^1 + u_{xy} P^2 + u_x D_y P^2 \right] dx\,dy =$$

$$= \int_\Omega Q^\mu \mathcal{R}^*_{\mu\nu} P^\nu \, dx\,dy$$

con $$\mathcal{R}^* = - \begin{pmatrix} D_x & u_x + u D_x \\ D_y & u_{xy} + u_x D_y \end{pmatrix}$$

Esempio $$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\int_\Omega P^\mu \mathcal{R}_{\mu\nu} Q^\nu \, dx\,dy = \int (-P^1 D_x Q^2 + P^2 D_x Q^1)\, dx\,dy =$$

$$= \int_\Omega \left[- D_x(P^1 Q^2) + Q^2 D_x P^1 + D_x(P^2 Q^1) - Q^1 D_x P^2 \right] dx\,dy =$$

$$= \int_\Omega \left[Q^2 D_x P^1 - Q^1 D_x P^2 \right] dx\,dy =$$

$$= \int_\Omega (Q^\mu \mathcal{R}^*_{\mu\nu} P^\nu)\, dx\,dy$$

con $$\mathcal{R}^* = \begin{pmatrix} 0 & -D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}$$ (autoaggiunto)

④

Ricordiamo ora che la derivata di Frechet di una funzione (vettoriale) $P = P^1, \dots, P^n$ è l'operatore diff. $\mathcal{D}_P$ dato da

$$\mathcal{D}_P [Q] = X_Q^{(\infty)}(P) = \frac{\partial P^\alpha}{\partial u^\beta_J} D_J Q^\beta$$

Nella notazione attuale, $\mathcal{R} = \mathcal{D}_P$ ha componenti

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \frac{\partial P^\mu}{\partial u^\nu_J} D_J$$

Quindi l'aggiunto sarà dato da

$$\mathcal{R}^*_{\nu\mu}(\Psi) = (-D_J)\left[\frac{\partial P^\mu}{\partial u^\nu_J} \Psi \right]$$

Esempio : $n=1$, $P = u_x^2 + u_{xx}$; $\mathcal{D}_P = D_x^2 + 2u_x D_x$;

$$\mathcal{D}_P^* \Psi = (-D_x)(2u_x \Psi) + (-D_x)^2 \Psi =$$
$$= -2u_{xx}\Psi - 2u_x \Psi_x + \Psi_{xx} ;$$

$$\mathcal{D}_P^* = -2u_{xx} - 2u_x D_x + D_x^2$$

Esempio : $n=2$; $P^1 = u_x$; $P^2 = u_y - v_x$

$$\mathcal{D}_P Q = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ D_y & -D_x \end{pmatrix} \begin{matrix} Q^1 \\ Q^2 \end{matrix} ; \quad \mathcal{D}_P = \begin{pmatrix} D_x & 0 \\ D_y & -D_x \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{D}_P^* = \begin{pmatrix} -D_x & -D_y \\ 0 & D_x \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u> $P^1 = u_x$; $P^2 = u_x^2$;

$$\mathcal{D}_P = \begin{pmatrix} D_x \\ 2u_x D_x \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{D}_P^* = \left(-D_x \;,\; -2u_{xx} - 2u_x D_x\right)$$

Possiamo ora caratterizzare le leggi di conservazione di un sistema di eq. diff. $\Delta = \Delta^1, \dots, \Delta^n$ <u>non necessariamente variazionale</u> in termini di un operatore di Frechet.

Una legge di conservazione è $D_\mu J^\mu \big|_{S_\Delta} = 0$; si è detto che questo vuol dire che a meno di equivalenza,

$$D_\mu J^\mu = Q_\nu \Delta^\nu$$

Data una $Q = Q_1, \dots, Q_\nu$, questa dà una legge di conservazione se $Q_\nu \Delta^\nu = \mathrm{Div}(J)$; d'altra parte questo è il caso se e solo se ~~le variazioni~~ le equazioni di EL per $\mathcal{L} = Q_\nu \Delta^\nu$ sono identicamente vere. Ma queste EL sono

$$\sum_J (-1)^{|J|} D_J \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\alpha_J} = 0$$

e si scrivono come

$$\mathcal{D}^*_{\mathcal{L}}(1) = 0 \qquad (*)$$

Per $\mathcal{L} = Q^\nu \Delta_\nu$, abbiamo quindi le EL:

$$\mathcal{D}^*_{(Q\cdot\Delta)}(1) = 0$$

Ora notiamo che

$$\mathcal{D}^*_{(PQ)}(1) = \mathcal{D}^*_P(Q) + \mathcal{D}^*_Q(P)$$

Infatti,

$$\sum_J (-1)^J D_J \frac{\partial (PQ)}{\partial u^\alpha_J} = \sum_J (-1)^J D_J \left[\frac{\partial P_\mu}{\partial u^\alpha_J} Q^\mu + P_\mu \frac{\partial Q^\mu}{\partial u^\alpha_J} \right] =$$

$$= \mathcal{D}^*_P(Q) + \mathcal{D}^*_Q(P)$$

In conclusione abbiamo che:

<u>Thm</u> La funz. vett. $Q : J^n M \to \mathbb{R}^d$ è la caratteristica di una legge di conservazione per il sistema di eq. diff. Δ se e solo se

$$\mathcal{D}^*_\Delta(Q) + \mathcal{D}^*_Q(\Delta) = 0$$

ovvero se e solo se $\mathcal{L} = \Delta_\nu Q^\nu = \mathrm{Div}(J)$.

Ricordando che $\mathcal{D}^*_\Delta(Q) = X^{(n)}_Q(\Delta)$, abbiamo

<u>Thm</u> Se Δ sono le EL per $\mathcal{L}$, $X_Q = Q^\alpha \frac{\partial}{\partial \phi^\alpha}$ è una SV per $\mathcal{L}$ se e solo se

$$X^{(n)}_Q[\Delta] + \mathcal{D}^*_Q(\Delta) = 0$$

Diamo ora un risultato senza dimostrazione.

<u>Thm</u> Un sistema di eq. diff. Δ su un dominio "vertically star shaped" è un EL per qualche $\mathcal{L}$ se e solo se

$$\mathcal{D}_\Delta^* = \mathcal{D}_\Delta$$

In questo caso,

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}[\phi] = \int_0^1 \phi^\mu \Delta_\mu [s\phi] \, ds$$

(Per il signif. della cond. sul dominio, v. Olver sez. 5.4; $\mathbb{R}^n$ soddisfa le cond.)