Teoria di gauge: derivata covariante

Cominciamo col ricordare le motivazioni fisiche per considerare simmetrie di gauge anziché ordinarie. Consideriamo una lagrangiana naturale $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = T - V$$

T = parte cinetica, V = potenziale;

In meccanica, $T = \frac{1}{2} A_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu$, $V = \Phi(q)$;

in teoria dei campi,

$$T = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi^a)(\partial_\nu \phi^b) G_{ab}$$

$$V = V(\Phi)$$

e supponiamo V sia invariante sotto un gruppo compatto G che agisce (linearmente) nello spazio F in cui prende valore il campo $\phi: M \to F \simeq \mathbb{R}^p$ o $F \simeq \mathbb{C}^p$. Ossia, $V(g\phi) = V(\phi)$ $\forall g \in G$.

L'idea è che $\forall x \in M$, $\phi(x) \in F$ viene trasformato con lo stesso elemento $g \in G$: $\tilde{\phi}(x) = g \cdot \phi(x)$. Se G agisce linearmente, $g \sim L_g \in Mat(p, \mathbb{R})$ o $Mat(p, \mathbb{C})$, e

$$\tilde{\phi}^a(x) = (L_g)^a{}_b \phi^b(x)$$

Ovviamente il termine cinetico è anche invariante, se G è ortogonale (unitario): infatti:

$$\partial_\mu \tilde{\phi}^a(x) = \partial_\mu[(L_g)^a{}_b \phi^b(x)] = (L_g)^a{}_b \, \partial_\mu \phi^b(x)$$

cioè le derivate dei campi si trasformano in modo covariante, quindi $K = \|\partial_\mu \phi\|^2$ è invariante.

Però l'idea di una trasformazione "rigida", che agisce allo stesso modo in ogni punto $x \in M$ dello spazio-tempo, è in contrasto con la Relatività. Dovremmo quindi richiedere l'invarianza sotto trasformazioni di G che dipendano in modo liscio da $x \in M$. Ossia, consideriamo l'insieme delle funzioni smooth $\gamma: M \to G$ (sezioni di un fibrato di fibra G); dovremo richiedere non solo che $\mathcal{L}[g\phi] = \mathcal{L}[\phi]$ $\forall g \in G$, ma

$$\mathcal{L}[\gamma \cdot \phi] = \mathcal{L}[\phi]$$

$$\forall \gamma \in H = \{\gamma : M \to G \text{ (smooth)}\}$$

Vediamo subito che per quanto riguarda V non c'è problema: $V = V(\phi(x))$, e quindi se $\gamma(x_0) = g_0$, $\quad V(\tilde{\phi}(x_0)) = V(g_0 \phi(x_0)) = V(\phi(x_0))$

per qualsiasi funzione $\gamma \in H$.

Per il termine cinetico, però, le cose sono più complicate; infatti:

$$\partial_\mu \left(\gamma(x)\, \phi(x) \right) = \left[\partial_\mu \gamma(x) \right] \cdot \phi(x) + \gamma(x)\, \partial_\mu \phi(x)$$

ed il primo termine distrugge, in generale, la covarianza di $\partial_\mu \phi$, dunque l'invarianza di K e pertanto di $\mathcal{L}$.

<u>Esempio:</u> $F = \mathbb{R}^2$, $G = SO(2)$; dunque

$$H \sim \mathcal{F}(M, S^1) : \gamma = \begin{pmatrix} \cos\theta(x) & -\operatorname{sen}\theta(x) \\ \operatorname{sen}\theta(x) & \cos\theta(x) \end{pmatrix}$$

Per $\partial_\mu \phi$ abbiamo

$$\partial_\mu(\gamma \phi) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \begin{pmatrix} \cos\theta(x)\, \phi^1 - \operatorname{sen}\theta(x)\, \phi^2 \\ \operatorname{sen}\theta(x)\, \phi^1 + \cos\theta(x)\, \phi^2 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma \begin{pmatrix} \partial_\mu \phi^1 \\ \partial_\mu \phi^2 \end{pmatrix} + (\partial_\mu \theta) \underbrace{\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta(x) & -\cos\theta(x) \\ \cos\theta(x) & -\operatorname{sen}\theta(x) \end{pmatrix}}_{\gamma'} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}$$

Se $K = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi})^T \cdot (\partial_\mu \vec{\phi})$, allora

$$2\tilde{K} = (\partial_\mu \vec{\phi})^T \gamma^T \gamma (\partial_\mu \vec{\phi}) + (\partial_\mu \theta)(\partial_\mu \vec{\phi})^T \gamma^T \gamma' (\phi) + (\partial_\mu \theta)\ \phi^T \gamma'^T \gamma \partial_\mu \phi + (\partial_\mu \theta)^2\ \phi^T \gamma'^T \gamma' \phi$$

Possiamo anche considerare trasf. infinitesime:

$$\gamma(x) = I + \varepsilon\, \alpha(x)\, J$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma : \vec{\phi}(x) \to \vec{\phi}(x) + \varepsilon\, \alpha(x)\, J \vec{\phi}(x)$$

$$\gamma : \begin{cases} \phi^1 \to \phi^1 - \varepsilon \alpha \phi^2 \\ \phi^2 \to \phi^2 + \varepsilon \alpha \phi^1 \end{cases}$$

$$\partial_\mu \vec{\phi} \to \partial_\mu (\phi + \varepsilon \alpha J \phi) = \partial_\mu \phi + \varepsilon [(\partial_\mu \alpha) J \phi + \alpha J \partial_\mu \phi]$$

In questo abbiamo nuovamente

$$K \to \tilde{K} = \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \phi + \varepsilon (\alpha J \partial_\mu \phi + (\partial_\mu \alpha) J \phi \right]^T \cdot \left[\partial_\mu \phi + \varepsilon (\alpha J \partial_\mu \phi + (\partial_\mu \alpha) J \phi \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \phi)^T (\partial_\mu \phi) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon \left[(\partial_\mu \phi)^T \alpha J (\partial_\mu \phi) + (\partial_\mu \phi)^T J^T \cdot \alpha (\partial_\mu \phi) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon \left[(\partial_\mu \alpha)\ \phi^T J^T (\partial_\mu \phi) + (\partial_\mu \alpha) (\partial_\mu \phi)^T J \phi \right] +$$

$$+ o(\varepsilon)$$

$$= K + \frac{1}{2} \varepsilon \alpha \left[(\partial_\mu \phi)^T (J + J^T) (\partial_\mu \phi) \right] + \frac{1}{2} \varepsilon (\partial_\mu \alpha) \left[\phi^T J^T (\partial_\mu \phi) + (\partial_\mu \phi)^T J \phi \right]$$

$$= K + \varepsilon (\partial_\mu \alpha) \left[(\partial_\mu \phi)^T J \phi - \phi^T J (\partial_\mu \phi) \right]$$

dove abbiamo usato $J^T = -J$. Volendo inserire gli indici di campo,

$$\tilde{K} = K + \frac{\varepsilon}{2}(\partial_\mu\alpha)\left[(\partial_\mu\phi^a) J_{ab}\phi^b - \phi^a J_{ab}(\partial_\mu\phi^b)\right]$$

$$= K + \varepsilon(\partial_\mu\alpha)(\partial_\mu\phi^a) J_{ab}\phi^b$$

Il punto è che mentre per $\alpha = c$ abbiamo $\tilde{K} = K$, in questo caso (cioè per $\partial_\mu\alpha \neq 0$), $\tilde{K} \neq K$.

Possiamo facilmente riformulare quanto detto per $\phi: M \to \mathbb{R}^2$ in termini di $\Psi: M \to \mathbb{C}^1$; in questo caso $\|\partial_\mu\Psi\| = (\partial_\mu\bar{\Psi})(\partial_\mu\Psi)$; $\gamma(x) = e^{i\alpha(x)}$ e per γ infinitesima, $\gamma(x) = 1 + i\varepsilon\alpha(x)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$; così

$$\Psi \to \tilde{\Psi} = \gamma(x)\Psi(x) = \Psi(x) + i\varepsilon\alpha(x)\Psi(x)$$

$$\partial_\mu\Psi \to \partial_\mu\Psi + i\varepsilon\left[\alpha(\partial_\mu\Psi) + (\partial_\mu\alpha)\Psi\right]$$

$$K \to \tilde{K} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\Psi})(\partial_\mu\Psi) + \frac{1}{2}i\varepsilon(\partial_\mu\bar{\Psi})\left[\alpha(\partial_\mu\Psi) + (\partial_\mu\alpha)\Psi\right] - \frac{1}{2}i\varepsilon\left[\alpha(\partial_\mu\bar{\Psi}) + (\partial_\mu\alpha)\bar{\Psi}\right](\partial_\mu\Psi) =$$

$$= K + \frac{i}{2}\varepsilon\left[\alpha(\partial_\mu\bar{\Psi})(\partial_\mu\Psi) - \alpha(\partial_\mu\bar{\Psi})(\partial_\mu\Psi)\right] + \frac{i}{2}\varepsilon\left[(\partial_\mu\bar{\Psi})\Psi - \bar{\Psi}(\partial_\mu\Psi)\right] =$$

$$= K + \frac{i}{2}\varepsilon\left[(\partial_\mu\bar{\Psi})\Psi - \bar{\Psi}(\partial_\mu\Psi)\right]$$

Scrivendo $\Psi = \rho e^{i\theta}$, $\partial_\mu\Psi = (\partial_\mu\rho)e^{i\theta} + i\partial_\mu\theta\,\rho e^{i\theta}$

$\partial_\mu\bar{\Psi} = (\partial_\mu\rho)e^{-i\theta} - i(\partial_\mu\theta)\rho e^{-i\theta}$:

$$\tilde{K} = K + \frac{i}{2}\varepsilon\left[(\partial_\mu\rho - i(\partial_\mu\theta)\rho)\rho - \rho(\partial_\mu\rho + i\rho\partial_\mu\theta)\right] =$$

$$= K + \varepsilon(\partial_\mu\theta)\rho^2 \equiv K + \varepsilon(\partial_\mu\theta)|\Psi(x)|^2$$

Possiamo ottenere formule analoghe per un gruppo compatto G con algebra $\mathcal{G}$; se la rappr. con cui $\mathcal{G}$ agisce in F ha generatori $\{X_1, \dots, X_r\}$ con $[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k$, $X_i = (L_i)^a{}_b\phi^b \frac{\partial}{\partial\phi^a}$, allora

$$\gamma(x) = I + \varepsilon\sum_{i=1}^{r}\lambda^i(x) X_i$$

vale a dire

$$\gamma: \Psi^a \to \Psi^a + \varepsilon\sum_i \lambda^i(x) L_i{}^a{}_b \Psi^b$$

$$\partial_\mu\Psi^a \to \partial_\mu\Psi^a + \varepsilon\left[\lambda^i L_i{}^a{}_b\,\partial_\mu\Psi^b + (\partial_\mu\lambda^i) L_i{}^a{}_b\Psi^b\right]$$

$$K = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Psi^a)^+(\partial_\mu\Psi^a) \to \frac{1}{2}(\partial_\mu\Psi^a)^+(\partial_\mu\Psi^a) + \frac{\varepsilon}{2}\left[\lambda^i(\partial_\mu\Psi^a)^+ L_{iab}(\partial_\mu\Psi^b) + \lambda^i(\partial_\mu\Psi^b)^+ L^+_{i\,ba}(\partial_\mu\Psi^a)\right] + \frac{\varepsilon}{2}(\partial_\mu\lambda^i)\left[(\partial_\mu\Psi^a)^+ L_{iab}\Psi^b + \Psi^{b+} L^+_{iba}(\partial_\mu\Psi^a)\right]$$

1152

Se G è unitario, abbiamo $L^+ = -L$, quindi

$$\tilde{K} = K + \varepsilon \frac{(\partial_\mu \lambda^i)}{2}\left[(\partial_\mu \Psi^a)^+ L_{iab} \Psi^b + \Psi^{b+} L_{ba} (\partial_\mu \Psi^a) \right]$$

$$\Psi^a(x) = \rho^a(x)\, e^{i\theta^a(x)}$$

$$(\partial_\mu \Psi^a) = \left[(\partial_\mu \rho^a) + i \rho^a \partial_\mu \theta^a \right] e^{i\theta^a(x)}$$

$$(\partial_\mu \overline{\Psi^a}) = \left[(\partial_\mu \rho^a) - i \rho^a \partial_\mu \theta^a \right] e^{-i\theta^a(x)}$$

$$\tilde{K} = K + i\varepsilon (\partial_\mu \lambda^i) \left[(\rho^a)^2 (\partial_\mu \theta^a) \right] =$$

$$= K + i\varepsilon(\partial_\mu \lambda^i) \sum_{a=1}^{r} |\Psi^a|^2 (\partial_\mu \theta^a)$$

Come ben noto, per ovviare a questo inconveniente si introduce una derivata covariante

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

$$A_\mu = A_\mu(x) \in \mathcal{G} \qquad A_\mu : M \to \mathcal{G}$$

$$A_\mu = \sum \alpha^i_\mu(x)$$

Dunque ∇_μ definisce una $\mathcal{G}$-connessione, e $\omega = A_\mu dx^\mu$ è la forma di connessione

(NB: dato che $A_\mu(x) \in \mathcal{G}$, questa è una 1-forma a valori in $\mathcal{G}$; possiamo anche scrivere $\omega = e_i \otimes \alpha^i_\mu dx^\mu$)

$$\nabla_\mu \Psi \to \partial_\mu \tilde{\Psi} + \tilde{A}_\mu \tilde{\Psi}$$

Vediamo il caso $G = U(1)$, $F = \mathbb{C}$:

$$\widetilde{\nabla_\mu \Psi} = \partial_\mu (\Psi + i\varepsilon\alpha(x)\Psi) + (A_\mu + \varepsilon T_\mu{}^\nu A_\nu)(\Psi + i\varepsilon\alpha\Psi) =$$

$$= (\partial_\mu \Psi) + i\varepsilon\alpha(\partial_\mu\Psi) + i\varepsilon(\partial_\mu\alpha)\Psi + A_\mu\Psi + i\varepsilon\alpha A_\mu\Psi + \varepsilon T_\mu{}^\nu A_\nu \Psi =$$

$$= (\nabla_\mu \Psi) + i\varepsilon\alpha(x)\left[\partial_\mu\Psi + A_\mu\Psi\right] + \varepsilon\left[i\partial_\mu\alpha + T_\mu{}^\nu A_\nu\right]\Psi =$$

$$= \left[I + i\varepsilon\,\alpha(x)\right](\nabla_\mu \Psi) + \varepsilon\left[i(\partial_\mu \alpha) + T_\mu{}^\nu A_\nu\right]\Psi$$

Il primo termine agisce su $\nabla_\mu \Psi$ come su Ψ;
il secondo si annulla se

$$T_\mu{}^\nu A_\nu = -i(\partial_\mu \alpha)$$

e $T_\mu{}^\nu$ (che non abbiamo def. esplicitamente)
dice come agisce $\mathcal{G}$ su A_μ

$$\gamma: \quad A_\mu \to A_\mu + \varepsilon T_\mu{}^\nu A_\nu$$

Dobbiamo quindi avere

$$\gamma: A_\mu \to A_\mu - i(\partial_\mu \alpha)$$

In questo modo $\mathcal{L}$ è, per costruzione, $\mathcal{G}$-invariante.

$$\mathcal{L} = (\nabla_\mu \phi)^T (\nabla_\mu \phi) - V(\phi)$$

Notiamo che ora $\mathcal{L}$ dipende anche dai "campi di gauge" A_μ; per introdurre un termine cinetico ci chiediamo qual è un invariante diff. del 1° ordine per

$$X = i\alpha(x)\frac{\partial}{\partial \Psi} - i(\partial_\mu \alpha)\frac{\partial}{\partial A_\mu}$$

$$\frac{dA_\mu}{\partial_\mu \alpha} = \frac{dA_\nu}{\partial_\nu \alpha}$$

$$I = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{=0 \text{ per } \mathcal{G} = U(1)}$$

$$F_{\mu\nu} \to \tilde{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu (A_\nu - i\varepsilon\,\partial_\nu \alpha) + \\ -\partial_\nu (A_\mu - i\varepsilon\,\partial_\mu \alpha) + \\ + \left[A_\mu - i\varepsilon(\partial_\mu \alpha),\, A_\nu - i\varepsilon(\partial_\nu \alpha)\right] \\ = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Se $\mathcal{G}$ ha più generatori,

$$\widetilde{\nabla_\mu \Psi^a} = \partial_\mu\left(\Psi^a + \varepsilon\lambda^i (L_i)^a{}_b \Psi^b\right) + \\ + \tilde{A}_\mu\left(\vec{\Psi}^a + \varepsilon\lambda^i L_i \vec{\Psi}\right)$$

$$= (\partial_\mu \vec{\Psi}) + \varepsilon\lambda^i L_i (\partial_\mu \vec{\Psi}) + \\ + \varepsilon(\partial_\mu \lambda^i) L_i \vec{\Psi} + \\ + \alpha_\mu^i L_i \vec{\Psi} + \varepsilon\,\alpha_\mu^i L_i \lambda^j L_j \vec{\Psi} + \varepsilon\,\delta A_\mu \vec{\Psi}$$

$$= (I + \varepsilon\lambda^i L_i)(\partial_\mu \vec{\Psi} + A_\mu \vec{\Psi}) + \varepsilon(\partial_\mu \lambda^i) L_i \vec{\Psi} \\ + \varepsilon\,\alpha_\mu^i \lambda^j [L_i, L_j]\vec{\Psi} + \varepsilon\,\delta A_\mu \vec{\Psi}$$

Quindi deve essere

$$\delta A_\mu = -(\partial_\mu \lambda^i) L_i - \alpha_\mu^i \lambda^j [L_i, L_j]$$

$$\delta A_\mu = (\delta \alpha_\mu^i) L_i$$

$$\delta \alpha_\mu^i = -(\partial_\mu \lambda^i) - c^i_{jk} \alpha_\mu^j \lambda^k$$

$$A_\mu \to A_\mu - \varepsilon\left[(\partial_\mu \lambda^i) + c^i_{jk} \alpha_\mu^j \lambda^k\right] L_i$$

In effetti, è noto che

$$\Psi \to \gamma(x)\Psi$$

$$A_\mu \to \gamma A_\mu \gamma^{-1} - (\partial_\mu \gamma)\gamma^{-1}$$

Per $\gamma = I + \varepsilon \lambda^i L_i$; $A_\mu = \alpha_\mu^i L_i$

$$A_\mu \to (I + \varepsilon \lambda^i L_i)(\alpha_\mu^j L_j)(I - \varepsilon \lambda^k L_k) + \\ - \varepsilon[(\partial_\mu \lambda^i) L_i](I - \varepsilon \lambda^k L_k) =$$

$$= A_\mu + \varepsilon \lambda^i \alpha_\mu^j (L_i L_j - L_j L_i) + \\ - \varepsilon(\partial_\mu \lambda^i) L_i$$

$$= A_\mu + \varepsilon\, \delta A_\mu$$

con

$$\delta A_\mu = -\varepsilon\left[(\partial_\mu \lambda^i) L_i + \alpha_\mu^j \lambda^k [L_j, L_k]\right]$$

$$= -\varepsilon\left[(\partial_\mu \lambda^i) + c^i_{jk} \alpha_\mu^j \lambda^k\right] L_i$$

Riassumendo: nel nostro linguaggio, l'algebra delle trasformazioni di gauge è data da

$$X_\lambda = \lambda^i(x) L_i{}^a{}_b \phi^b \frac{\partial}{\partial \phi^a} + \\ - \left[\partial_\mu \lambda^i(x) + c^i_{jk} \alpha_\mu^j \lambda^k\right] \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu^i}$$

dove $A_\mu = \alpha_\mu^i(x) L_i$

In questa notazione,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] =$$

$$= \partial_\mu \alpha_\nu^i - \partial_\nu \alpha_\mu^i + c^i_{jk} \alpha_\mu^j \alpha_\nu^k$$

Trasformazioni di gauge finite

Una trasformazione di gauge $\gamma: M \to G$ agisce come

$$\gamma: \begin{cases} \Psi(x) \to \tilde{\Psi}(x) = \gamma(x)\,\Psi(x) \\ A_\mu(x) \to \gamma(x)\,A_\mu(x)\,\gamma^{-1}(x) - [\partial_\mu \gamma(x)]\,\gamma^{-1}(x) \end{cases}$$

La derivata covariante $\nabla_\mu \Psi$ si trasforma con

$$(\partial_\mu + A_\mu)\Psi \to (\partial_\mu + \tilde{A}_\mu)\tilde{\Psi} =$$

$$= \partial_\mu(\gamma\Psi) + (\gamma A_\mu \gamma^{-1} - (\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1})(\gamma\Psi)$$

$$= (\partial_\mu\gamma)\Psi + \gamma(\partial_\mu\Psi) + \gamma A_\mu(\gamma^{-1}\gamma)\Psi - (\partial_\mu\gamma)(\gamma^{-1}\gamma\Psi) =$$

$$= \gamma\left[(\partial_\mu + A_\mu)\Psi\right]$$

Un caso particolare di campo vettoriale $\Psi: M \to F$ è quello in cui $F \equiv \mathcal{G}$, su cui G agisce naturalmente con la rappresentazione aggiunta; scriviamo in tal caso il campo vettoriale come $B(x)$.

$$\nabla_\mu B(x) = \partial_\mu B + [A_\mu, B]$$

Infatti ora

$$\gamma: \begin{cases} B \to \tilde{B} = \gamma B \gamma^{-1} \\ A_\mu \to \tilde{A}_\mu = \gamma A_\mu \gamma^{-1} - (\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1} \end{cases}$$

$$\nabla_\mu B = \partial_\mu B + [A_\mu, B] \to \widetilde{\nabla_\mu B} = \partial_\mu \tilde{B} + [\tilde{A}_\mu, \tilde{B}] =$$

$$= \partial_\mu(\gamma B \gamma^{-1}) + [\gamma A_\mu \gamma^{-1}, \gamma B \gamma^{-1}] - [(\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1}, \gamma B \gamma^{-1}] =$$

$$= (\partial_\mu\gamma) B\gamma^{-1} + \gamma(\partial_\mu B)\gamma^{-1} + \gamma B(\partial_\mu \gamma^{-1}) + \gamma[A_\mu, B]\gamma^{-1} +$$

$$- (\partial_\mu\gamma) B \gamma^{-1} + \gamma B \gamma^{-1}(\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1} =$$

$$= \gamma\left(\partial_\mu B + [A_\mu, B]\right)\gamma^{-1}$$

in cui abbiamo usato $(\partial_\mu \gamma^{-1}) = -\gamma^{-1}(\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1}$.

Forma di curvatura

Consideriamo l'azione di $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ sul campo Ψ:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\Psi = (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu)\Psi - (\partial_\nu + A_\nu)(\partial_\mu + A_\mu)\Psi =$$

$$= (\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu\Psi + A_\nu\Psi) - (\partial_\nu + A_\nu)(\partial_\mu\Psi + A_\mu\Psi) =$$

$$= \partial_\mu\partial_\nu\Psi + A_\mu\partial_\nu\Psi + (\partial_\mu A_\nu)\Psi + A_\nu(\partial_\mu\Psi) + A_\mu A_\nu\Psi +$$

$$- \partial_\nu\partial_\mu\Psi - A_\nu\partial_\mu\Psi - (\partial_\nu A_\mu)\Psi - A_\mu(\partial_\nu\Psi) - A_\nu A_\mu\Psi =$$

$$= \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\right)\Psi \quad := F_{\mu\nu}\Psi$$

La forma di curvatura $\Omega = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu$ è definita da

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

Per verificare che sia una forma, vediamo come varia sotto trasformazioni di gauge.

③

$$\tilde F_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde A_\nu - \partial_\nu \tilde A_\mu + [\tilde A_\mu, \tilde A_\nu] =$$

$$= \partial_\mu\left(\gamma A_\nu \gamma^{-1} - (\partial_\nu\gamma)\gamma^{-1}\right) - \partial_\nu\left(\gamma A_\mu \gamma^{-1} - (\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1}\right) +$$

$$+ \left[\gamma A_\mu \gamma^{-1} - (\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1}, \gamma A_\nu\gamma^{-1} - (\partial_\nu\gamma)\gamma^{-1}\right] =$$

$$= (\partial_\mu\gamma) A_\nu \gamma^{-1} + \gamma(\partial_\mu A_\nu)\gamma^{-1} + \gamma A_\nu(\partial_\mu\gamma^{-1}) +$$

$$- (\partial_\mu\partial_\nu\gamma) - (\partial_\nu\gamma)(\partial_\mu\gamma^{-1}) - (\partial_\nu\gamma)A_\mu\gamma^{-1} - \gamma\partial_\nu A_\mu\gamma^{-1} +$$

$$- \gamma A_\mu(\partial_\nu\gamma^{-1}) + (\partial_\nu\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1} + (\partial_\mu\gamma)(\partial_\nu\gamma^{-1}) +$$

$$+ \gamma[A_\mu, A_\nu]\gamma^{-1} + (\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1}(\partial_\nu\gamma)\gamma^{-1} - (\partial_\nu\gamma)\gamma^{-1}(\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1}$$

$$* \gamma A_\mu\gamma^{-1}(\partial_\nu\gamma)\gamma^{-1} + (\partial_\nu\gamma)A_\mu\gamma^{-1} - (\partial_\mu\gamma)A_\nu\gamma^{-1} +$$

$$+ \gamma A_\nu\gamma^{-1}(\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1} =$$

$$= (\partial_\mu\gamma)\cancel{A_\nu}\gamma^{-1} + \gamma(\partial_\mu A_\nu)\gamma^{-1} + \gamma A_\nu\cancel{(\partial_\mu\gamma^{-1})} +$$

$$- (\cancel{\partial_\mu\partial_\nu}\gamma) - \cancel{(\partial_\nu\gamma)(\partial_\mu\gamma^{-1})} - \cancel{(\partial_\nu\gamma)A_\mu}\gamma^{-1} +$$

$$- \gamma(\partial_\nu A_\mu)\gamma^{-1} - \gamma\cancel{A_\mu(\partial_\nu\gamma^{-1})} + (\cancel{\partial_\nu\partial_\mu\gamma}) +$$

$$+ \cancel{(\partial_\mu\gamma)(\partial_\nu\gamma^{-1})} + \gamma[A_\mu, A_\nu]\gamma^{-1} - \cancel{(\partial_\mu\gamma)(\partial_\nu\gamma^{-1})} +$$

$$+ \cancel{(\partial_\nu\gamma)(\partial_\mu\gamma^{-1})} + \gamma\cancel{A_\mu(\partial_\nu\gamma^{-1})} + \cancel{(\partial_\nu\gamma)A_\mu}\gamma^{-1} +$$

$$- \cancel{(\partial_\mu\gamma)A_\nu\gamma^{-1}} - \gamma\cancel{A_\nu(\partial_\mu\gamma^{-1})} =$$

$$= \gamma\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]\right)\gamma^{-1}$$

④

La connessione A è triviale (il campo è una pura gauge) se $\exists\ \gamma_0 : M \to G$ per cui

$$A_\mu = -(\partial_\mu\gamma_0)\gamma_0^{-1}$$

<u>Thm:</u> Se A è triviale, allora $F_{\mu\nu} = 0$ -

<u>Dim:</u> Infatti, agiamo su A con $\gamma = \gamma_0^{-1}$:

$$A_\mu \to \gamma A_\mu \gamma^{-1} - (\partial_\mu\gamma)\gamma^{-1} = \tilde A_\mu$$

$$= -\gamma_0^{-1}[(\partial_\mu\gamma_0)\gamma_0^{-1}]\gamma_0 - (\partial_\mu\gamma_0^{-1})\gamma_0 =$$

$$= (\partial_\mu\gamma_0^{-1})\gamma_0 - (\partial_\mu\gamma_0^{-1})\gamma_0 = 0$$

Quindi $\tilde F_{\mu\nu} = \partial_\mu\tilde A_\nu - \partial_\nu\tilde A_\mu + [\tilde A_\mu, \tilde A_\nu] = 0$;

d'altra parte $\tilde F_{\mu\nu} = \gamma F_{\mu\nu}\gamma^{-1}$, dunque

$$F_{\mu\nu} = \gamma^{-1}\tilde F_{\mu\nu}\gamma = \gamma_0\tilde F_{\mu\nu}\gamma_0^{-1} = 0$$

<u>Osservazione</u> Nella dim. abbiamo anche il perché del nome triviale : se $A_\mu = -(\partial_\mu\gamma_0)\gamma_0^{-1}$, allora A è gauge-equivalente ad $A \equiv 0$

Il viceversa è anche vero : $F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow A$ è localmente triviale.

(1)

Lagrangiana di puro gauge

Consideriamo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\langle F_{\mu\nu}, F^{\mu\nu}\rangle \equiv -\frac{1}{4}\langle F_{\mu\nu}\, g^{\mu\sigma} g^{\nu\varsigma}\, F_{\sigma\varsigma}\rangle$$

(ricordiamo che il prodotto scalare naturale tra matrici $n\times n$ è $\langle A,B\rangle = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(A^{+}B)$).

Questa è invariante per trasformazioni di gauge: infatti abbiamo visto che

$$\gamma:\ F_{\mu\nu} \to \gamma\, F_{\mu\nu}\,\gamma^{-1}$$

e ovviamente

$$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \to \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Vediamo ora le equazioni di EL per $\mathcal{L}$:

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu + [\delta A_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \delta A_\nu]$$

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int \mathrm{Tr}(F \quad \delta F_{\mu\nu})\, d^n x$$

Integrando per parti,

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int \langle -\partial_\mu F^{\mu\nu}, \delta A_\nu\rangle + \langle \partial_\nu F^{\mu\nu}, \delta A_\mu\rangle + $$

$$+\langle F^{\mu\nu}, [\delta A_\mu, A_\nu]\rangle + \langle F^{\mu\nu}, [A_\mu, \delta A_\nu]\rangle\, d^n x$$

(2)

Notiamo ora che

$$\langle F^{\mu\nu}, [\delta A_\mu, A_\nu]\rangle = -\langle [F^{\mu\nu}, A_\nu], \delta A_\mu\rangle$$

come segue dalle proprietà della traccia.

Quindi, cambiando gli indici di somma ove opportuno, e usando $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int \langle -\partial_\mu F^{\mu\nu}, \delta A_\nu\rangle + \langle \partial_\nu F^{\mu\nu}, \delta A_\mu\rangle +$$

$$-\langle [F^{\mu\nu}, A_\nu], \delta A_\mu\rangle + \langle [F^{\mu\nu}, A_\mu], \delta A_\nu\rangle\, d^n x$$

$$= \int \langle \partial_\mu F^{\mu\nu}, \delta A_\nu\rangle \quad \langle [F^{\mu\nu}, A_\mu], \delta A_\nu\rangle\, d^n x$$

$$= \int \langle (\partial_\mu F^{\mu\nu} + [A_\mu, F^{\mu\nu}]), \delta A_\nu\rangle\, d^n x$$

$$= \int \langle \nabla_\mu F^{\mu\nu}, \delta A\rangle\, d^n x$$

Quindi $\delta S = 0 \quad \forall\, \delta A \quad (\delta A^\nu = 0 \text{ su } \delta\Omega)$

$$\Rightarrow \qquad \nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad (*)$$

Osservazione Per A la connessione di Cartan del gruppo affine, nel qual caso la curvatura $F_{\mu\nu}$ è associata alla metrica, le $(*)$ sono

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\, g_{\mu\nu} = 0$$

(equazioni di Einstein)

(1)

Rotture spontanee di simmetria e variabili di Goldstone

Nelle teorie di gauge consideriamo rappresentazioni lineari di G sullo spazio F in cui i campi ϕ prendono valore. In questo caso, $\underline{\phi} = \underline{0}$ sarà sempre un punto critico del potenziale $V(\phi)$ (G-invariante); ma non necessariamente un minimo.

Esempio: Se $\psi : M \to \mathbb{C}$, $G = U(1)$, il pot. G-invariante sarà della forma $V(\psi) = f(|\psi|^2)$, ad es. $V = -\frac{\mu}{2}|\psi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\psi|^4$, con $\lambda > 0$ per assicurare il confinamento. Per $\mu < 0$, $\psi = 0$ è un minimo, ma per $\mu > 0$ il minimo è dato da $|\psi|^2 = \mu/\lambda$: abbiamo quindi una varietà $S^1 \simeq U(1)$ di minimi.

Esempio Se $\phi : M \to \mathbb{R}^n$, $G = O(n)$ $V = f(|\phi|^2)$, ad es. $V = -\frac{\mu}{2}|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\phi|^4$. Abbiamo una varietà $S^{n-1} \simeq O(n)/O(n-1)$ di minimi.

Possiamo selezionare uno stato di vuoto, ed espandere $V(\phi)$ intorno a questo ϕ_0 anziché intorno a $\phi = 0$.

(2)

Ricordiamo che la massa di un campo è data dalla derivata seconda di $V(\phi)$ nel minimo, in analogia a quello che succede per oscillatori

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m \phi^2$$

Esempio: Consideriamo di nuovo $\Psi \in \mathbb{C}$, $G = U(1)$; scriviamo $\Psi = \sigma + i\pi$ ed espandiamo intorno a $\Psi_0 = \sigma_0 = \sqrt{\mu/\lambda}$. Ovviamente $\nabla V = 0$ (è un minimo).

$$\Psi = \Psi_0 + (\sigma - \sigma_0) + i\pi \equiv \Psi_0 + (s + i\pi)$$

$$V(\Psi) = V(\Psi_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} s^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}\pi^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \pi} s \cdot \pi\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial V}{\partial |\psi|} \cdot \frac{\partial |\psi|}{\partial s}, \dots$$

$$|\Psi|^2 = \sigma^2 + \pi^2 = (\sigma_0 + s)^2 + \pi^2$$

$$V = -\frac{\mu}{2}\left[(\sigma_0 + s)^2 + \pi^2\right] + \frac{\lambda}{4}\left[(\sigma_0 + s)^2 + \pi^2\right]^2 =$$

$$= -\frac{\mu}{2}\left(\sigma_0^2 + 2\sigma_0 s + s^2 + \pi^2\right) +$$

$$+ \frac{\lambda}{4}\left[\sigma_0^4 + 4\sigma_0^2 s^2 + s^4 + \pi^4 + 4\sigma_0^3 s + 2\sigma_0^2 s^2 + 2\sigma_0^2 \pi^2 + 4\sigma_0 s^3 + 4\sigma_0 s \pi^2 + 2 s^2 \pi^2\right] =$$

$$= \left(-\frac{\mu}{2}\sigma_0^2 + \frac{\lambda}{4}\sigma_0^4\right) + \left(-\mu\sigma_0 + \lambda\sigma_0^3\right) s +$$

$$+ \left[\left(-\frac{\mu}{2} + \lambda\sigma_0^2 + \frac{\lambda}{2}\sigma_0^2\right) s^2 + \right.$$

$$+ \left(-\frac{\mu}{2} + \frac{\lambda}{2}\sigma_0^2\right)\pi^2\Big] + h.o.t. =$$

$$= V(\Psi_0) + \lambda\sigma_0^2 s^2 + h.o.t.$$

Cioè il campo s ha massa $(2\lambda\sigma_0^2)$, il campo π ha massa nulla.

Questa conclusione (ovvia, dato che V è G-invar.) si raggiunge anche in un modo più adatto a generalizzazioni: scriviamo

$$\Psi \simeq \phi \in \mathbb{R}^2 \qquad \phi = \begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}$$

$$\phi_0 = \begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}$$

$$\phi = e^{i\left(\frac{\xi}{v}\right)J}\begin{pmatrix}0\\ v+\eta\end{pmatrix}$$

$$|\phi|^2 = (v+\eta)^2 = v^2 + 2v\eta + \eta^2$$

$$V(\phi) = -\frac{\mu}{2}(v^2 + 2v\eta + \eta^2) + \frac{\lambda}{4}(v^4 + 4v^2\eta^2 + \eta^4 + 4v^3\eta + 2v^2\eta^2 + 4v\eta^3) =$$

$$= V(\phi_0) + \left[\left(-\frac{\mu}{2} + \lambda v^2 + \frac{\lambda}{2}v^2\right)\eta^2 + h.o.t.\right] =$$

$$= V(\phi_0) + \frac{1}{2}(2\lambda v^2)\eta^2 + h.o.t.$$

NB: $\lambda v^2 = \mu$, quindi $M_\eta = 2\mu$

Più in generale, se $\phi \in \mathbb{R}^n$ (o $\Psi \in \mathbb{C}^n$), scegliamo $\phi_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ v\end{pmatrix}$ e scriviamo

$$\phi = \exp[i\,\xi_\alpha \cdot L_\alpha]\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ v+\eta\end{pmatrix} \qquad L_\alpha \text{ generatori di } G/G_0$$

$$|\phi|^2 = v^2 + \eta^2 + 2v\eta$$

I calcoli seguono quelli del caso precedente:

$M_\eta = 2\mu$; $M_{\xi_\alpha} = 0$

È ovvio che in tutti i casi, con una parametrizzazione del tipo

$$\phi = \exp[i\,\xi_\alpha \cdot L_\alpha]\; f(v; \eta_1, \dots, \eta_b)$$

abbiamo che $M_{\xi_\alpha} = 0$; i campi ξ_α saranno tanti quanti le dimensioni dell'orbita di G attraverso ϕ_0, ossia l'orbita di G/G_0 (simmetrie rotte)

<u>Teorema di Goldstone</u> Se il vuoto ϕ_0 ha simmetria G/G_0, allora esistono $K = m_1 - m_0$ ($m_0 = \dim G_0$; $m = \dim G$) campi a massa nulla.

<u>Osservazione</u> La discussione si riferisce a simm. "rigide", in cui il termine cinetico in $\mathcal{L}$ non ha nessun ruolo; nel caso di gauge la situaz. è diversa.

5

Nel nostro linguaggio possiamo riformulare il risultato come segue

Thm di Goldstone Passando a coordinate adattate $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ tali che $T_{\phi_0} G \simeq (\xi^1, \dots, \xi^k)$; $T_{\phi_0} M = (\xi^1, \dots, \xi^k; \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m)$, il potenz. inver. V sarà funz. solo delle η e dunque

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} M_{ij} \eta^i \eta^j$$

; i campi $\xi^1, \dots, \xi^k$ hanno sempre "massa nulla".

Nel discutere questo abbiamo considerato solo V, ossia gli invarianti ordinari di G, ma non il termine cinetico T, ossia gli invarianti differenziali di G.

1

Il meccanismo di Higgs (I)

Nel caso di teorie di gauge i termini cinetici originati da

$$\nabla_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a + A_\mu \phi^a$$

produrranno un accoppiamento tra i campi $\underline{\phi}$, ovvero $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ e di campi di gauge A_μ.

Esempio: $\phi \in \mathbb{R}^2$ $(\psi \in \mathbb{C})$, $G = U_1$. Abbiamo

$$\mathcal{L} = (\nabla_\mu \phi)^+ (\nabla^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\phi \to \tilde{\phi} = \exp\left[-i \frac{\xi}{v}\right] \phi \qquad \text{(corrisp. alla paramet.)}$$

$$A_\mu \to \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{eV} \partial_\mu \xi \qquad \nabla_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2} e^2 v^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu + \frac{1}{2} e^2 \tilde{A}_\mu^2 (2v + \eta) \eta - \frac{1}{2} \eta^2 (\lambda v^2 + \mu) - \lambda v \eta^3 - \lambda \eta^4$$

La parte in η si separa, e i termini quadratici danno

$$\mathcal{L}_q = -\frac{1}{4} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2} e^2 v^2 \tilde{A}_\mu \tilde{A}^\mu + \cancel{\frac{1}{2} e^2 v \tilde{A}_\mu^2} - \frac{1}{2} (\lambda v^2 + \mu) \eta^2$$

e dunque η ha massa 2μ -

Vediamo la parte che accoppia A e ξ (in effetti A_μ e $\partial_\mu \xi$):

$$\mathcal{L}_H = -\frac{1}{4}\left[(\partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu)(\partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}e^2v^2\left(A_\mu - (ev)^{-1}\partial_\mu \xi\right)\left(A^\mu - (ev)^{-1}\partial^\mu \xi\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - (ev)^{-1}(\partial_\mu\partial_\nu \xi - \partial_\nu\partial_\mu \xi)\right] \cdot$$

$$\cdot\left[(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - (ev)^{-1}(\partial^\mu\partial^\nu \xi - \partial^\nu\partial^\mu \xi)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}e^2v^2\left[(A_\mu A^\mu) + (ev)^{-2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \right.$$

$$\left. - (ev)^{-1}(A_\mu \partial^\mu \xi + A^\mu \partial_\mu \xi)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}e^2v^2 A_\mu A^\mu + (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) +$$

$$- (ev)\, A^\mu(\partial_\mu \xi)$$

Per disaccoppiare i termini in A_μ e $\partial_\mu \xi$, è sufficiente scrivere

$$\tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu \xi \qquad \tilde{\xi} = \xi + \frac{1}{v}$$

(cioè tornare alla notaz. precedente): in questa

ξ non è presente ed il campo (a massa nulla) A è sostituito da $\tilde{A} = A - (ev)^{-1}\partial\xi$

con massa
$$M_A = 2(e^2v^2)$$

Nel caso generale, in cui non tutte le simmetrie sono rotte, la situazione è leggermente più complicata

Il meccanismo di Higgs (II)

Consideriamo il caso generale $G = O(n)$, o $U(n)$, o $SO(n)$ o $SU(n)$.

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Psi)^+ g^{\mu\nu} (\partial_\nu \Psi) - V(\phi) - \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

$$V(\Psi) = -\frac{\mu}{2} |\Psi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\Psi|^4 \qquad \mu > 0$$

$$\nabla V = 0 \qquad |\Psi|^2 = \mu/\lambda$$

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{\mu/\lambda} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \exp\left[i\, \xi^a L_a\right] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \equiv e^{i \xi \cdot L}\, \Phi$$

$$|\Psi|^2 = |v+\eta|^2 = v^2 + \eta^2 + 2v\eta$$

$$V(\Psi) = -\frac{\mu}{2}(v^2 + \eta^2 + 2v\eta) + \frac{\lambda}{4}(v^4 + \eta^4 + 4v^2\eta^2 + 2v^2\eta^2 + 4v^3\eta + 4v\eta^3) =$$

$$= V(\Psi_0) + \left[\left(-\frac{\mu}{2} + \lambda v^2 + \frac{\lambda}{2} v^2\right)\eta^2\right] + h.o.t. =$$

$$= V(\Psi_0) + \lambda v^2 \eta^2 = V(\Psi_0) + \mu \eta^2 + h.o.t.$$

$$M_\eta = 2\mu$$

Passiamo a considerare, con una trasf. di gauge

$$\gamma(x) = e^{-i \xi \cdot L}$$

$$\tilde{\Psi} = \gamma \Psi = \phi$$

(questa semplifica notevolmente $\mathcal{L}$); per A_μ,

$$A_\mu = A_\mu^a L_a$$

$$\tilde{A}_\mu = \gamma A_\mu \gamma^{-1} - (\partial_\mu \gamma)\gamma^{-1}$$

$$= A_\mu - i(\partial_\mu \xi)\cdot L + o(\xi) =$$

$$= \left[A_\mu^a - i(\partial_\mu \xi^a)\right] L_a := \tilde{A}_\mu^a L_a$$

$$\tilde{A}_\mu^a = A_\mu^a - i(\partial_\mu \xi^a).$$

In questa gauge, il termine $\partial_\mu \xi^a$ è stato "assorbito" in A_μ^a.

Il termine di massa per A in $\mathcal{L}$ è in $\frac{1}{2}(\nabla_\mu \Psi)^+ (\nabla^\mu \Psi) = \frac{1}{2}((\partial_\mu + A_\mu)\Psi)^+ (\partial^\mu + A^\mu)\Psi)$ che dà in particolare $\frac{1}{2}(\Psi^+ A_\mu^+ A^\mu \Psi)$; abbiamo ora

$$\frac{1}{2}(L_a v, L_b v) A_\mu^a A^{b\mu} = \frac{1}{2} (v, L_a L_b v) A_\mu^a A^{b\mu}$$

e quindi la matrice di massa è

$$M_{ab} = (\Phi, L_a L_b \Phi)$$

NB: a volte si introducono cost. di accopp. g^a: $\nabla_\mu = \partial_\mu + g_a A_\mu^a L_a$; allora $M_{ab} = g_a g_b (\Phi, L_a L_b \Phi)$