

# Equazione del trasporto

Corso di Fisica Matematica 2, a.a. 2019-2020  
Dipartimento di Matematica, Università di Milano

8/10/2019

Questa breve dispensa è dedicata ad un tipo particolare, ma rilevante nelle applicazioni, di equazione quasilineare del primo ordine, le cosiddette equazioni del trasporto.

## 1 Equazione di Eulero

Consideriamo un insieme di particelle sulla retta, ognuna delle quali inizialmente (al tempo  $t_0$ ) nella posizione  $x_i(0) = \xi_i$ , e dotata della velocità  $v_i$ . Supponiamo che queste si muovano per inerzia, ossia mantenendo la loro velocità iniziale. Supponiamo inoltre che le particelle siano abbastanza dense da poter essere descritte come un fluido, ma allo stesso tempo che questo fluido sia abbastanza rarefatto da non presentare (almeno inizialmente) interazioni (urti) tra le particelle di cui è costituito.

Siamo interessati al *campo di velocità* per il fluido, ossia la funzione  $u(x, t)$  che descrive la velocità delle particelle che si trovano nel punto  $x$  al tempo  $t$ ; vorremmo in particolare determinare l'equazione che governa questo campo.<sup>1</sup>

In altre parole, nel linguaggio della Fisica, vogliamo passare dal punto di vista Lagrangiano (descrizione in termini delle particelle, con variabili fisiche associate alla singola particella) al punto di vista Euleriano (descrizione in termini di fluido, con variabili fisiche associate al punto dello spazio-tempo).

Ovviamente la particella inizialmente al punto  $\xi$  avrà un moto descritto da

$$x(t) = \varphi(t; \xi) = \xi + u(\xi, 0) t ; \quad (1)$$

infatti al tempo  $t = 0$  la funzione  $u(\xi, 0) = v(\xi)$  non è altri che la velocità della particella inizialmente in  $x = \xi$ . La funzione  $\varphi(t)$  soddisfa l'equazione di Newton (in assenza di forze esterne)

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 . \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>La derivazione che segue è quella fornita da Arnold nel suo testo sulle PDE; lo studente è fortemente invitato a consultare questo testo per vedere come questa costruzione si generalizza, e le connessioni di questa con la formulazione di Jacobi della Meccanica.

D'altra parte, per definizione,

$$\frac{d\varphi}{dt} = [u(x, t)]_{x=\varphi(t)} = u(\varphi(t), t) . \quad (3)$$

Considerando la derivata totale di questa relazione rispetto al tempo, e ricordando la (2), abbiamo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} = 0 ; \quad (4)$$

ricordando infine ancora una volta che  $d\varphi/dt = u(\varphi(t), t)$ , giungiamo alla *equazione di Eulero*, o *equazione del trasporto*<sup>2</sup>

$$u_t + u u_x = 0 . \quad (5)$$

E' immediato vedere che il flusso associato all'equazione (5) è

$$\frac{dt}{ds} = 1 , \quad \frac{dx}{ds} = u , \quad \frac{du}{ds} = 0 . \quad (6)$$

La soluzione di queste equazioni (cioè il flusso) è dato da

$$t = t_0 + s , \quad x(s) = x_0 + u_0 s , \quad u(s) = u_0 ; \quad (7)$$

possiamo naturalmente passare alla variabile  $t$ , ottenendo

$$x(t) = x_0 + u_0(t - t_0) , \quad u(t) = u_0 . \quad (8)$$

Siamo così tornati alla formulazione iniziale, mostrando la completa equivalenza tra le due formulazioni del problema.

## 2 Soluzioni dell'equazione di Eulero

E' naturale fornire le condizioni iniziali nella forma  $u(x, 0) = \psi(x)$ , cioè assegnando il campo di velocità al tempo  $t_0$  (e senza perdita di generalità possiamo assumere  $t_0 = 0$ ).

Purtroppo, non è possibile determinare  $u(x, t)$  in forma chiusa a partire da  $\psi(x)$ . In effetti, le equazioni delle caratteristiche sono le (6), ed è immediato verificare che due costanti del moto per il flusso sono ad esempio

$$\zeta_1 = (x - ut) , \quad \zeta_2 = u .$$

La soluzione generale della (5) sarà dunque (in forma implicita)

$$F[\zeta_1, \zeta_2] = 0 . \quad (9)$$

---

<sup>2</sup>Questa equazione è a volte anche chiamata, in particolare dagli studiosi di teoria dei plasmi, equazione di Hopf.

D'altra parte, le (6) mostrano che è possibile esprimere  $x(s)$  in termini di  $u$  e  $t$ ; questa espressione è semplicemente<sup>3</sup>

$$x = x(u, t) = K(u) + ut. \quad (10)$$

Notiamo che la funzione  $K(u)$  è determinata dalle condizioni iniziali; infatti a  $t = 0$  abbiamo  $x(u, 0) = K(u)$ . In altre parole, la  $K$  è la funzione che si ottiene invertendo la  $u(x, 0) = \psi(x)$ ; notiamo che in generale questa inversa è solo locale, a meno che  $\psi(x)$  non sia monotona.

Naturalmente, la (10) definisce anche, implicitamente,  $u = u(x, t)$ ; ancora una volta questa è in generale ben definita solo localmente, a meno che  $x$  non sia monotona come funzione di  $u$  a  $t$  fissato.

In effetti, la monotonicità di  $x$  come funzione di  $u$  a  $t$  fissato non è una proprietà conservata nella dinamica; in altre parole, anche se  $K(u)$  è monotona, per un  $t$  arbitrario la funzione  $K(u) + ut$  non sarà in generale (cioè per  $K$  generica) monotona. In particolare, dato che  $ut$  è monotona crescente come funzione di  $u$  per ogni  $t > 0$ , abbiamo che se  $K(u)$  è monotona crescente possiamo affermare che  $H(u; t) := K(u) + ut$  sarà monotona crescente come funzione di  $u$  per ogni  $t > 0$ ; mentre se  $K(u)$  è monotona decrescente non possiamo fare nessuna affermazione generale sulla monotonicità di  $H(u; t)$  per  $t$  positivi – anche se a seconda del comportamento di  $K$  la monotonicità (e quindi l'invertibilità) di  $H(u; t)$  a  $t$  fissato potrebbe essere garantita per  $t$  sufficientemente piccolo.<sup>4</sup>

Queste considerazioni sono rilevanti anche per lo studio del problema di Cauchy per l'equazione di Eulero, come vedremo tra poco.

### 3 Formazione di singolarità per l'equazione di Eulero

E' evidente che se  $u(x, 0) = \psi(x)$  è monotona crescente – cioè le particelle che si trovano in una posizione  $x = \xi$  sono più veloci di quelle che si trovano a sinistra e meno veloci di quelle che si trovano a destra – non si hanno collisioni, ed anzi la densità delle particelle diminuisce nel tempo. In altre parole, sotto queste condizioni iniziali le assunzioni che giustificano la formulazione del problema in termini di una equazione per un fluido senza interazioni restano valide per ogni tempo  $t > t_0$ .

La situazione “interessante” si ha invece quando, almeno in un intervallo  $(x_-, x_+)$ , la funzione  $\psi(x)$  è monotona *decrescente*. In questo caso le particelle a sinistra sono più veloci di quelle a destra, e quindi dopo un qualche tempo  $\eta$  si avranno diverse particelle (con diverse velocità) nella stessa posizione  $\xi$ . Anche assumendo che queste non interagiscano, una situazione del genere rende impossibile la definizione del campo di velocità per il fluido (in quanto non si

<sup>3</sup>E' sufficiente verificare che in effetti  $dx/ds = (\partial x/\partial u)(du/ds) + (\partial x/\partial t)(dt/ds) = u$ , come richiesto dalle (6).

<sup>4</sup>In particolare, dato che  $(\partial H/\partial u) = K'(u) + t$  per  $t < t_1$ , dove  $t_1$  è pari al minimo valore assunto da  $|K'(u)|$  (si ricordi che siamo nell'ipotesi  $K'(u) < 0$ ).

ha una velocità  $u(\xi, \eta)$  univocamente associata alla posizione  $\xi$  al tempo  $\eta$ . In questo caso si parla di collisioni, o di *inversione dell'onda*; la ragione di questo nome è illustrata nelle figure 6 e 8.

Naturalmente, in una situazione del genere è interessante sapere dopo quanto tempo si presenta questo fenomeno, ossia dopo quanto tempo la descrizione in termini dell'equazione di Eulero non è più valida; è anche interessante sapere in quale posizione si creeranno le collisioni (l'inversione dell'onda): questo è associato fisicamente alla creazione di *onde d'urto*, anche se per descrivere questo fenomeno è in realtà necessario considerare delle equazioni diverse dall'equazione di Eulero, appunto per tenere conto delle interazioni tra le particelle del fluido.

In effetti, quando la densità di particelle del fluido cresce, non si può più assumere che queste si muovano con la loro velocità iniziale, ed è necessario considerare le interazioni mutue. In questo caso, la descrizione è fornita dalla *equazione di Burgers*

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx} , \quad (11)$$

in cui  $\nu$  rappresenta la *viscosità*; si tratta di un'equazione del secondo ordine e che quindi esula dal nostro argomento presente.<sup>5</sup>

L'equazione di Burgers può essere risolta esattamente: esiste una mappa (detta di Cole-Hopf) che la trasforma nella equazione del calore; quest'ultima verrà studiata nel seguito del corso e vedremo che la si risolve in modo esatto. La mappa di Cole-Hopf è

$$u = -2\nu \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial x} ,$$

e lo studente può facilmente controllare per esercizio che con questa trasformazione la (11) diviene in effetti

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 . \quad (12)$$

## 4 Il problema di Cauchy e l'inversione dell'onda

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione di Eulero; come detto sopra, la sua formulazione naturale si ha assegnando un dato iniziale per il campo di velocità,

$$u(x, 0) = \psi(x) .$$

Se  $\psi$  è una funzione monotona (in particolare, decrescente; come discusso nella sezione precedente questo è il caso interessante), possiamo invertirla, ed esprimere

$$x(u, 0) = K(u) ,$$

dove naturalmente

$$K[\psi(x)] = x , \quad \psi[K(u)] = u .$$

---

<sup>5</sup>Notiamo comunque che si tratta di una *perturbazione singolare* dell'equazione di Eulero, in quanto per  $\nu$  piccolo ma non nullo l'equazione diventa di un tipo (ordine) diverso rispetto al caso  $\nu = 0$ .

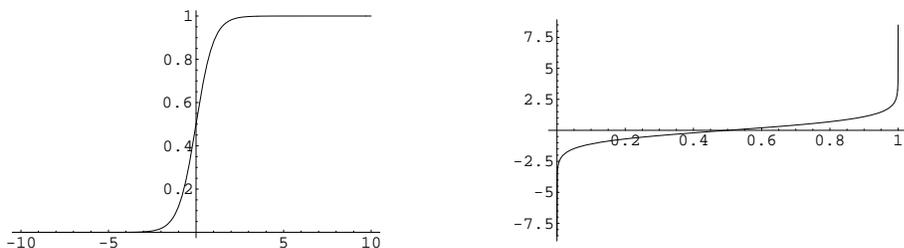


Figura 1: Le condizioni iniziali  $u(x, 0) = \psi(x)$  (a sinistra) e  $x(u, 0) = K(u)$  (a destra) per l'esempio 1.

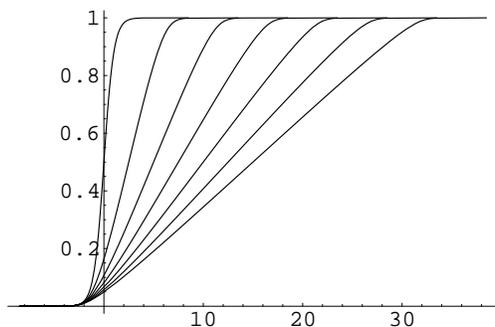


Figura 2: L'evoluzione della  $u(x, t)$  a partire dalle condizioni iniziali illustrate in figura 1; il grafico rappresenta  $u(x, t_k)$  per  $t_k = 5k$ , e le funzioni risultano ordinate da sinistra verso destra per  $k = 0, \dots, 6$ , dunque per  $t$  crescente.

A questo punto, usando la (10) possiamo determinare  $x(u, t)$  per ogni  $t$ ; se al tempo  $t_*$  la  $x(u, t_*)$  è ancora monotona, possiamo invertirla e determinare  $u(x, t_*)$ .

**Esempio 1.** Consideriamo il dato iniziale

$$u(x, 0) = \psi(x) = (1/2) [1 + \tanh x];$$

invertendo questa funzione otteniamo (si veda anche la figura 1

$$x(u, 0) = K(u) = \operatorname{arctanh}(2u - 1).$$

Notiamo che  $K'(u) > 0$  per ogni  $u$  finito (e  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} K'(u) = \infty$ ).

Al tempo  $t = t_1 > 0$  abbiamo quindi, dalla (10),

$$x(u, t_1) = K(u) + u t_1 = \operatorname{arctanh}(2u - 1) + u t_1.$$

Questa funzione non può essere invertita esplicitamente, ma è evidentemente ancora monotona crescente (grazie a  $K'(u) > 0$  e a  $t_1 > 0$ ); quindi può essere invertita, ed è facile farlo numericamente.

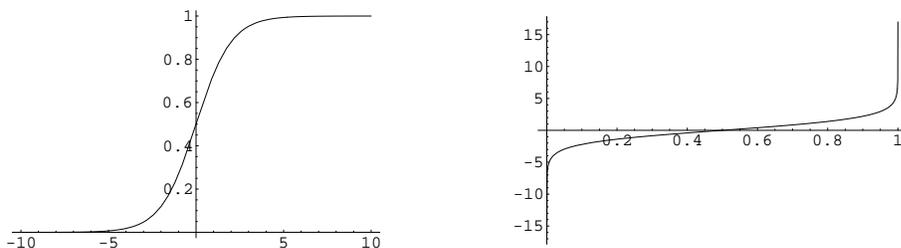


Figura 3: Le condizioni iniziali  $u(x, 0) = \psi(x)$  (a sinistra) e  $x(u, 0) = K(u)$  (a destra) per l'esempio 2.

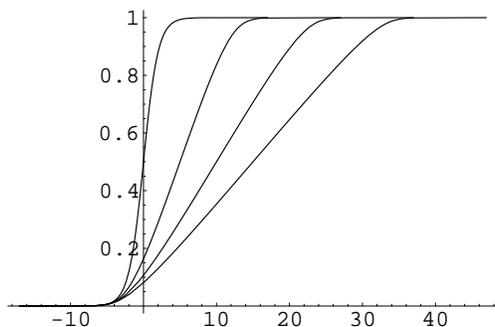


Figura 4: L'evoluzione della  $u(x, t)$  a partire dalle condizioni iniziali illustrate in figura 3 (esempio 2); il grafico rappresenta  $u(x, t_k)$  per  $t_k = 10k$ , e le funzioni risultano ordinate da sinistra verso destra per  $k = 0, \dots, 3$ , dunque per  $t$  crescente.

Come mostrato nella figura 2, si ha in effetti un “rilassamento” della funzione  $u(x, t)$ .  $\triangle$

**Esempio 2.** Un comportamento assolutamente analogo si osserva per altre scelte della  $\psi(x)$  (purché monotona crescente); ad esempio le figure 3 e 4 mostrano la situazione per

$$\psi(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad K(u) = \log\left(\frac{u}{u-1}\right).$$

**Esempio 3.** Consideriamo ora il dato iniziale

$$u(x, 0) = \psi(x) = (1/2) [1 - \tanh x].$$

Ora  $\psi(x)$  è monotona *decrecente*; invertendo questa funzione otteniamo (si veda anche la figura 5)

$$x(u, 0) = K(u) = \operatorname{arctanh}(1 - 2u).$$

Notiamo che  $K'(u) < 0$  per ogni  $u$  finito (e  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} K'(u) = -\infty$ ).

Al tempo  $t = t_1 > 0$  abbiamo quindi, dalla (10),

$$x(u, t_1) = K(u) + u t_1 = \operatorname{arctanh}(1 - 2u) + u t_1.$$

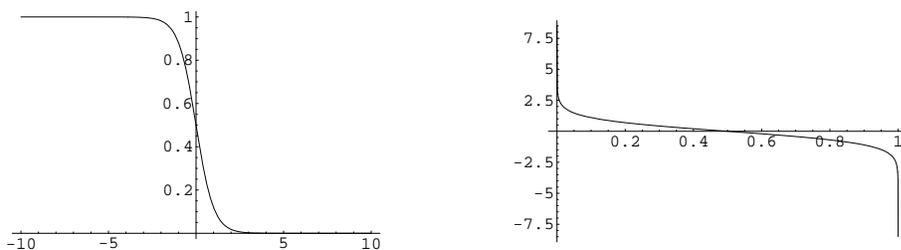


Figura 5: Le condizioni iniziali  $u(x, 0) = \psi(x)$  (a sinistra) e  $x(u, 0) = K(u)$  (a destra) per l'esempio 3.

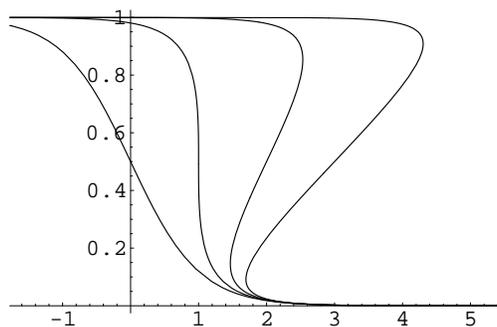


Figura 6: L'evoluzione della  $u(x, t)$  a partire dalle condizioni iniziali illustrate in figura 5 (esempio 3); il grafico rappresenta  $u(x, t_k)$  per  $t_k = k$ , e le funzioni risultano ordinate da sinistra verso destra per  $t$  crescente ( $k = 0, \dots, 3$ ). Si osserva l'inversione dell'onda.

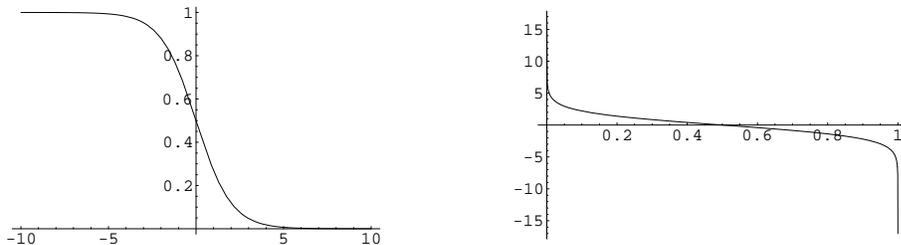


Figura 7: Le condizioni iniziali  $u(x, 0) = \psi(x)$  (a sinistra) e  $x(u, 0) = K(u)$  (a destra) per l'esempio 4.

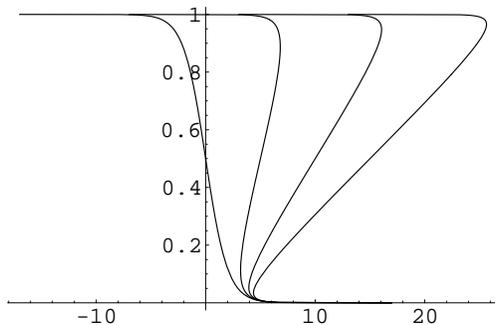


Figura 8: L'evoluzione della  $u(x, t)$  a partire dalle condizioni iniziali illustrate in figura 7 (esempio 4); il grafico rappresenta  $u(x, t_k)$  per  $t_k = k$ , e le funzioni risultano ordinate da sinistra verso destra per  $k = 0, \dots, 3$ , dunque per  $t$  crescente.

Questa funzione non è garantita essere ancora monotona: la derivata del primo addendo è negativa, quella del secondo positiva (avendo scelto  $t_1 > 0$ ).

In effetti, come mostrato nella figura 6, quando  $t$  è abbastanza grande si ha un "ripiegamento" della funzione  $u(x, t)$ , ovvero una *inversione dell'onda*.  $\triangle$

**Esempio 4.** Un comportamento assolutamente analogo si osserva per altre scelte della  $\psi(x)$  (purché monotona decrescente); ad esempio le figure 7 e 8 mostrano la situazione per

$$\psi(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad K(u) = \log\left(\frac{u-1}{u}\right). \quad \triangle$$

**Esempio 5.** Gli esempi precedenti riguardano unicamente dati iniziali monotoni (crescenti o decrescenti), ma naturalmente nulla impedisce di considerare dati iniziali non monotoni; in questo caso ovviamente l'inversione dei dati iniziali sarà possibile solo a tratti (nei domini di monotonicità). Ad esempio le figure 9 e 10 si riferiscono alla situazione con dato iniziale gaussiano,

$$\psi(x) = e^{-x^2/2}. \quad \triangle$$

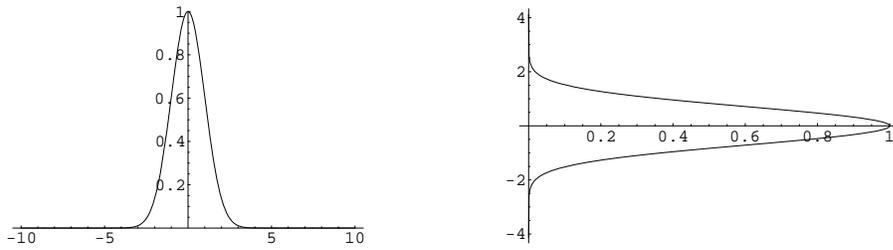


Figura 9: Le condizioni iniziali  $u(x, 0) = \psi(x)$  (a sinistra) e  $x(u, 0) = K(u)$  (a destra) per l'esempio 5.

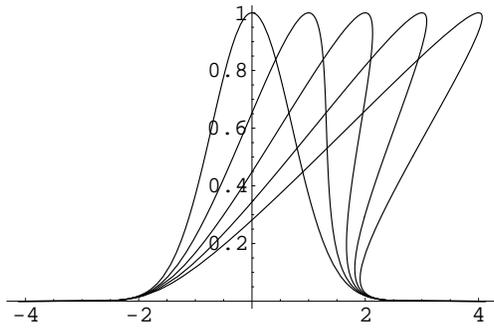


Figura 10: L'evoluzione della  $u(x, t)$  a partire dalle condizioni iniziali illustrate in figura 9 (esempio 5); il grafico rappresenta  $u(x, t_k)$  per  $t_k = k$ , e le funzioni risultano ordinate da sinistra verso destra per  $k = 0, \dots, 4$ , dunque per  $t$  crescente.

## 5 Inversione dell'onda: discussione analitica

Vogliamo ora, dopo aver mostrato numericamente l'insorgere del fenomeno, ottenere delle informazioni analitiche sulla inversione dell'onda.

Più precisamente, vorremmo essere in grado di determinare dopo quanto tempo questo si verifica, e qual è il punto dello spazio in cui inizia il ripiegamento; ossia il “primo” punto<sup>6</sup>  $(x, t)$  dello spazio-tempo per cui  $u(x, t)$  non è univocamente definita.

Ricordiamo che

$$u(s) = u_0, \quad t(s) = s + t_0, \quad x(s) = x_0 + u_0 s = x_0 + u_0(t - t_0).$$

Indicheremo, come in precedenza, la funzione che associa ad una condizione iniziale  $(x_0, t_0, u_0)$  la  $x(s)$  come  $\varphi$ , si veda la (8).

La condizione di “inversione dell'onda” corrisponde, come gi' a detto, a quella in cui due diverse particelle (quindi, inizialmente in posizioni diverse) si trovano allo stesso punto nello stesso momento, e la funzione  $u(x, t)$  non è quindi più ben definita.

In altre parole, dobbiamo chiederci se esistono due diverse posizioni e velocità iniziali  $(x_1, u_1)$  ed  $(x_2, u_2)$  (allo stesso tempo  $t_0$ ) per cui

$$\varphi(x_1, u_1; t - t_0) = \varphi(x_2, u_2; t - t_0);$$

naturalmente se  $u_i$  è fornita dalla condizione iniziale  $u(x, t_0) = \psi(x)$ , dobbiamo risolvere

$$\varphi[x_1, \psi(x_1); t - t_0] = \varphi[x_2, \psi(x_2); t - t_0]. \quad (13)$$

Usando la (8), questa si riscrive come

$$x_1 + \psi(x_1)(t - t_0) = x_2 + \psi(x_2)(t - t_0), \quad (14)$$

ovvero

$$(t - t_0) = - \frac{(x_2 - x_1)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)}. \quad (15)$$

Abbiamo quindi che la condizione di collisione tra le particelle inizialmente in  $x_1$  ed in  $x_2$  si verifica (se si verifica) al tempo

$$t_* = t_0 - \frac{(x_2 - x_1)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)} \quad (16)$$

ed avviene nel punto

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \psi(x_1)(t_* - t_0) = x_1 - \psi(x_1) \frac{(x_2 - x_1)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)} \\ &= x_2 - \psi(x_2) \frac{(x_2 - x_1)}{\psi(x_2) - \psi(x_1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

---

<sup>6</sup>Naturalmente qui “primo” si riferisce all'ordinamento temporale.

Passando al limite di particelle inizialmente vicine,  $x_1 = \xi$ ,  $x_2 = \xi + \varepsilon$ , abbiamo

$$t_*(\xi) = t_0 - 1/[\psi'(\xi)], \quad x_*(\xi) = \xi + \psi(\xi)(t_* - t_0) = \xi - [\psi(\xi)/\psi'(\xi)]. \quad (18)$$

Si noti che (come ovvio fisicamente) la collisione avviene solo se la derivata della condizione iniziale  $\psi(x)$  è, almeno in alcuni punti, negativa.

Ovviamente, purché questa condizione sia soddisfatta, la  $\xi$  che darà origine per prima a collisioni (e quindi all'inversione dell'onda) sarà quella in cui  $\psi'$  è minima (cioè massima in valore assoluto tra quelle negative); detto

$$\xi_* = \{x : \psi'(x) \text{ minimo}\} \quad \psi'(\xi_*) < 0, \quad (19)$$

abbiamo infine<sup>7</sup>

$$t_* - t_0 = -1/[\psi'(\xi_*)], \quad x_* = \xi_* - [\psi(\xi_*)/\psi'(\xi_*)]. \quad (20)$$

**Esempio 6.** Consideriamo il dato iniziale dell'esempio 3,

$$\psi(x) = 1 - \tanh(x).$$

In questo caso abbiamo

$$\psi'(\xi) = \frac{1}{\cosh^2(\xi)},$$

ed il minimo di  $\psi'(\xi)$  si raggiunge in  $\xi = 0$ ; inoltre  $\psi(0) = 1$ ,  $\psi'(0) = -1$ .

Abbiamo quindi (con  $t_0 = 0$ )  $\xi_* = 0$ ,

$$t_* = -[\psi'(\xi_*)]^{-1} = 1;$$

l'inversione dell'onda avviene al tempo  $t_* = 1$ , e nel punto

$$x_* = \xi_* - [\psi(\xi_*)/\psi'(\xi_*)] = 1. \quad \triangle$$

**Esempio 7.** Consideriamo il dato iniziale

$$\psi(\xi) = (\pi/2) - \arctan(\xi),$$

che fornisce

$$\psi'(\xi) = -\frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Il minimo di  $\psi'(\xi)$  si ha per  $\xi_* = 0$ , con

$$\psi(\xi_*) = \pi/2, \quad \psi'(\xi_*) = -1.$$

Abbiamo quindi (ponendo  $t_0 = 0$ )  $\xi_* = 0$ ,

$$t_* = -[\psi'(\xi_*)]^{-1} = 1;$$

l'inversione dell'onda avviene al tempo  $t_* = 1$ , e nel punto

$$x_* = \xi_* - [\psi(\xi_*)/\psi'(\xi_*)] = \pi/2. \quad \triangle$$

---

<sup>7</sup>Una soluzione alternativa si ottiene invertendo il problema, e determinando la posizione iniziale  $x_0$  delle particelle che si trovano al punto  $x$  al tempo  $t$ ; detta  $x_0 = F(x, \psi(x), t - t_0)$  questa relazione, dovremo determinare se (al tempo  $t$ ) esistono punti per cui  $(\partial x_0 / \partial x) = \infty$ .

## Appendice. Onde di piena

Equazioni del tipo dell'equazione del trasporto si incontrano nella descrizione di una grande varietà di fenomeni. In questa Appendice discutiamo brevemente le equazioni che descrivono le onde di piena nei fiumi (o più propriamente, in vista delle assunzioni che sono alla base della loro derivazione, nei torrenti o ancor meglio in canali destinati a portare a valle velocemente l'eccesso di acqua nelle zone montane); per una trattazione più completa rimandiamo a testi specifici; ad esempio, quello di Thual<sup>8</sup>.

Considereremo l'idealizzazione di un corso d'acqua che ha un fondo a pendenza costante; più precisamente indichiamo con  $\gamma$  l'angolo tra il fondo del letto del fiume (o canale) e l'orizzontale. Inoltre, supporremo che le caratteristiche geometriche e fisiche (geologiche) del letto siano tali che i coefficienti che appaiono nelle equazioni e che descrivono l'effetto delle irregolarità del letto sullo scorrere dell'acqua si possano considerare come costanti.

Inoltre, trascureremo le variazioni in direzione trasversa al corso d'acqua, ossia considereremo il problema come monodimensionale. Naturalmente, l'acqua superiormente a contatto con l'atmosfera; si tratta quindi di un problema a *frontiera libera*.

In questo caso una descrizione dello stato del fluido è fornita da due campi,  $h(x, t)$  e  $u(x, t)$ ; il primo descrive l'altezza dell'acqua (nel punto  $x$  al tempo  $t$ ), mentre il secondo descrive la sua velocità (sempre nel punto  $x$  ed al tempo  $t$ ). E' bene specificare che la velocità del fluido dipende naturalmente (per  $x$  costante) dalla distanza  $z$  dal fondo (in particolare, la velocità si annulla a contatto con il fondo stesso, cioè per  $z = 0$ ); qui  $u(x, t)$  indica la velocità del fluido *alla superficie*, quindi ad una distanza  $h$  dal fondo.

Il sistema è descritto dalle *equazioni di Saint Venant* (per la cui derivazione a partire dalle equazioni di Navier-Stokes rimandiamo ad esempio al testo di Thual già menzionato, o comunque a testi di Idrodinamica); si tratta di un sistema di due equazioni a derivate parziali del primo ordine,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} &= -h \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= -(g \cos \gamma) \frac{\partial h}{\partial x} + g \sin \gamma - \frac{C u |u|}{2 h} . \end{aligned}$$

Qui  $C$  è un coefficiente che descrive la dissipazione dell'energia del fluido dovuta alla turbolenza del flusso ed agli attriti con il letto del corso d'acqua, e  $g$  è l'accelerazione di gravità. Per  $\gamma$  non troppo piccolo,  $u$  è essenzialmente determinato da  $h$ ,  $u = U(h)$ , e si ottiene il limite della equazione delle onde di piena, cioè

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \lambda(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 ,$$

dove abbiamo scritto (il coefficiente dimensionale  $K_s$  è noto come coefficiente di scabrezza di Strickler; in fiumi di montagna il suo valore è di  $15 - 30m^{1/3}/s$ ; in

<sup>8</sup>O. Thual, *Hydrodynamique de l'environnement*, Les Éditions de l'École Polytechnique (Palaiseau), 2010.

grandi fiumi a sezione regolare può giungere fino a  $40m^{1/3}/s$ )

$$\lambda(h) := (5/3)U(h) = (5/3)K \sqrt{\sin \gamma} h^{2/3} := Ah^{2/3} .$$

In altre parole, l'equazione per le onde di piena risulta essere

$$\frac{\partial h}{\partial t} + Ah^{2/3} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 . \quad (A.1)$$

Naturalmente il coefficiente dimensionale  $A$  (si noti che  $A > 0$ ) può essere posto uguale all'unità cambiando le unità di misura di una tra le quantità  $h, x, t$ . Abbiamo dunque a che fare con una equazione simile a quella del trasporto, con due differenze: (a) ora il coefficiente della derivata in  $x$  non è pari alla funzione incognita, ma ad essa elevata alla potenza  $2/3$ ; (b) la funzione incognita non descrive una velocità, ma il livello del fluido (naturalmente qui  $h(x, t) > 0$  (come ovvio considerando il suo significato fisico).

La discussione svolta per l'equazione del trasporto resta dunque valida dal punto di vista qualitativo; in particolare si assisterà al fenomeno del ripiegamento dell'onda; ovvero, quando si considerino anche le interazioni tra le particelle che compongono il fluido, alla formazione di onde d'urto. Si tratta appunto delle onde di piena.

Ripetiamo dunque brevemente la discussione svolta per l'equazione del trasporto, adattandola all'equazione (A.1) che stiamo ora considerando.

Vediamo in dettaglio leggermente maggiore questo fenomeno. Le equazioni delle caratteristiche saranno ora

$$dt/ds = 1 , \quad dx/ds = Ah^{2/3} , \quad dh/ds = 0 .$$

Abbiamo dunque  $h = cost$  lungo le linee caratteristiche, e (ponendo per semplicità  $t_0 = 0$ )

$$x(t) = x_0 + Ah^{2/3} t .$$

Se al tempo  $t = 0$  abbiamo  $h(x, 0) = H(x)$ , e questa funzione è invertibile – indicheremo in seguito l'inversa con  $x = K(h)$  – abbiamo

$$x(t) = x_0 + [H(x_0)]^{2/3} t .$$

Vogliamo però esprimere una relazione tra  $x(t)$  ed  $h(x, t)$ ; scriviamo quindi, ricordando che  $h = h_0$ ,

$$x(h, t) = K(h) + Ah^{2/3} t . \quad (A.2)$$

Abbiamo ora

$$\frac{\partial x}{\partial h} = K'(h) + A \frac{2}{3} \frac{t}{h^{1/3}} .$$

Come nel caso dell'equazione del trasporto, la monotonicità di  $K$  (cioè del dato iniziale) non assicura la monotonicità di  $x$  come funzione di  $h$  a  $t$  fissato ( $t \neq 0$ ), e dunque la possibilità di invertire questa relazione per  $t > 0$ , e facendo ciò scrivere  $h$  in funzione di  $x$  e  $t$ .

La condizione perché le (proiezioni nel piano  $(x, t)$  delle) caratteristiche che escono al tempo  $t = 0$  dai punti  $\xi$  e  $\xi + \varepsilon$  si incontrino al tempo  $t$  è ora che si abbia

$$\begin{aligned} \xi + A [H(\xi)]^{2/3} t &= (\xi + \varepsilon) + A [H(\xi + \varepsilon)]^{2/3} t \\ &= \xi + A [H(\xi)]^{2/3} t + \\ &\quad + \varepsilon \left[ 1 + A (2/3) [H(\xi)]^{-1/3} H'(\xi) \right] t . \end{aligned}$$

Questa è verificata per

$$t = t_*(\xi) := -\frac{3}{2} A \frac{[H(\xi)]^{1/3}}{H'(\xi)} . \quad (A.3)$$

Il minimo di  $t_*(\xi)$ , cioè il tempo in cui appare il ripiegamento dell'onda, corrisponde al minimo di questa funzione; abbiamo

$$t'(\xi) = \frac{A}{2 [H(\xi)]^{2/3} [H'(\xi)]^2} (3H(x)H''(x) - [H'(x)]^2) . \quad (A.4)$$

La derivata seconda è

$$t''(\xi) = \frac{A}{6H^{5/3}H'^3} \left( 2H'^4 + 3HH'^2H'' - 18(HH'')^2 + 9H^2H'H''' \right) ;$$

nei punti  $\xi_0$  in cui la derivata prima si annulla, questa espressione si semplifica (possiamo sostituire per  $H''$  ed  $H'''$ ) ed otteniamo

$$t''(\xi_0) = \frac{A}{3H^{5/3}(\xi_0)H'(\xi_0)} (3H(\xi_0)H''(\xi_0) - (H'(\xi_0))^2) .$$

Nel caso di punti critici multipli, questa permette di stabilire se  $\xi_0$  è un minimo o un massimo.

Per conoscere il punto  $x$  in cui l'onda di piena verrà a formarsi, è sufficiente calcolare  $x_* := x[t_*(\xi_0)]$ ; dalle formule precedenti risulta

$$x_* = \xi_0 + A [H(\xi_0)]^{2/3} t_*(\xi_0) . \quad (A.5)$$

**Esempio 8.** Consideriamo il dato iniziale

$$H(x) = \alpha - \beta \tanh(\lambda x) ;$$

si tratta di una funzione dello stesso tipo di quella considerata nell'esempio 3, ma ora introducendo parametri  $\alpha, \beta, \lambda$  per poter fissare i valori di  $h(x, 0)$  nei limiti per  $x \rightarrow \pm\infty$  e la pendenza del profilo iniziale. I parametri saranno tutti positivi (questo garantisce di avere una funzione monotona decrescente); e dovendo  $H(x) = h(x, 0)$  essere sempre positiva, avremo necessariamente  $\alpha > \beta$ .

Con questo dato iniziale abbiamo

$$t_*(\xi) = \frac{3A \cosh^2(\lambda x) [\alpha - \beta \tanh(\lambda x)]^{1/3}}{2\beta\lambda} ;$$

si tratta naturalmente di una funzione pari (come segue anche dal fatto che  $H(x)$  è ora la somma di una costante e di una funzione dispari), ed il suo unico punto critico, che è evidentemente un minimo (questo si può anche ricavare calcolando la derivata seconda, che risulta essere  $t_*''(0) = A\lambda(9\alpha^2 - \beta^2)/(3\alpha^{5/3}\beta)$ ; si ricordi che  $\alpha > \beta > 0$ ) si ha in  $\xi = \xi_0 = 0$ .

Dunque, applicando le formule ricavate in precedenza,

$$t_*(\xi_0) = \frac{3A\alpha^{1/3}}{2\beta\lambda}; \quad x_* = \frac{3A^2\alpha}{2\beta\lambda}. \quad \triangle$$

## Bibliografia

Per un approfondimento sugli argomenti discussi in questa dispensa è bene riferirsi ai testi di Arnold già citati a proposito delle caratteristiche in generale. Per applicazioni, si veda ad esempio il testo di Whitham.

- V.I. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Springer, 1983
- V.I. Arnold, *Lectures on partial differential equations*, Springer, 2004
- G.B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, Wiley, 1974