Capitolo 4

EPR 1935, Bell 1964

4.1 EPR (Einstein–Podolsky–Rosen)

Einstein, Podolsky e Rosen[1] in un lavoretto di quattro pagine portano un contributo che è molto significativo, indipendentemente da ogni interpretazione. Essi, nell'ambito degli assiomi da tutti accettati per la meccanica quantistica, vogliono criticare l'assioma centrale secondo il quale una osservabile ha un valore preciso solo dopo che sia stata compiuta una sua osservazione. Invece, prima della osservazione, essa non avrebbe un valore, ma in qualche modo solo una "propensione" ad avere (qualora osservata) tutti i possibili valori, con una diversa probabilità definita nel modo noto mediante la funzione d'onda (o lo stato). Sia ψ la funzione d'onda, e consideriamo una osservabile A con autovalori u_k relativi agli autovalori a_k (che per semplicità assumiamo non degeneri – cioè con autospazi monodimensionali), $Au_k = a_k u_k$. Allora la probabilità di osservare il valore a_k di A quando il sistema è nello stato ψ è data data da $p_k = |a_k|^2 = |(u_k, \psi)|^2$. Gli autori vogliono mostrare che gli altri assiomi della meccanica quantistica permettono di concludere che ogni osservabile debba avere un valore, anche se non la osserviamo, cioè non compiamo una misurazione appropriata che disturberebbe il sistema.[2] Il valore della osservabile sarebbe una proprietà oggettiva del sistema, indipendente dal fatto che noi la osserviamo o meno. La situazione sarebbe analoga a quella che riguarda il quinto postulato di Euclide. EPR vogliono mostrare che l'assioma della "precipitazione" (o collasso, *collapse*), cioè che il valore di una osservabile "diventi reale" solo quando si compie l'osservazione, che farebbe "precipitare" o cadere lo stato ψ sull'autostato corrispondente al'autovalore osservato, sarebbe un assioma indipendente dalgi altri, che potrebbe essere sostituito da un assioma diverso. Inoltre, essi vogliono fare ancora di più, cioè mostrare che i siste-

[1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Can quantum–mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **47**, 777–780 (1935).

[2] Si vedano i lavori moderni sul problema della decoerenza.

mi posseggano valori ben definiti anche per osservabili che nella meccanica quantistica vengono detti incompatibili, corrispondendo ad operatori non commutanti.

Il lavoro, di quatto pagine, consta di due paragrafi. Nel primo, non facilissimo a leggersi, gli autori si dilungano a dichiarare che cosa vogliono fare. In effetti, a nostro parere questo (cosa vogliano fare) si capisce bene leggendo il paragrafo 2, nel quale danno delle formule concrete. Lasciamo al lettore il piacere di leggere il primo paragrafo, e qui ne tratteniamo soltanto la conclusione che gli autori traggono rispetto al decidere se una proprietà sia reale o no. Nelle loro parole:

"We shall be satisfied with the following criterion, which we regard as reasonable. If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity."

Veniamo dunque al secondo paragrafo, che si legge benissimo. Ne diamo qui un riassunto volutamente non troppo dettagliato, per stimolare il lettore a passare alla lettura diretta.

Il problema riguarda la possibilità di assegnare, per un dato sistema, valori ben precisi a una di due osservabili P e Q non commutanti, con un procedimento che non disturba in alcun modo il sistema e che quindi non corrisponde ad alcun procedimento di misurazione eseguita su di esso. Infatti, il procedimento che permette di assegnare al sistema un valore p di P oppure un valore q di Q, consiste nell'eseguire una o un'altra misurazione (rispettivamente di certe osservabili A e B), che viene compiuta su un diverso sistema, quando questo sia talmente lontano dal sistema considerato, da potersi supporre che una misurazione su di esso non eserciti nessuna perturbazione sul sistema considerato. Ma evidentemente i due sottosistemi devono essere in qualche relazione reciproca, affinché da una osservazione su uno di essi si possa inferire qualcosa sull'altro.

Si considera quindi il sistema in oggetto come sottosistema (II) di un sistema composto (I+II), costituito dai due sottosistemi I e II che interagiscono al tempo 0 e poi si separano (si pensi ad esempio a due particelle prodotte da una disintegrazione nucleare, che si allontanano in direzioni opposte, avendo momenti opposti). Allora l'osservazione viene compiuta sul sistema I (osservando una di certe osservabili non commutanti A e B di I) dopo un tempo tanto grande che i due sistemi si siano talmente allontanati da potersi supporre che la misurazione compiuta su I non influenzi in alcun modo lo stato del sistema considerato, II. Per questo motivo, il paradosso EPR è intrinsecamente legato alla proprietà di *località*: si fanno delle osservazioni locali che si ammette non influenzino sistemi molto lontani.

Gli autori anzitutto richiamano un fatto generale ben noto. riguardante un sistema composto di due sottosistemi, che costituisce il cuore di tutto il lavoro. Si tratta del fatto che, misurando una osservabile diciamo A di

I, si ottiene un ben definito stato per II. Analogamente, osservando una osservabile B, sempre di I, si ottiene un altro stato di II. Siano $u_k(x_1)$ gli autostati di A e $v_s(x_1)$ quelli di B. Sia $\Psi(x_1, x_2)$ uno stato del sistema completo. Allora possiamo sviluppare Ψ su una base o sull'altra, con coefficienti dipendenti parametricamente da x_2, e si avrà[3]

$$\begin{aligned} \Psi(x_1, x_2) &= \sum_k \psi_k(x_2) u_k(x_1) \\ \Psi(x_1, x_2) &= \sum_s \varphi_s(x_2) v_s(x_1) \ . \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Se misurando l'osservabile A del sistema I trovo il valore a_k, allora lo stato Ψ precipita (o collassa) sullo stato $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$, il che vuol dire che il secondo sistema si trova nello stato $\psi_k(x_2)$. Analogamente, se misuro B e trovo b_s determino un altro stato $\varphi_s(x_2)$ del sistema II. Nelle parole di EPR, *"We see therefore that, as a consequence of two different measurements performed upon the first system, the second system may be left in states with two different wave functions."*

A questo punto ci si potrebbe fermare, perché questo è il cuore di tutto il lavoro EPR, e concerne già il caso di una singola osservazione. Se compio una misurazione della osservabile A di I, evidentemente perturbandolo in qualche modo, determino anche lo stato di II, *" without in any way perturbing it"*.

Veniamo dunque alla seconda parte del paragrafo 2, in cui gli autori danno un esempio concreto (essi usano formalmente le autofunzioni improprie alla Dirac, ma questo non è per noi un problema). L' esempio riguarda il caso in cui si ha un sistema di due particelle su una retta, e le osservabili Q, P sono la posizione e il momento della prima particella. Gli autori assumono che lo stato del sistema totale (nel momento in cui si compie la misurazione su I) sia quello dato dalla "funzione impropria"

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x_1 - x_2 + x_0)p/\hbar} \mathrm{d}p$$

dove x_0 è una costante. Ricordando $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx} \mathrm{d}p$, si vede subito che questa è proprio la funzione

$$\Psi(x_1, x_2) = c\delta(x_1 - x_2 + x_0)$$

dove c è una costante di normalizzazione. Si tratta dunque di uno stato in cui la distanza tra le due particelle è uguale ad x_0:

$$x_2 - x_1 = x_0 \ .$$

[3]Si fissi x_2. Allora $\Psi(x_1, x_2)$ definisce una funzione di x_1, che potrà essere sviluppata sulla base $\{u_k(x_1)\}$ con certi coefficienti c_k. Ma tali coefficienti dipendono dal valore fissato di x_2, ovvero sono funzioni di x_2, che potremo chiamare $\psi_k(x_2)$, cioè corrispondono a una funzione d'onda (uno stato) del sottosistema I.

Si constata poi immediatamente che in questo stato si ha anche

$$p_1 + p_2 = 0 \ ,$$

dove p_j è il momento della particlella $j = 1, 2$. In effetti si constata subito che il sistema di due particelle libere su una retta ha due costanti del moto, momento totale e differenza tra le posizioni delle due particelle, e che si tratta di due osservabili che commutano.[4]

Gli autori considerano le osservabili $A = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}$, momento $\hat{p}_1$ della particella 1, e $B = \hat{x}_1$, posizione della particella 1, che hanno autofunzioni improprie rispettivamente

$$\begin{aligned} u_p(x_1) &= e^{ipx_1} \\ v_x(x_1) &= \delta(x - x_1) \ , \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

e mostrano che, nello stato Ψ considerato, se si osserva il momento della prima particella e si trova p, allora la seconda viene ad avere momento $-p$. Se invece, nello stesso stato, si osserva la posizione della prima particella e si trova x, allora risulta che la posizione della seconda particella ha un valore definito, esattamente $x + x_0$. Questo è dovuto al fatto osservato sopra, che siamo in presenza delle due costanti del moto $\hat{x}_1 - \hat{x}_2$, $\hat{p}_1 + \hat{p}_2$.

Gli autori concludono: *"Then, by measuring either A or B we are in a position to predict with certainty, and without in any way disturbing the second system, either the value of the quantity P ... or the value of the quantity Q"*

Facciamo osservare che questo tipo di informazione sulla particella 2 che si ottiene mediante osservazioni sulla particella 1 è del tutto familiare. Si pensi a due amici che partono da Milano per andare uno a New York e l'altro a Tokyo, e prima di partire abbiamo preso ciascuno un guanto e una scarpa da uno stesso paio di guanti e da uno stesso paio di scarpe. Allora se il primo amico a New York guarda il suo guanto che ha in tasca e vede ad esempio che è destro, allora saprà, senza disturbare il secondo, che l'amico ha il guanto sinistro. Oppure, se guarda la scarpa che ha nel sacco e trova che è sinistra saprà, senza disturbare l'amico, che l'altro ha la scarpa destra.

Comunque, alla conclusione dell'articolo gli autori commentano come, a loro parere, tale fatto indichi che la meccanica quantistica sia una teoria non completa, secondo la definizione che essi avevano dato nel paragrafo 1: *"We are thus forced to conclude that the quantum–mechanical description of physical reality given by the wave function is not complete"*. E infine: *"While*

---

[4]Infatti, ricordando le regole di commutazione canoniche $[p_j, x_k] = -i\hbar\delta_{jk}$, si ha

$$[p_1 + p_2, x_1 - x_2] = [p_1, x_1] - [p_2, x_2] = 0 \ .$$

Invece, ovviamente, si ha $[p_1 + p_2, x_1 + x_2] \neq 0$, corrispondentemente al fatto che momento totale e centro di massa di un sistema composto si comportano come momento e posizione di una particella singola, e quindi hanno commutatore uguale a $-i\hbar$.

we have thus shown that the wave function does not provide a complete description of physical reality, we left open the problem whether or not such a descripton exists. We believe, however, that such a theory is possible."

4.2 La risposta di Bohr

All'articolo di EPR venne fornita una risposta da Bohr, con un articolo dal medesimo titolo, pubblicato pochi mesi dopo nella medesima rivista.[5]

Rimandiamo ad una futura nuova versione di queste note una discussione più dettagliata di questo lavoro. Qui basti ricordare che Bohr contesta la affermazione centrale di EPR, ovvero che l'osservazione fatta sul sistema I non influenzi in alcun modo il sistema II. Bohr osserva che, affinché si possa affermare che la seconda particella ha una precisa posizione, è necessario che l'apparato di misura della posizione della seconda particella sia rigidamente connesso con l'apparato di misura della posizione della prima particella. D'altra parte, l'osservazione della posizione della prima particella comporta necessariamente un trasferimento di momento dalla particella all'apparato di misurazione[6], e quindi, a causa della connessione rigida, anche all'apparato di misura della seconda particella. Si avrebbe quindi una perturbaxione anche sulla seconda particella, come se essa fosse osservata direttamente.

Tra l'altro, nell'articolo Bohr sembra prendersi in qualche modo gioco di Einstein, perché nella nota a pag. 701 egli commenta come la necessità di fare ricorso al principio di complementarità (che dovrebbe essere, nella terminologia di Bohr, il cuore stesso della sua obiezione ad EPR) provenga proprio dalla teoria della relatività, e quindi da Einstein stesso: *"Just this circumstance ... ensures the compatibility between the argumentation outlined in the present article and all exigencies of relativity theory ... The writer will discuss a very interesting paradox suggested by Einstein concerning the application of gravitation theory to energy measurements, and the solution of which offers an especially instructive illustration of the generality of the argument of complementarity."*

La discussione tra Bohr e Einstein ebbe un seguito nel contributo che Bohr scrisse per l'*Einstein Festschrift*, una serie di articoli che diversi autori scrissero in occasione del settantesimo compleanno di Einstein, nel 1949 (sei anni prima della sua morte, avvenuta nel 1955),[7] a ciascuno dei quali Einstein diede una breve risposta (di speciale interesse è la **autobiografia scinetifica** di Einstein, che apre il volume) Ma nell'articolo di Bohr non si trova nulla di sostazialmente nuovo. L'unico punto rilevante è che, nella

[5]N. Bohr, *Can quantum–mechanical description of physical reality be considered complete?*, Phys. Rev. **48**, 696–702 (1935).

[6]Era questo un cavallo di battaglia di Heisenberg, che ne deduceva qualitativamente la necessità del principio di indeterminazione.

[7]P.A. Schilpp, *Albert Einstein: philosopher–scientist*, Tutor (New York, 1951). Traduzione italiana Einaudi (Torino, 1958).

risposta di Einstein, questi ammette che Niels Bohr è l'autore *"that seems to me to have come nearest to doing justice to the problem"*.

Vale la pena di riportare tutto il commento, peraltro breve di Einstein (pag. 682). Anzitutto c'è l'inizio, interessante, dove dice cosa intende per "ortodosso".

"And now just a remark concerning the discussion about the Einstein–Podolsky–Rosen Paradox. I do not think that Margenau's defense of the "orthodox" quantum position ("orthodox" refers to the thesis that the ψ–function characterizes the individual system exhaustively*) hits the essential aspects. Of the "orthodox" quantum theoreticians whose position I know, Niels Bohr seems to me to come nearest to doing justice to the problem."*

Poi continua

"Translated into my own way of putting it, he argues as follows: If the partial systems A and B form a total system[8] *which is described by its ψ–function $\psi(AB)$, there is no reason why any mutual independent existence (state of reality) should be ascribed to the partial systems A and B viewed separately, not even if the partial systems are spatially separated from each other at the particular time under consideration. The assertion that, in this latter case, the real situation of B could not be (directly) influenced by any measurement taken on A is, therefore, within the framework of quantum theory, unfounded and (as the paradox shows) unacceptable.*

Qui dunque Einstein sembra proprio dare ragione a Bohr. In effetti, le cose sono un poco pi'čomplicate, perché subito dopo aggoinge:

"By this way of looking at the matter it becomes evident that the paradox forces us to relinquish one of the two following assertions:

1. *the description by means of the ψ–function is complete*
2. *the real states of spatially separated objects are independent of each other.*

On the other hand, it is possible to adhere to (2), if one regards the ψ–function as the description of a (statistical) ensemble of systems (and therefore relinquishes (1)). However, this view blasts the framework of the "orthodox quantum theory".

Suggeriamo vivamente di leggere l'articolo originale di Bohr. Inoltre rimandiamo ad una appendice, dal titolo "Schroedinger e l'entaglement", scritta ancora in maniera provvisoria, per un commento su tre articoli scritti da Schroedinger nello stesso anno 1935. In tali articoli egli introdusse il termine *entanglement* (intrecciato, avvinghiato) per descrivere uno stato del sistema totale che non è fattorizzato nel prodotto di stati dei sottostemi. Inoltre, nel terzo lavoro viene introdotto il celebre paradosso del gatto di Schroedinger, cui si rifà continuamente Einstein stesso, per supportare la

[8] Qui la notazione non è più quella du EPR. Qui A e B stanno per I e II.

sua tesi, ovvero che la funzione d'onda fornisca la probabilità relativa a un insieme di sistemi anziché ad un sistema singolo (un sinsieme di gatti, alcuni dei quali saranno vivi, ed altri morti, anziché un singolo gatto, che sarebbe in una sovrapposizione gatto vivo – gatto morto.

4.3 La disuguaglianza di Bell

Nella introduzione al suo lavoro,[9] Bell enuncia il problema in maniera mirabile. *"The EPR paradox was advanced as an argument that quantum mechanics could not be a complete theory, but should be supplemented by additional variables. These additional variables were to restore to the theory causality and locality. In this note that idea will be formulated mathematically and shown to be incompatible with the statistical predictions of quantum mechanics. It is the requirement of locality, or more precisely that the result of a measurement on one system be unaffected by operations on a distant system with which it has interacted in the past, that creates the essential difficulty."*

Poi, nel secondo paragrafo, formula il problema riferendosi alla versione dell'argomento EPR data da Bohm, e particolarmente da Bohm e Aharonov[10]. Si considerano ancora due particelle che hanno interagito, si separano e vengono osservate quando sono lontane, ma le osservabili incompatibili che si misurano sono, invece di posizione e momento, le componenti dello spin (si considerano particelle di spin 1/2) in tre diverse direzioni. Il sistema viene preparato inizialmente in uno stato di singoletto. Questo comporta che se si osservano le componenti degli spin delle due particelle in una uguale direzione, allora certamente le due misurazioni devono dare risultati opposti. *"Consider a pair of spin one-half particles formed somehow in the singlet spin state and moving freely in opposite directions. Measurements can be made, say by Stern–Gerlach magnets, on selected components of the spins* $\mathbf{S}^1$, $\mathbf{S}^2$ *(Bell denota* $\mathbf{S}^j$, $j = 1, 2$, *con la lettera* σ_j*). If (nello stato di songoletto) measurement of the component* $S^1_{\mathbf{a}} = \mathbf{S}^1 \cdot \mathbf{a}$, *where* $\mathbf{a}$ *is some unit vector, yields the value* $+1$ *(in unità* $\hbar/2$*) then, according to quantum mechanics, measurement of* $S^1_{\mathbf{a}}$ *yields the value* -1 *and vice versa."*

Dunque la condizione di singoletto viene introdotta con il seguente scopo. Intendiamo occuparci delle misurazioni della componente dello spin di uno dei due sottosistemi, diciamo il primo (Bell scambia tra loro il primo e il secondo sottosistema, rispetto ad EPR), in direzioni diverse, **a**, **b**, mentre è possibile eseguire misurazioni ogni volta solo in una direzione, diciamo **a**. Allora prepariamo il sistema totale nello stato di singoletto e misuriamo il sottosistema che ci interessa (il primo) nella direzione **a** e il secondo nella direzione **b**. Dunque il risultato osservato sul secondo, assicura che il primo,

[9] Bell, *Physics* **1**, 195 (1964), in J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Collected Papers*, Cambridge U.P. (Cambridge, 1987).

[10] D. Bohm, Y. Aharonov, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957).

se osservato nella medesima direzione **b**, darebbe un risultato ben preciso, opposto a quello osservato sul secondo: nello stato di singoletto si è garantiti chr vale

$$S^1_{\mathbf{a}} = -S^2_{\mathbf{a}} \tag{4.3.1}$$

(questo è l'analogo della proprietà $p_2 = -p_1$; si ricordino i guanti destro e sinistro dei due amici).

Poi Bell aggiunge: *"Now we make the hypothesis, and it seems one at least worth considering, that if the two measurements are made at places remote from one another the orientation of one magnet does not influence the result obtained with the other. Since we can predict in advance the result of measuring any chosen component of* $\mathbf{S}^2$*, by previoulsy measuring the same component of* $\mathbf{S}^1$*, it follows that the result of any such measurement must actually be predetermind. Since the initial quantum mechanical wave function does not determine the result of an individual measurement, this presetermination implies the possibility of a more complete specification of the state."*

Questo punto in realtà non è molto chiaro. Comunque, Bell introduce l'ipotesi dei parametri nascosti, cioè che le osservabili abbiano effettivamente dei valori, i quali sono individuatii dall'assegnazione di variabili non accessibili alle osservazioni, che egli denota con λ. Si ammette allora che i valori effettivamente osservati in una successiva misurazione cossispondano ai valori medi (o valori di aspettazione) rispetto a una distribuzione di probabilità assegnata per i parametri nascosti, come avviene im meccanica classica quando si assegna una densità di probabillità ρ nello spazio delle fasi del sistema considerato.

Nel nostro caso avremo allora due osservabili $S^1_{\mathbf{a}}$, $S^2_{\mathbf{b}}$, spin della particella 1 nella direzione **a** e spin della particella 2 nella direzione **b** (si tratta di direzioni arbitrarie, considerate come parametri), ciascuna con valori possibili ± 1 (il valore dello spin in unità $\hbar/2$). E Bell aggiunge: **"The vital assumption is that the result $S^2_{\mathbf{b}}$ for particle 2 does not depend on the setting a of the magnet for particle 1, nor $S^1_{\mathbf{a}}$ on b. "**

E continua: *"If* $\rho(\lambda)$ *is the probability density of* λ*, then the expectation value of the product of the two components is*[11]

$$E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) = \int \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda)\, S^1_{\mathbf{a}}(\lambda) S^2_{\mathbf{b}}(\lambda)\ . \tag{4.3.2}$$

This should equal the quantum mechanical expectation value, which for the singlet state is (questo risultato, che Bell dà per noto, è dimostrato qui in

[11] Diversamente da Bell, denotiamo con E invece che con P il valore medio, o valore di aspettazione. Inoltre Bell usa la notazione $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ invece di $P(S^1_{\mathbf{a}}, S^2_{\mathbf{b}})$. Questa notazione è un po' infelice, perché in seguito le due notazioni **a**, **b** si riferiranno a due direzioni diverse della medesima particella.

Appendice[12]*)*

$$E^q(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\ . \qquad (4.3.3)$$

But it will be shown that this is not possible."

La impossibilità di riprodurre tale formula con una teoria a parametri nascosti, almeno nelle ipotesi formulate da Bell, viene da lui provata nel paragrafo 4 (dal titolo *Contradiction*), come immediata conseguenza della celebre disuguaglianza di Bell:

$$|E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) - E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{c}})| \leq 1 + E(S^1_{\mathbf{b}}\, S^2_{\mathbf{c}}))\ . \qquad (4.3.4)$$

Diamo dunque la dimostrazione della disuguaglianza di Bell. Mescoleremo le notazioni di Bell con quelle di Accardi.[13] Si considerano tre variabili casuali (*random variables*) A, B, C. Nel caso di Bell si tratta delle componenti dello spin in unità $\hbar/2$ della particella 1 o della particella 2 in una delle tre direzione $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Comunque, questo è irrilevante, e l'unica cosa di cui si fa uso è che si tratta di variabili casuali che possono assumere solo i valori ± 1. Invece, nella critica che faremo nel prossimo paragrafo vedremo come pa precisazione di quali siano le variabili che si osservano, svolga un ruolo cruciale. L'osservazione di Accardi è significativa a questo proposito perché mette in luce che Bell, nel suo modo di procedere, sta trascurando una propietà essenziale.

Ci occupiamo dei valori di aspettazione di prodotti di due tali variabili, ad esempio $E(AB)$, dove il valor medio o di aspettazione è definito come in ogni teoria probabilistica, tipicamente nella forma $E(A) = \int A \mathrm{d}P$ dove P è una distribuzione di probabilità. Allora si ha

Disuguaglianza di Bell. Si considerino tre variabili casuali (*random variables*) A, B, C che possono assumere solo i valori ± 1, e si denoti con E il valore di aspettazione rispetto ad una assegnata distribuzione di probabilità. Allora vale la disugaglianza

$$|E(AB) - E(AC)| \leq 1 - E(BC)\ , \qquad (4.3.5)$$

ovvero: *la differenza delle aspettazioni relative a due coppie di variabili casuali, in valore assoluto, è maggiorata da 1 meno l'aspettazione relativa alla terza coppia.*

In particolare, con $A = S^1_{\mathbf{a}}$, $B = S^2_{\mathbf{b}}$, $C = S^2_{\mathbf{c}}$ la disuguaglianza prende la forma

$$|E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) - E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{c}})| \leq 1 - E(S^2_{\mathbf{b}}\, S^2_{\mathbf{c}}))\ ,$$

che, usando al secondo membro la proprietà di singoletto $S^2_{\mathbf{b}} = -S^1_{\mathbf{b}}$ e la linearità dell'aspettazione, diviene la (4.3.4). Si noti che questa ultima trasformazione della disuguaglianza viene eseguita al fine di avere ovunque prodotti di due variabili, di cui una si riferisca alla particella 1 e l'altra alla particella

[12] Non ancora scritta.

[13] L. Accardi, *Urne e camaleonti*, Il Saggiatore (Milano, 1997).

2, perché la formula quantistica (4.3.3) coinvolge proprio prodotti di tale tipo.

Dimostrazione. Si osserva anzitutto che si ha

$$E(AB) - E(AC) = E[AB\,(1 - AC/AB)] = E[AB\,(1 - BC)]$$

(abbiamo usato la linearità del valore di aspettazione,[14] e il fatto che $B = 1/B$, perché abbiamo assunto $B = \pm 1$). Si ha allora (dato che il modulo di un integrale è minorw o uguale all'integrale del modulo, e che $|AB| = 1$)

$$|E(AB) - E(AC)| \leq E(|1 - BC|) \ .$$

Si osserva infine che vale

$$1 - BC \geq 0$$

ancora perché $B, C = \pm 1$, sicché il prodotto BC assume solo i valori ± 1, e quindi $1 - BC$ assune solo i valori 0 e 2. Dunque

$$E(|1 - BC|) = E(1 - BC) = 1 - E(BC) \ .$$

Incompatibilità con le previsioni quantistiche. Mostriamo ora che la disuguaglianza di Bell (4.3.4) è incompatibile con le previsioni quantistiche, che sono date, nello stato di singoletto, dalla (4.3.3). Infatti, se l'aspettazione coincidesse con quella quantistica data dalla (4.3.3), la disuguaglianza di Bell prenderebbe la forma

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}| \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \tag{4.3.6}$$

per ogni terna di direzioni con versori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Se ora prendiamo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ortogonali tra loro, ad esempio con $\mathbf{b}$ formante un angolo $\pi/2$ con $\mathbf{a}$, e inoltre $\mathbf{c}$ compreso tra di loro formando un angolo ϑ con $\mathbf{a}$, avremmo

$$\cos\vartheta + \sin\vartheta \leq 1 \ , \quad 0 < \vartheta < \pi/2 \ .$$

Ma questa è ovviamente non soddisfatta. Infatti, per simmetria, basta studiare la funzione al primo membro solo tra $\vartheta = 0$, dove ha il valore 1, e $\vartheta = \pi/4$, dove ha il valore $\sqrt{2} > 1$, essendo monotona in quell'intervallo (basta calcolare la derivata, $-\sin\vartheta + \cos\vartheta$, che si annulla solo in $\pi/4$).

Nel suo lavoro, per mostrare questa incompatibilità Bell dà prima un argomento generale, osservado quello che avviene nella formula (4.3.6) quando $\mathbf{c}$ è prossimo a $\mathbf{b}$. Infatti il secondo membro raggiunge il minimo proprio per $\mathbf{b} - \mathbf{c} = 0$, ed è quindi quadratico in $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ in un intorno dello 0, mentre il primo membro è lineare. Nelle sue parole: *"Unless E is constant, the left hand side is in general of order $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$ for small $|\mathbf{b} - \mathbf{c}|$. Thus $E(S^1_{\mathbf{b}} S^2_{\mathbf{c}})$ cannot be stationary at the minimum value (-1) at $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, and cannot equal the quantum mechanical value (4.3.3).".* Poi riporta una dimostrazione della incompatibilità alquanto più complicata di quella data qui.[15]

[14] Si ricordi $E(A) = \int \rho(\lambda) A(\lambda) \mathrm{d}\lambda$.

[15] Abbiamo seguito il citato libro di Accardi, ma questo tipo di dimostrazione è ben noto.

4.4 Critica delle disuguaglianze di Bell, e della *"vital assumption"*

I presenti autori, insieme con A. Scotti, anche a seguito di lunghe discussioni con L. Accardi (si veda l'appendice), propongono i tre seguenti elementi di discussione.

1. Fin dal lavoro di EPR, si resta con l'impressione che si discuta di situazioni in cui si compie una osservazione sul sistema I, diciamo a New York, e indipendentemente un'altra osservazione sul sistema II, ad esempio a Tokyo (si ricordi la *vital assumption* di Bell). Ma non è affatto così, perché in tutti gli esperimenti che di solito si eseguono, a partire da quello classico di Aspect,[16], ma anche in un precedente esperimento compiuto da Bertolini, Diana e Scotti[17], i due rivelatori devono comunicare con un comune osservatore, ad esempio a Milano, dove era stato prodotto il sistema globale I + II, che poi si deve disintegrare. Si tratta del fatto che bisogna garantirsi che le due particelle effettivamente osservate sono gemelle, cioè prevengono da una ben definita coppia iniziale, cioè siano state create insieme in uno stato entangled. Questo fatto viene controllato on un **test di coincidenza**. In altri termini, i due rivelatori (a New York e a Tokyo) ricevono moltissimi segnali, e poi l'osservatore che di fatto compie l'esperimento (a Milano), raccogliendo le registrazioni dei due apparati di misura, seleziona tra tutti i segnali le coppie buone, e compie la statistica solo su tale selezione di informazioni brute. Si compie in tal modo, come si dice, una analisi condizionata dei segnali, e quindi diremmo in ambito probabilistico che stiamo considerando valori di aspettazione condizionati. Il condizionamento avviene in effetti sia con il test di coincidenza, sia con il fatto che i due rivelatori si trovano ad avere degli assetti (*setting*), o direzioni $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, ben definiti, come ad esempio la coppia $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{b}$, oppure la coppia $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{c}$, ed ogni coppia di segnali accettati corrisponde ad una ben definita coppia si setting (assetti). Questo fatto è in contrasto con la *vital assumption* di Bell, e, si noti bene, senza che tale contrasto comporti l'esistenza di comunicazioni a distanza non causali. Tanto è vero che gli esperimenti vengono proprio compiuti mediante le comunicazioni dei risultati, che vengono ricevuti dell'osservatore il quale esegue poi il test di coincidenza, e quando una coppia di misurazioni viene accettata, questa si riferisce a ben precisi setting della *coppia* di rivelatori. Tra l'altro, il punto di vista qui sottolineato sembra essere sostanzialmente in accordo con l'osservazione centrale della risposta di Bohr, la cui significatività era stata ammessa da Einstein stesso.

2. Mostriamo ora quale è il punto concreto in cui la precedente osservazione (le probabilità con cui abbiamo a che fare sono probabilità con-

[16] Aspect et al. ....

[17] G. Bertolini, E. Diana e A. Scotti, Nuovo Cimento **63**B, No. 2 (1981).

dizionate, perché si riferiscono a coppie di spin in direzioni ben definite) inficia la dimostrazione della disuguaglianza di Bell. Si tratta del fatto che le aspettazioni E di cui ci occupiamo dipendono parametricamente dai due assetti $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, per cui dovremmo parlare ad esempio di $E_{\mathbf{ab}} \neq E_{\mathbf{ab}}$ nel senso che la densità di probabilità $\rho(\lambda)$ dipende da tali parametri. Dunque, ad esempio, invece di scrivere

$$E(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) = \int \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda)\, S^1_{\mathbf{a}}(\lambda) S^2_{\mathbf{b}}(\lambda) \ , \tag{4.4.1}$$

come avevamo fatto nella (4.3.2), dovremmo ora scrivere

$$E_{\mathbf{ab}}(S^1_{\mathbf{a}}\, S^2_{\mathbf{b}}) = \int \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda; \mathbf{n}_1 = \mathbf{a}, \mathbf{n}_2 = \mathbf{b})\, S^1_{\mathbf{a}}(\lambda) S^2_{\mathbf{b}}(\lambda) \ . \tag{4.4.2}$$

Ora, questo fatto non è puramente formale, perché, quando se ne tiene conto, non si può neppure compiere il primo passo nella dimostrazione sopra riportata della disuguaglianza di Bell. Anzi, non si può neanche compiere un passaggio che era stato addirittura sottinteso, ovvero il passaggio

$$E(AB) - E(AC) = E(AB - BC) \ . \tag{4.4.3}$$

Infatti le due aspettazioni a primo membro sono due aspettazionni diverse, condizionate dal fatto che nella prima abbiamo il setting $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{b}$, mentre nella seconda il setting $\mathbf{n}_1 = \mathbf{a}$, $\mathbf{n}_2 = \mathbf{c}$, e dunque abbiamo a che fare con

$$\begin{aligned} &E_{\mathbf{ab}}(AB) - E_{\mathbf{ac}}(AC) = \\ &\int \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda; \mathbf{n}_1 = \mathbf{a}, \mathbf{n}_2 = \mathbf{b}) AB - \int \mathrm{d}\lambda\, \rho(\lambda; \mathbf{n}_1 = \mathbf{a}, \mathbf{n}_2 = \mathbf{c}) AC \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

sicché non ci si può ridurre ad un unico integrale con una unica densità $\rho(\lambda)$. Pertanto il secondo membre sella relazione (4.4.3) non ha alcun senso.

3. La discussione fatta ai punti 1 e 2 potrebbe sembrare un poco astratta. Invece, il fatto che si possa davvero avere a che fare con aspettazioni condizionate del tipo $E_{\mathbf{ab}}$, cioè con densità di probabilità del tipo $\rho(\lambda;\, \mathbf{n}_1 = \mathbf{a}, \mathbf{n}_2 = \mathbf{b})$, dipendenti dalle coppie di setting, è quello che risulta da un modello che è stato studiato dai presenti autori. Si noti bene che la proprietà cruciale di tale modello. che invalida la dimostrazione della disuguaglianza di Bell, non è una proprietà di un modello artificiale inventato *ad hoc* a tale scopo, ma è una proprietà qualificante di quella che noi chiamiamo **elettrodinamica di Dirac** che verrà illustrata in un prossimo capitolo. Si tratta della cosiddetta **condizione nonrunaway** di Dirac per cui rimandiamo al capitolo già citato. Quello che avviene è che per descrivere il moto di una particella è necessario assegnare, in aggiunta ai consueti dati meccanici (posizione e velocità), anche l'accelerazione.

Vedremo che questo fatto corrisponde alla circostanza che si abbia a che fare con particelle dotate di struttura elettromagnetica, cioè che abbiano una carica elettrica, oppure anche soltanto un momento magnetico od elettrico, dunque ogni particella concepibile tranne il neutrino.[18] In particolare, la necessità di assegnare la accelerazione iniziale è legata al fatto che per descrivere il moto di una particella carica microscopica è necessario descrivere anche il moto del campo elettromagnetico, che è accoppiato al moto della particella e non può essere considerato come assegnato. Risulta allora che la ncessità di assegnare l'accelerazione iniziale della particella è la traccia che resta del fatto che, per descrivere il moto congiunto del sistema totale (particella + campo), è necessario assegnare i dati di Cauchy sia della particella (posizione e velocità), sia del campo elettromagnetico. Il parametro nascosto accelelazione della particella è dunque sostanzialmente il campo elettromagnetico globale, il quale tra l'altro è condizionato dalle condizioni al contorno globali (come succede sempre anche nei problemi di elettrostatica), quindi anche dai setting dei rivelatori. Dunque sembra chiaro la accelerazione iniziale svolge il ruolo di un paramtero nascosto proprio nel senso che era stato pensato da Einstein, perchè sembra difficile immaginare di potere controllare completamente il campo elettromagnetico microscopico. Comunque, nel modello studiato dai presenti autori questa proprietà di incontrollabilità del valore della accelerazione iniziale viene anche dimostrata formalmente, ad esempio nel senso che valori diversi vicini quanto si vuole conducono a movimenti della particella qualitativamente diversi. In conclussione, per il parametro nascosto (accelerazione della particella), che è incontrollabile, è necessario introdurre una distribuzione di probabilità iniziale.

Ma il fatto cruciale che va ad inficiare la *vital assumption* di Bell, che è venuto fuori da se stesso in maniera inaspettata, è che i valori che può assumere il parametro nascosto (l'accelerazione iniziale delle particelle) quando siano assegnati i dati inziali meccanici (posizione e velocità), non sono definiti a priori. Risulta infatti che il loro dominio (il dominio di definizione) dipende dalle assegnate condizioni al contorno, dai setting dei sue apparati di misurazione. Nel modello considerato dagli autori, fungono da apparati di misurazione due barriere di potenziale, una a destra e una a sinistra, sulle quali incidono le due particelle, e l'osservazione consiste nel vedere se ciascuna particella passa (risultato $+1$) o non passa (risultato -1) la sua barriera. Risulta che, fissato un setting – una altezza – della barriera, con certezza la particella passa la barriera o non la passa, a seconda del valore del parametro nascosto (l'accelerazione iniziale). Inoltre si hanno accelerazioni iniziali vicine quanto si vuole, che conducono a risultati opposti. Ma il punto cruciale è che il dominio dei possibili valori dell'accelerazione iniziale risulta dipendere dal setting (dall'altezza della barriera) e dunque la distribuzione di probabilità, diciamo la funzione $\rho(\lambda)$, corrisppondente a una coppia di setting dipende parametricamente dalla coppia di setting degli apparati di misura. Pertanto non vale più la proprietà di nonlinearità (si

[18]O il fotone. Ma questo non può essere trattato come una particella, e deve essere concepito come una proprietà del campo elettromagnetico, che deve essere trattato globalmente.

hanno integrali su domini diversi), e la dimostrazione della disuguaglianza di Bell risulta invalidata.

4. Diamo qui una variante del paradosso EPR che è estremamente semplice e ne mette in rilievo uno degli aspetti rilevanti. Si considera un sistema costituito da una sola particella, preparata in uno stato $\psi(\mathbf{x})$ tale che $|\psi|^2(\mathbf{x})$ è sostanzialmente diversa da zero in due regioni spaziali attorno a due punti in cui si trovano due osservatori A, B. Le osservazioni vengono fatte con scadenze fisse. Allo scoccare di ogni ora, A decide a suo piacere se compiere o non una osservazione, mentre B compie sempre una osservazione un minuto dopo ogno ora. Dunque il risultato di B dipenderà dalla scelta di A, perché se A ha compiuto l'osservazione, allora la funzione ψ immediatamente dopo sarà una δ centrata nella sua posizione .....

4.5 APPENDICE: Il punto di vista di Accardi

Luigi Accardi è un matematico italiano che ha studiato probabilità a Mosca, quando Mosca era il centro della matematica mondiale. Il più anziano dei presenti autori ha assistito personalmente alla discussione della sua tesi di dottorato, alla Università di Mosca nel 1974, davanti a una commissione presieduta da Kolmogorov, con interventi di celebri studiosi, tra i quali Gelfand. Accardi ha un profondo interesse per il problema dei fondamenti della Meccanica Quantistica, e i suoi studi su questo argomento lo hanno portato a fondare un filone della matematica che va sotto il nome di Probabilità Quantistica. Sul problema delle disuguaglianze di Bell egli ha un punto di vista molto originale, che si trova esposto in un suo libro,[19] in una forma dialogica che vorrebbe ispirarsi a quella dei Dialoghi galileiani, che rende l'esposizione letterariamente interessante, ma un poco di difficile lettura. Inoltre egli si concede il lusso di prendere un po' in giro diversi autori, più o meno celebri, e questo gli ha procurato non poche difficoltà nella comunità scientifica.

Noi riteniamo che il suo punto di vista sia interessante e colga un aspetto molto profondo del problema, sicché sia alquanto utile cercare di esporlo. Per fare ciò nella maniera più semplice e concisa, faremo riferimento ad un esempio che a lui è particolarmente caro. Si tratta del classico problema delle due fenditure, che Accardi riconduce matematicamente alla banale discussione della soluzione di un sistema di quattro equazioni di primo grado in quattro incognite con tre parametri. Si vede subito che la soluzione esiste, ma si tratta poi di discuterla. Una delle incognite, diciamola x, ha il significato di probabilità di un certo evento, e quindi deve soddisfare la condizione $0 \leq x \leq 1$. Ma la sua espressione esplicita in termini dei parametri, che hanno un ben definito significato fisico, mostra che tale condizione non

[19] L. Accardi, *Urne e camaleonti*, Il Saggiatore (Milano, 1997). Di questo libro esistono traduzioni in diverse lingue, tra cui il giapponese.

è soddisfatta. Vedremo poi quali sono le conclusioni che egli ne trae. Secondo Accardi, tale disuguaglianza $0 \leq x \leq 1$, con x espressa in termini dei parametri, è il prototipo della disuguaglianza di Bell, che quindi viene qui illustrata nella maniera più semplice, facendone ben comprendere il profondo significato.

Esporremo ora in poche righe questa formalizzazione del problema delle due fenditure data da Accardi. Vogliamo tuttavia prima ribadire quale sia la forza del suo esempio. Esso mette ben in luce come in problemi di questo tipo esistono delle incognite come esistono dei dati, e che quindi il problema, in partenza di tipo concettuale, può essere ridotto ad una formulazione matematica (peraltro semplicissima), nella quale ci si può almeno muovere davvero con agio.

Un altro punto cruciale che vorremmo mettere il luce preliminarmente è che questo fatto, cioè di avere a che fare con delle quantità fisiche assegnate come dati, e con delle incognite che devono soddisfare a certe condizioni se si vogliono definire delle probabilità (qui stiamo anticipando, ma si vedrà subito sotto di che cosa stiamo concretamente parlando), è un fatto generale della teoria delle probabilità, nel quale il caso delle disuguaglianze di Bell entra come caso particolare. Forse questa è proprio la premessa con cui non tutti gli studiosi sono davvero familiari, così da ostacolare la comprensione del punto di vista di Accardi. Il problema cui ci riferiamo è molto di moda in Fisica Matematica o in Fisica Teorica negli anni recenti, e va sotto il nome di *Problema dell'esistenza della misura di Gibbs*. Ad esempio, si abbia un sistema di spin sui siti di un reticolo infinito, anche semplicemente monodimensionale. Formalmente si può assegnare una energia a ogni configurazione degli spin, e quindi si potrebbe ingenuamente pensare di potere definire la ben nota e familiare misura di Gibbs, proporzionale ad $\exp(-\beta H)$. Ma si vede facilmente che non è facile dare senso preciso alle serie che si incontrano. Allora si comincia a definire la misura su segmenti finiti del reticolo. Poi bisogna accertarsi che tali "misure parziali" siano in qualche modo compatibili tra di loro, e solo in tal caso si può estendere la misura a tutto il reticolo infinito (mostrare l'esistenza della misura di Gibbs, come si dice). Ora, quelle che abbiamo chiamato "misure parziali" sono in effetti delle "misure condizionate". Il problema consiste allora nel garantirsi che tali "probabilità condizionate" siano compatibili, perché questo garantisce allora l'esistenza della misura di Gibbs.[20] Ma ancor di

[20]Un proprietà cruciale che debbono avere le probabilità condizionate è che le corrispondenti correlazioni spaziali tra due segmenti disgiunti decada a zero abbastanza rapidamente all'aumentare della distanza tra i segmenti. Problemi di questo tipo sono stati studiati in Italia, con singnificativi risultati, dalla scuola di Fisica Matematica di Roma. Recentemente, una applicazione significativa di tali metodi è stata data a Milano nella dimostrazione di proprietà di stabilità, nel senso della teoria delle perturbazioni, per sistemi di tipo Fermi Pasta Ulam al limite termodinamico, metre i risultati noti in precendenza non erano estendibili al limite di infinite particelle a temperatura non nulla. Si veda A. Carati, L. Maiocchi, preprint.

più. Questi risultati sull'esistenza della misura di Gibbs, iniziati a Mosca da Dobrushin, e ben noti ad Accardi, costituiscono in effetti una estensione, al caso di sistemi interagenti, del primo fondamentale risultato ottenuto da Kolmogorov nel suo celebre lavoro del 1933, in cui egli formulò matematicamente la moderna teoria delle probabilità.[21] Anche in tale lavoro si aveva il problema di definire una misura di probabilità, quando erano assegnate delle "misure parziali", cioè delle probabilità condizionate, su certi insiemi che erano detti *insiemi cilindrici*, e Kolmogorov mostrò come la misura globale esiste quando le probabilità condizionate soddisfano certe precise condizioni di compatibiltà. Infine, come ultima osservazione preliminare a questo proposito, vogliamo ricordare che il problema di trovarsi di fronte a certi dati, analoghi a probabilità condizionate, e di cercare di interpretarli come corrispondenti ad "eventi" entro un ben definito ambito probabilistico, sia un problema comunissimo nell'ambito della statistica matematica. Gli statistici sanno benissimo che i dati empirici debbono soddisfare ad opportune condizioni di consistenza o di coerenza affinché questo sia possibile. Sostanzialmente la tesi di Accardi sembra essere che le disuguaglianze di Bell siano da comprendersi in questo ambito, e che il più semplice esempio di condizioni di consistenza di tale tipo sia proprio l'esempio delle due fenditure, che ora passiamo ad illustrare.

Naturalmente, si richiede di avere un minimo di nozioni sul calcolo delle probabilità, ma qui, almeno per cominciare ad illustrare il problema, quello che ri richiede è veramente pochissimo. Basta riferirsi alla situazione più semplice possibile, quella con un numero finito di eventi, come il gioco dei dadi. Ci sono sei eventi elementari: esce 1, oppure 2, ..., oppure 6. Sappiamo fare l'unione e l'intersezione di eventi, e quindi abbiamo a che fare con insiemi, con la loro algebra rispetto alle operazioni di unione e intersezione che conosciamo, e infine abbiamo una misura, cioè una legge che assegna ad ogni insieme un numero positivo (o nullo), con la condizione che l'insieme totale (evento certo) ha misura 1. La probabilità $P(A)$ di un evento A è semplicemente definita come la misura del corrispondente insieme. Nel caso dei dadi, la misura di un insieme proviene da una misura assegnata agli eventi elementari, ad esempio $1/6$ a ciascuno di essi nel caso di dadi non truccati. Due concetti fondamentali sono quelli di *probabilità congiunta* e *probabilità condizionata*, che denoteremo rispettivamente con

$$P(A \cap B) \ , \qquad P(A|B) \ .$$

L'evento "avviene A e anche B" corrisponde all'insieme intersezione degli insiemi corrispondenti rispettivamente ad A e a B, e la sua probabilità è semplicemente la misura di quella intersezione: questa è la probabilità congiunta di A e B. Quando si parla di probabilità condizionata di B "dato A"

[21] Una traduzione italiana è stata resa disponibile da Accardi, e cercheramo di procurarcela e metterla in rete.

ci si riferisce alla probabilità di B se abbiamo l'informazione che è avvenuto A. Allora si fa una cosa semplicissima e ragionevole: ci si restringe a considerare l'insieme A (di cui sappiamo che è avvenuto) e anche tutti i suoi sottoinsiemi; invece, tutto quanto riguarda quello che è fuori di A (fuori dell'insieme corrispondente) lo rimuoviamo dalla nostra mente. Naturalmente ora dovremo rinormalizzare la misura di A, perché è A l'evento certo, ovvero il suo insieme rapprsesentativo è l'insieme "totale", che dunque deve ora avere misura 1. Formalmente questo si ottiene definendo

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \ . \tag{4.5.1}$$

Questa definizione di probabilità condizionata viene data riferendosi alla precedente nozione di probabilità composta. Ma il punto sottile è che in tutte le situazioni che si incontrano è invece la probabilità condizionata che svolge un ruolo fondante. Infatti, ogni volta che vogliamo ragionevolmente introdurre la probabilità di un evento, ci troviamo sempre nel caso in cui ci attendiamo di osservare quell'evento in una certa definita situazione. Ad esempio mi chiedo la probabilità di incontrare mio fratello a Milano, sapendo che abita a Torino e non avendo nessuna altra notizia su di lui (primo caso), oppure sapendo (secondo caso) che questa sera lui ha programmato di venire a Milano per andare a sentire un'opera alla Scala. Dunque tutte le probabilità sono condizionate, e di solito lasciamo sottintese le informazioni che abbiamo a priori sui possibili eventi. Ma la cosa è profonda. Ad esempio, il celebre premio Nobel per l'economia Keynes, che faceva parte del famoso circolo di Cambridge insieme con Russell e diversi altri, scrisse un noto libro sulla probabilità,[22] e lungo tutto il libro, *sempre*, fino quasi alla noia, quando parla della probabilità di un evento, la denota come una probabilità conidizionata, con un simbolo simile a quello che abbiamo usato sopra. Per questo motivo, si preferisce considerare le probabilità condizionate come enti primitivi, e porsi il problema se sia poi possibile trovare un ambito probabilistico (cioè un'algebra di eventi su cui sia definita una misura di probabilità), nel quale le probabilità conposte siano legate a quelle condizionate mediante una invesrione della relazione (4.5.2), ovvero

$$P(A \cap B) = P(B|A)\, P(A) \ . \tag{4.5.2}$$

A questo punto, quanto qui richiamato dovrebbe essere sufficiente per venire all'esempio della due fenditure.

La discussione viene svolta da Accardi nel capitolo VI, e il cuore è esposto alle pagine 278, 279. Egli ricorda prima come il problema viene trattato da Feynman, in un modo che Accardi giudica non soddisfacente. Egli invece lo riformula nel modo seguente. Consideriamo un fascio di particelle che incidono su uno schermo in cui sono praticati due fori, 1 e 2, e vengono poi

[22] J.M. Keynes, *A treatise on probability*, Mcmillan (londra, 1948).

raccolte ed osservate su un secondo schermo, dietro il primo. Si considerano i seguenti eventi

1. X = la particella arriva nella regione X del secondo schermo
2. 1 = la particella passa per il foro 1
3. 2 = la particella passa per il foro 2
4. $X \cap 1$ = la particella arriva in X e passa per il foro 1
5. $X \cap 2$ = la particella arriva in X e passa per il foro 2 .

Accardi introduce poi le probabilità condizionate $P(X|1)$, probabilità che la particella arrivi nella regione X quando solo il foro 1 è aperto, e $P(X|2)$, probabilità che la particella arrivi nella regione X quando solo il foro 2 è aperto, e le considera come quantità empiriche, date dalle osservazioni. Si pone allora il problema se sia possibile senza contraddizione, mediante relazioni del tipo (4.5.2), ottenere delle probabilità congiunte (oggetti matematici incogniti), a partire dalle probabilità condizionate (quantità empiriche). Nelle sue parole: (pag. 276): Quando vuoi fare ciò, *"non stai semplicemente applicando le leggi ella probabilità classica, ma stai introducendo l'ipotesi che esistano quattro numeri*

$$x = P(1)\ , \quad y = P(2)\ , \quad z = P(X \cap 1)\ , \quad z = P(X \cap 2)$$

che non possono corrispondeer a nessuna grandezza valutabile sperimentalmente. cioè non sono confrontabili con nessuna frequemza relativa effettivamente misurabile". Questo è un punto cruciale. Infatti, se compio una misurazione per constatare se la particella passa per 1 o per 2, perturbo il sistema e perdo l'interferenza nei dati empirici, ovvero sto considerando un altro esperimento. Dunque x, y, z, t sono incognite e non corrispondono a dei dati empirici. Invece sono dati empirici $P(X|1)$ e $P(X|2)$ oltre, naturalmente, a $P(X)$ che rappresenta il risultato stesso dell'esperimento. Poi Accardi mostra che queste quattro incognite non possono essere arbitrarie. Esse innanzitutto devone essere positive, e poi devono soddisfare le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} P(1) + P(2) &= 1 \\ P(X \cap 1) + P(X \cap 2) &= P(X) \\ \frac{P(X \cap 1)}{P(1)} &= P(X|1) \\ \frac{P(X \cap 2)}{P(2)} &= P(X|2)\ . \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Abbiamo già denotato con x, y, z, t le quattro incognite del problema. Introduciamo altre notazioni, a, b, c, per i parametri che entrano nel problema, come corrispondenti a dati di osservazione, ovvero:

$$a = P(X) \quad b = P(X|1) \ , \quad c = P(X|2) \ .$$

Allora le quattro equazioni prendono la forma

$$x + y = 1 \ , \quad z + t = a \quad z = bx \quad t = cy \ ,$$

che costituisce un sistema lineare di quattro equazioni di primo gardo in quattro incognitre con tre parametri. Il problema si risolve immediatamente per sostituzione, e ad esempio per l'incognita x si trova

$$x = \frac{a-c}{b-c} \ ,$$

ovvero, ripristinando i nomi delle quantità in gioco,

$$P(1) = \frac{P(X) - P(X|2)}{P(X|1) - P(X|2)} \ . \tag{4.5.4}$$

Ma deve essere necessariamente $0 \le P(1) \le 1$ e quindi, affinché si possano interpretare i "dati sperimentali" come consistenti con una intrepretazione probabilistica, essi devono soddisfare la condizione di compatibillità

$$0 \le \frac{P(X) - P(X|2)}{P(X|1) - P(X|2)} \le 1 \ . \tag{4.5.5}$$

Questa condizione non è soddisfatta, perché ad esempio se si prende la regione X in posizione simmetrica rispetto ai due fori si può ritenere che $P(X|1)$ sia molto prossimo a $P(X|2)$, se non addirittura uguale, sicché la quantità che dovrebbe esere limitata tra 0 ed 1, in effetti diverge. Quindi concludiamo che il numero $P(1)$, una delle nostre incognite, non esiste, e quindi non è possibile interpretare i dati empirici (le probabilità condizionate) entro uno schema probabilistico.

Secondo Accardi, le disuguaglianze di Bell sono delle condizioni di questo tipo, e quindi, in particolare, non avrebbero nulla a che fare con problemi legati alla località.

NOTA. Il punto di vista illustrato più sopra, relativo alla rilevanza delle probabilità condizionate nel'ambito dei fondamenti ella teoria delle probabilità, particolarmente alla luce della teoria di De Finetti, è discusso nel preprint F. Fagnola, M. Gregoratti, *Bell's Inequality Violations: Relation with de Finetti's Coherence Principle and Inferential Analysis of Experimental Data*, Polotecnico di Milano, 2010.

NOTA PER GLI AUTORI. Citare il lavoro di Accardi in cui descrive un esperimento di tipo locale che viola la disuguagliaza di Bell, e citare come reintra in tale ambito anche il modello Carati–Galgani in cui il paramwtro nascosto è la coppia di accelerazioni delle due particelle.

4.6 APPENDICE: L'analogo delle disuguaglianza di Bell in un gioco del tipo gratta e vinci

N.B. Questo paragrafo non è ancora completato.

Abbiamo visto come EPR abbiamo dato un criterio per stabilire se un sistema possieda una propietà (*If, without in any way disturbing ..*). Quegli autori quindi ritengono che si possa affermare che un sistema possieda una certa proprietà anche se non lo osserviamo. Questo problema, se un oggetto possieda una certa proprietà anche se non lo guardiamo, è un problema filosofico che si poneva ad esempio Berkeley quando si chiedeva se un albero, che egli aveva appena osservato, esistesse anche dopo che egli si era girato e non lo vedeva più. EPR sembrano dare un criterio per garantirsi dell'esistenza dell'albero anche quando non lo osservo. Le disuguaglianze di Bell, come vedremo, sembrano invece mettere in dubbio la validità del criterio EPR di realtà.

Mostriamo ora come sia possibile concepire un esperimento che costituisca un test per la validità del criterio di realtà EPR, un esperimento che mostri come una proprietà possa non esistere, anche se è soddisfatto il criterio di realtà EPR. Si tratta di un gioco del tipo gratta e vinci. Facciamo riferimento a un lavoro di Mermin, che abbiamo trovato citato in un noto lavoro di E. Nelson.[23]

Si tratta di un gioco del tipo "gratta e vinci". Vi sono due giocatori che giocano contro il banco. Il banco prende una scheda, la divide in due, e ne dà le due metà, una ciascuno, ai due compagni di gioco. Ognuna delle due metà contiene tre quadratini argentati, ad esempio posti lungo una linea orizzontale, i quadratini 1,2,3. Nel caso di Bell, il banco è la sorgente, i due giocatori sono i due rivelatori, le tre posizioni dei quadratini sono le tre orientazioni $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} = c$ in cui si misura lo spin.

I due giocatori non possono comunicare tra di loro. Ognuno dei giocatori gratta un quadratino sulla sua mezza scheda, e ne vede uscire un colore, che può essere R (rosso) oppure V (verde). Una prima regola è che se i due giocatori grattano il quadratino con la medesima posizione (entrambi il primo, o il secondo o il terzo), allora esce il medesimo colore, e la giocata non è valida, ovvero il banco ritira la scheda (questo è l'analogo della *condizione di singoletto* nel caso di Bell) e ne dà un'altra. Nel gioco, **il banco perde se risulta che i due quadratini (necessariamente in posizioni diverse) grattati dai due giocatori hanno colori diversi**. Se i due colori sono uguali vince il banco.

Ci poniamo il problema: quale deve essere la vincita rispetto alla posta, affinché il gioco sia equo?

[23] N.D. Mermin, Am. J. Phys. **49**, 940 (1981); *Physics Today*, April 1985, pag. 38-47. E. Nelson, *Quantum fluctuations*, Princeton U.P. (Princeton, 1985).

Bisogna dunque calcolare la probabilità di vincita. e questo possiamo farlo secondo le consuete regole del calcolo delle probabilità, calcolando il numero dei casi favorevoli, diviso per il numero di casi possibili. Facciamo dunque questo calcolo.

Seguendo EPR, ammettiamo dunque che i colori dei quadratini siano proprietà "reali", che esistono indipendentemente dal fatto che si compia una osservazione o no, e allora i casi possibili sono ben definiti e li si può fare scorrere tutti. Si trova che i possibili schemi di colorazione di ciascuna scheda – che poi verrà tagliata orizzontalmente – sono otto, ovvero (escludiamo, secondo la regola assegnata, gli schemi in cui compaiono colori uguali in quadratini corrispondenti)

$$\begin{array}{cc} R\,R\,R & V\,V\,V \\ V\,V\,V & R\,R\,R \end{array} \tag{4.6.1}$$

poi

$$\begin{array}{ccc} V\,R\,R & R\,V\,R & R\,R\,V \\ R\,V\,V & V\,R\,V & V\,V\,R \end{array} \tag{4.6.2}$$

e infine

$$\begin{array}{ccc} R\,V\,V & V\,R\,V & V\,V\,R \\ V\,R\,R & R\,V\,R & R\,R\,V \end{array} . \tag{4.6.3}$$

e dobbiamo contare in ognuna delle schede possibili, quanti sono i casi favorevoli. Una giocata, corrisponde a una scelta di un quadratino in alto e un quadratino in basso, in posizioni diverse.

Nella prima scheda, in tutti i casi possibilli (sei) i giocatori vincono. Lo stesso avviene nella seconda scheda. Nella terza, si hanno due casi su sei in cui vincono i giocatori, cioè i giocatori vincono in un terzo dei casi, e lo stesso si controlla che vale in tutte le rimanenti schede. Concludiamo che, se si ammette che i colori dei quadratini esistano, siano dati, indipendentemente dal fatto che li si gratti o no, la probabilità di vincita dei giocatori è

$$P > 1/3 ,$$

e quindi si deduce che è conveniente giocare se il banco paga almeno tre volte la posta.

Invece esiste un esperimento, compiuto Aspect nel 1982, che, nelle intenzioni di tale autore, risprodurrebbe una situazione sperimentale analoga a quella del gioco tipo gratta e vinci appena descritto, in cui però si trova che la probabilità di vincita è

$$P = 1/4$$

anziché $P > 1/3$. Sembrerebbe dunque doversi concludere che nell'esperimento di Aspect gli oggetti in gioco non hanno delle prorietà (i colori), indipendentemente dal fatto che si compia l'osservazione, cioè si avrebbe una dimostrazione empirica che in quella situazione non è valido il criterio di realtà di EPR.

4.7 APPENDICE: Schroedinger e l'*entanglement*

N.B. Questo paragfrafo è scritto in una versione alquanto provvisoria.

All'articolo di EPR, Schroedinger fece immediatamente seguito (nello stesso anno) con due articoli in inglese,[24] poi riassunti in un articolo in tedesco. Questo fu poi tradotto in inglese, ed è reperibile in rete.[25] Qui ci basiamo sul'articolo tedesco, perché al momento non abbiamo disponinili quelli inlgesi. L'articolo è di difficile lettura, perché non formalizzato, e diremo ora quale ci sembra sia la sostanza del suo contenuto. Intanto, comunque, è interessante osservare come in questo articolo sia documentata, fin dal 1935 (dieci anni dopo il primo articolo di Heisenberg) la esistenza di una scuola *ortodossa*, ormai stabilita in maniera sostanzialmente definitiva, a cui Schroedinger, ed anche Einstein, si oppongono. Ad esempio, a pag 329, e due volte a pag 335, egli parla di un *"official thinking of Quantum Mechanics"* o fa riferimento all'opinione di un *"quantum mechanician"*. E questa è la stessa espressione che usa Einstein nella "risposta agli autori" dell' Einstein Festschrift, quando dice: *"To this, the quantum theorist will reply ..."*[26]. E ancora nella pagina seguente: *"Insofar, then, as a quantum–theoretician takes the position that ..."*, citando poco dopo Schroedinger e il suo gatto. Riportiamo qui anche la conclusione di Einstein a proposito della concezione "ortodossa" (ibid., pagin 671): *" Roughly stated the conclusion is this. Within the framework of statistical quantum theory there is no such thing as a complete theory of the* individual *system. More cautiously it might be put as follows: The attempt to conceive the quantum–theoretical descriprion as the complete description of the* individual *systems leads to unnatural theoretical interpretations, which become immediately unnecessary if one accepst the interpretation that the description refers to ensembles of systems and not to individual systems. In that case the whole "egg–walking" performed in order to avoid the "physically real" becomes superfluous".*

Tornando a Schroedinger, a noi pare che il punto cruciale delle sue considerazioni consista nel dare particolare enfasi a quanto già osservato da EPR anche nel caso di una singola osservazione, in relazione al fatto che si

[24] E. Schroedinger, Proc. Cambridge Phil. Soc. **31**, 555 (1935); ibid. **32**, 446 (1936)

[25] E. Schroedinger, *Die gegenwaertige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23**, 807–612, 823–828, 844–849 (1935). Tale traduzione, J.E. Trimmer, *The present situation in quantum mechanics: a translation of Schroedinger's "cat paradox" paper.* è disponibile anche nel nostro archivio, che è pubblico.

[26] Albert Einstein: philosopher–scientist, pagina 668.

sta discutendo di un sistema composto da due sottosistemi che hanno precedentemente interagito. Per un sistema generico, sono tutti d'accordo che si possano considerare sullo stesso livello tutte le possibili sovrapposizioni di stati. Se ψ_m e ψ_n sono stati, anche

$$\psi = c_m\psi_m + c_n\psi_n \ , \tag{4.7.1}$$

con c_m e c_n numeri complessi, è uno stato. Invece Schroedinger pone l'attenzione su quello che avviene per un sistema costituito di due sottosistemi, e discute su quello che si può dire di un sottosistema quando si abbia una sovrapposizione del sistema totale. Egli osserva che nel caso che il sistema totale sia nello stato (stato fattorizzato)

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi(x_2)u(x_1) \ , \tag{4.7.2}$$

allora possiamo dire che anche il sottosistema (pensiamo ad esempio al secondo) è in un ben definito stato, quello rappresentato da $\psi(x_2)$. Invece, se il sistema totale è in uno stato sovrapposizione di due o più stati di quel tipo, ad esempio

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi_m(x_2)u_m(x_1) + \psi_n(x_2)u_n(x_1) \ , \tag{4.7.3}$$

allora non si può più parlare di uno stato del sottosistema 2, ovvero, come egli dice, il sottosistema 2 non è in nessuno stato. Se il sistema totale viene a trovarsi in uno stato non fattorizzato, allora non posso neanche dire che il sottosistema 2 precipita o collassa quando si compie una osservazione, *"For it had disappeared. It was no more"* (pag. 333 a sinistra in basso) Quando il sistema totale si trova in uno stato non fattorizzato, egli dice che il sistema è *entangled*, i due sottosistemi si sono intrecciati, avvinghiati. Ad esempio a pag. 332 (a destra, in basso), parlando di un sottosistema come apparato di misura e dell'altro come sistema osservato, dice: *"Now, has the ψ function of the measured object made a leap (fatto un balzo)?... No, it is no more (non c'é più). It has become snarled up (è diventato confuso), in accord with the causal law for the combined Ψ function, with that of the measuring instrument. The expectation catalog (nome descrittivo che egli dà alla funzione d'onda, allo stato, perché è una regola per calcolare i valori di aspettazione) of the object has split into a conditional disgiunction of expectation catalogs (una giustappposizione di due cataloghi)"*.

Egli poi illustra che cosa avviene per quanto riguarda i valori medi di osservabili. Nel caso di un singolo sistema in uno stato di sovrapposizione del tipo (4.7.1), il valore medio di una osservabile A è dato da

$$\begin{aligned} < A > &= (c_m\psi_m + c_n\psi_n, A(c_m\psi_m + c_n\psi_n)) \\ &= |c_m|^2 < A >_m + |c_n|^2 < A >_n + 2\,\mathrm{Re}\left(c_m^* c_n(\psi_m, A\psi_n)\right) \end{aligned} \tag{4.7.4}$$

con $< A >_i = (\psi_1, A\psi_i)$. L'ultimo termine a destra viene detto "termine di interferenza" per ragioni evidenti. Invece nel caso di sovrapposizione per un sistema costituito da due sottosistemi, cone nel caso (4.7.3), si trova, considerando una osservabile A relativa al sottosistema 2, e prendendo le funzioni ψ_i ed u_i normalizzate,

$$< A >=< A >_m + < A >_n +2\,\mathrm{Re}\left((\psi_m, A\psi_n)(u_m, u_n)\right)$$

e quindi ad esempio il valore medio di una osservabile A relativa al sottosistema 2 dipende anche dal sottosistema 1, se le funzioni u_m, u_n non sono ortogonali. In particolare il "termine di interferenza" è presente o no in dipendenza da quanto avviene per il sistema 1, anche se esso è molto lontano dal sistema 2.

Sembra difficile estrarre molto di più da questi lavori di Schroedinger, a parte la grande intensità con cui egli mette in luce la situazione paradossale in cui si trova l'interpretazione ortodossa, come tipicamente in relazione al celebre paradosso del gatto, che egli illustra nel paragrafo 5, a pagina 328.

Per un aspetto classico dell'*entanglement* si veda B.N. Simon et al, *Non-quantum entanglement resolves a basic issue in polarization optics*, Phys. Rev. Lett. **104**, 023901 (2010).

Osservazione. Se le considerazioni qui fatte appaiano non molto chiare, può essere utile (anzitutto agli autori stessi) considerare la seguente analogia. Consideriamo un sistema classico di due particelle, e consideriamo le corrispondenti densità di probabilità $\rho(q_1, p_1, q_2, p_2)$ nello spazio delle fasi. Se la ρ non è fattorizzara, ovvero non è della forma $\rho_1(q_1, p_1)\,\rho_2(q_2, p_2)$, allora si può dire che abbiamo uno stato entangled?. Cosa si aggiunge nel caso quantistico, in cui $\rho = \rho(q_1, q_2)$ e inoltre $\rho = |\psi|^2$? Infine, ancora in ambito classico, consideriamo uno stato con una ρ non fattorizzata. Allora, se compio una osservazione sulla particella 1, determinando $q_1 = \bar{q}_1, p_1 = \bar{p}_1$ e sostituisco questi valori nella ρ, ottengo uno stato relativo alla particella 2. In teoria delle probabilità si direbbe che si definisce in tal modo una probabilità condizionata per la particella 1, dipendente parametricamente dai valori osservati per la particella 1. In che cosa questo fatto differisce dalla precipitazione della ψ nel caso quantistico?