NOTE SUI PRINCIPI DELLA MECCANICA

Luigi Galgani, Massimo Bertini, Andrea Carati

1.1 Introduzione

Riportiamo qui alcune note relative a un corso tenuto per la scuola di specializzazione per l'insegnamento secondario a partire dall' anno 2003. Il corso fu tenuto dal primo autore, con la stretta collaborazione degli altri due sia per le lezioni, che per i rapporti con gli studenti, e la stesura di questa note. Le presenti note costituiscono un complemento storico–critico rispetto alle note più sistematiche sui fondamenti della meccanica, esposte nella prima parte del primo capitolo delle note *Appunti di meccanica razionale*, di A. Carati e L. Galgani.

Ricordiamo che lo scopo di queste note non è quello di riprodurre delle lezioni come potrebbero concretamente tenersi in una scuola secondaria, e nemmeno di ripetere un corso unversitario. Si tratta di un tentativo di mettere in luce alcuni aspetti che riteniamo fondamentali, con l'intento di stimolare l'aspirante insegnante a risalire continuamente al livello dei corsi universitari e a tenere un atteggiamento critico. Detto in altri termini: sappiamo tutti che concretamente nelle classi vi sono situazioni molto difficili, che spesso gli studenti non sono interessati .... . Bene. Qui ci occupiamo di noi stessi. Cerchiamo di comprendere noi stessi per primi le cose (è sempre buono il detto *"rem tene, verba sequentur"*), con entusiasmo, e cerchiamo anche di capire come potremmo fare per trasmetterle a degli studenti modello. Sarà l'esperienza poi ad insegnarci come adattarci alle varie situazioni che ci si presenteranno.

Nel seguito l'attenzione verrà rivolta agli aspetti concettuali, mentre i richiami agli aspetti fenomenologici e sperimentali saranno soltanto marginali. Siamo del tutto coscienti della grave limitazione che questo comporta, e speriamo di potervi sopperire in futuro. In effetti, tutta l'opera ad esempio di Galileo, e prima di lui quella del suo maestro (così egli lo chiamava) Archimede e del suo "allievo" Newton, sono piena testimonianza di quanto sia importante la coesistenza del metodo teorico e di quello sperimentale. Si veda ad esempio l'interessantissimo libro [RUS], paragrafo 10.4.

Per quanto riguarda lo stile, si tratta di qualche cosa di intermedio tra una analisi storica e una analisi critica, che in realtà risulta ben lontana da tali due tipi; se si vuole, si potrebbe dire che si tratta piuttosto di una *parodia* di una analisi storico–critica. Siamo tuttavia convinti che questo stile possa essere utile; almeno lo è stato per noi, ed è ben noto che per trasmettere qualsiasi cosa è anzitutto necessario che chi parla o scrive ne sia ben convinto per primo. Lo stile seguito parrà particolarmente discutibile in relazione alla discussione di certi strumenti matematici (limiti, derivate) che a nostro parere è doveroso introdurre (almeno avendo in mente gli studenti più brillanti). In effetti, non occorrerebbe molto (e speriamo di avere tempo per farlo in una prossima edizione delle note) per rendere la trattazione rigorosa, in una maniera per così dire *genetica*, avendo per modello il bellissimo libro [TOE], che fortemente si consiglia.

1.2 Galileo e la caduta dei gravi

1.2.1 Il platonismo di Galileo: "physics is divine service" ([HEI], pag. 9).

Ricordiamo una esperienza personale. Il primo incontro con la fisica per tutti noi fu in connessione con la legge di caduta dei gravi. Francamente fu una delusione: che i gravi cadessero con la legge dei quadrati del tempi non parve un fatto entusiasmante; sembrava trattarsi semplicemente di una descrizione di come andavano le cose. Se in tal modo era nata la nuova scienza, allora erano molto meglio Leopardi e Schopenhauer. In seguito apparve chiaro che le cose non stavano così, e che si era trattato invece di una vera grande scoperta, fatta in modo geniale, degna di suscitare stupore e ammirazione[1]. Vogliamo ora tentare di trasmettere questa sensazione che ci si trovi di fronte ad una cosa grande. Una sensazione che forse potrebbe essere trasferita agli studenti.

Il punto fondamentale è che la legge di caduta dei gravi è, prima che un fatto empirico, un "fatto ideale" (se si eliminasse la resistenza dell'aria ... ; allo stesso modo che per la legge di inerzia: se si eliminassero gli attriti e ogni forza esterna ...), una legge perfetta di un mondo ideale al quale il nostro mondo empirico si accosta. Questa legge ideale è scritta nel linguaggio perfetto della matematica, quel linguaggio la cui perfezione può essere capita solo da chi abbia provato l'esperienza di capire che esistono i numeri irrazionali[2] , e che quindi capisce in intensità (così dice Galileo) come Dio.

> *Richiamiamo brevemente la dimostrazione più conosciuta (per una seconda dimostrazione si veda [TOE], pag. 4). Per assurdo. Sia $\sqrt{2} = m/n$ con m,n interi naturali ridotti ai minimi termini (ovvero privi di fattori comuni diversi da 1). Allora $2 = m^2/n^2$, ovvero $m^2 = 2n^2$, cioè m^2 è pari (multiplo di 2) e quindi m è pari, diciamo $m = 2p$ con p intero naturale (per assurdo: perché se m fosse dispari, cioè non contenesse 2 nella sua decomposizione – unica! – in fattori primi, allora anche m^2 sarebbe dispari). Dunque $4p^2 = 2n^2$, cioè $n^2 = 2p^2$, ovvero n^2 è pari, quindi n pari, sicché m ed n sarebbero entrambi pari, contro l'ipotesi.*
>
> *Naturalmente. di fronte a questo fatto si potrebbe semplicemente ritenere che i numeri irrazionali 'non esistano"; ma il teorema di Pi-*

[1] Si tratta in effetti della seconda scoperta scientifica originale fatta nel mondo moderno, superando gli antichi, ovvero i greci. Ricordiamo che la prima scoperta della scienza moderna in cui si superarono gli antichi fu quella compiuta dagli algebristi italiani Scipio del Ferro (Bologna), Tartaglia (Brescia), Cardano e Ferrari (Milano) (fine 1400, inizi 1500) con la soluzione delle equazioni algebriche di terzo e quarto grado). Si veda [ALE] e [VAN].

[2] Stranamente è capitato a molti di venire a sapere della scoperta pitagorica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, al liceo, da un libro di filosofia e non dal libro di matematica. *Si parva livet componere magnis*, si può osservare che, come riportato da [TOE], pag. 6, Platone afferma nelle *Leggi* che egli venne a conoscenza della irrazionalità di $\sqrt{2}$ solo in età avanzata, e che provò vergogna, per se stesso e per tutti i greci, di tale ignoranza che *befits more the level of swine than of men* (sono parole di Platone).

tagora ci mostra che essi "esistono", perchè $\sqrt{2}$ è la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato unitario.

Questo è il primo punto, che viene di solito descritto come il "platonismo" di Galileo. Il secondo punto è che questa legge ideale, matematica, platonica, che la natura sembra seguire, viene ritrovata dall'Uomo (o uomo–donna) come invenzione geniale, basata semplicemente su due criteri: a) coerenza, b) semplicità. Ciò verrà illustrato sotto nel caso della legge di caduta dei gravi, ma è un fatto generale delle scoperte profonde in una scienza altamente matematizzata come la fisica.

Riportiamo qui due bellissime citazioni da Heisenberg e da Einstein che riassumono in maniera molto forte i concetti sopra esposti, ovvero platonismo della fisica, come scienza matematizzata, e inoltre leggi determinate dal criterio di coerenza e semplicità. Per quanto riguarda Heisenberg, riportiamo il seguente brano da *Tradition in Science*, primo saggio della raccolta [HEI], pagg. 8-9, dove egli parla del *metodo scientifico*.

"This method is sometimes misunderstood by terming it 'empirical science', as contrasted to the speculative science of former centuries. Actually, Galileo turned away from the traditional science of his time, which was based on Aristotle, and took up the philosophical ideas of Plato. He replaced the descriptive science of Aristotle by the structural *science of Plato. When he argued for experience he meant experience illuminated by mathematical constructs. Galileo, as well as Copernicus, had understood that by going away from immediate experience, by idealizing experience, we may discover mathematical structures in the phenomena, and thereby gain a new simplicity as a basis for a new understanding. Aristotle, for example, had correctly stated that light bodies fall more slowly than heavy bodies. Galileo claimed that all bodies fall with the same speed in empty space, and that their fall can be described by simple mathematical laws. Fall in empty space could not be observed accurately in his time; but Galileo's claim suggested new experiments. The new method did not aim at the description of what is visible, but rather at the design of experiments and the production of phenomena that one does not normally see, and at their calculation on the basis of mathematical theory.*

Therefore two features are essential for the new method: the attempt to design new and very accurate experiments which idealize and isolate experience and thereby actually create new phenomena, and the comparison of these phenomena with mathematical constructs, called natural laws. *Before we discuss the validity of this method even in our present science, we should perhaps briefly ask for the basis of confidence, which led Copernicus, Galileo and Kepler on this new way. Following a paper of von Weizsäcker, I think we have to state that this*

> *basis was mainly theological. Galileo argued that nature, God's second book (the first one being the Bible), is written in mathematical letters, and that we have to learn this alphabet if we want to read it. Kepler is even more explicit in his work on world harmony; he says: God created the world in accordance with his ideas of creation. These ideas are the pure archetypal forms which Plato termed ideas, and they can be understood by Man as mathematical constructs. They can be understood by Man, because Man was created as the spiritual image of God. Physics is reflection on the divine ideas of creation, therefore physics is divine service."*

Per quanto riguarda Einstein, abbiamo in mente diversi passi in cui egli esprime l'idea che la comprensione della natura sia un fatto miracoloso, ma ora non riusciamo a ritrovarli. Abbiamo trovato tuttavia il seguente passo, dalla Lettera a Solovine n.8 (pag. 740 dell'edizione italiana [EIN]).

> *"E veniamo al punto più importante della sua lettera. Lei trova strano che io consideri la comprensibilità della natura (per quanto siamo autorizzati a parlare di comprensibilità) come un miracolo o come un mistero. Ebbene, ciò che ci dovremmo aspettare, a priori, è proprio un mondo caotico del tutto inaccessibile al pensiero. Ci si potrebbe (di più, si* dovrebbe*) aspettare che il mondo sia governato da leggi soltanto nella misura in cui interveniamo con la nostra intelligenza ordinatrice: sarebbe un ordine simile a quello alfabetico, del dizionario. Laddove il tipo d'ordine creato ad esempio dalla teoria della gravitazione di Newton ha tutt'altro carattere. Anche se gli assiomi della teoria sono imposti dall'uomo, il successo di una tale costruzione presuppone un alto grado d'ordine del mondo oggettivo, e cioè un qualcosa che, a priori, non si è per nulla autorizzati ad attendersi. È questo il "miracolo" vhe vieppiù si rafforza con lo sviluppo delle nostre conoscenze. ... Il fatto curioso è che noi dobbiamo accontentarci di riconoscere il "miracolo" senza che ci sia una via legittima per andare oltre."*

1.2.2 Intermezzo: i corpi più pesanti cadono più velocemente?

Nei paragrafi successivi mostreremo come Galileo giunga a formulare la sua legge matematica per la caduta dei gravi nel vuoto, ovvero che l'accelerazione (in generale intesa in senso vettoriale) è costante. Ma vogliamo ora invece illustrare il primo punto fondamentale che Galileo stabilì, ovvero che la legge di caduta è la medesima per tutti i corpi (indipendente cioè dalla loro massa – dalla quantità di materia, direbbe Newton – e dalla forma), quando si prescinda dall'attrito provocato dall'aria o da altri impedimenti. Questa fondamentale proprietà (che oggi formuliamo come corrispondente all'uguaglianza di massa inerziale e massa gravitazionale: si veda un prossimo paragrafo) fu concepita da Galileo con un argomento puramente logico, che è il seguente (prendiamo dalla bellissima esposizione di Pólya [POL], cap. 3). Si veda Galileo, Discorsi pag. 72–73 della Edizione Einaudi.

> *Supponiamo che due corpi W e w cadano liberamente partendo da una posizione di riposo ed abbiano, alla fine di un intervallo unitario di tempo, rispettivamente velocità V e v. Allora, secondo Aristotele, se W è più pesante di w, V deve essere maggiore di v. "Ma", si chiede Galileo, "che cosa succede se i due corpi sono uniti ?" Sia U la velocità, alla fine dello stesso intervallo di tempo, dei due corpi congiunti $W+w$. Poiché w da solo cade più lentamente di W, la parte w di $W+w$ deve ritardare la parte W; quello svelto di gamba deve rallentare il passo per aiutare lo zoppo. U deve essere minore di V. Tuttavia, poiché $W+w$ è più pesante di W, per l'ipotesi di Aristotele U deve essere maggiore di V; $W+w$ cade sia più lentamente sia più velocemente di W, e ciò è assurdo.*

Questo argomento è riportato da Newton in maniera molto simile (si veda *Principia*, Book III, *System of the world*, Proposition VI, Theorem VI, in particolare pag. 413 della edizione University of California Press)

> *But further; the weights of all the parts of every planet towards any other planet are one to another as the matter in the several parts; for if some parts did gravitate more, others less, than for the quantity of their matter, then the whole planet, according to the sort of parts with which it most abounds, would gravitate more or less than in proportion to the quantity of matter in the whole.*

Dunque, secondo Galileo la legge proposta da Aristotele (i corpi più pesanti cadono più velocemente) è incoerente, e perciò va respinta, se ci riferiamo a esperienze ideali in cui sia eliminata la resistenza dell'aria, o meglio a esperienze concrete, in cui la resistenza dell'aria viene controllata, come fece Newton stesso (si veda la citazione poco più avanti). In termini delle leggi del moto di Newton, questa indipendenza della legge di moto dalla natura e dalla forma del corpo (in assenza di resistenza dell'aria) si esprime dicendo che in ogni corpo la massa inerziale è uguale alla massa gravitazionale, e dunque nell'equazione $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ (con $\mathbf{F}=-mg\mathbf{k}$) le due masse si cancellano.

Questo fatto è descritto da Newton nel modo seguente (*The system of the world* n [19], pag. 567 della edizione University of California Press (si veda anche *Principia, Book III, System of the world*, Proposition VI, Theorem VI, pag. 411–414 edizione UCP, in cui la discussione è ancora molto più lunga.)

> *"If the action of the circumterrestrial force (cioè la forza di gravità all'altezza della superficie terrestre) is proportional to the bodies to be moved, it will (by the second Law of Motion) move them with equal*

> *velocity in equal times, and will make all bodies, let fall, to descend through equal spaces in equal times, and all bodies, hung by equal threads, to vibrate in equal times. If the action of the force was greater, the times would be less; if that was less, these would be greater."*

Ma Newton aggiunge subito che ciò è contrario all'esperienza. Infatti dice

> *"But it has been long ago observed by others that (allowance being made for the small resistence of the air) all bodies descend through equal spaces in equal times; and, by the help of pendulums, that equality of times may be observed with great accuracy.*
>
> *I tried the thing in gold, silver, lead, glass, sand, common salt, wood, water and wheat (grano). I provided two equal wooden boxes. I filled the one with wood, and suspended an equal weight of gold (as exactly as I could) in the center of oscillation of the other. The boxes, hung by equal threads of 11 feet, made a couple of pendulums perfectly equal in weight and figure,* and equally exposed to the resistence of the air*: and, placing the one by the other, I observed them to play together forwards and backwards for a long while, with equal vibrations. And therefore (by Cor. I and VI, Prop. XXIV, Book II) the quantity of matter in the gold was to the quantity of matter in the wood as the action of the motive force upon all the gold to the action of the same upon all the wood; that is, as the weight of the one to the weight of the other.*
>
> *And by these experiments, in bodies of the same weight, one could have discovered a difference of matter less than the thousandth part of the whole."*

Dunque l'ipotesi che la forza gravitazionale sia proporzionale alla quantità di materia, unita alla seconda legge, spiega che la legge di caduta in assenza dell'aria sia la medesima per tutti i corpi. In effetti, come si vede dalla citazione di Newton, egli nelle esperienze si garantisce che venga controllato l'effetto dell'aria, perchè fa esperienze in cui è sicuro che la resistenza dell'aria sia la medesima. Il punto cruciale qui sta nell'osservaare che, diversamente dalla forza peso, la forza di resistenza dell'aria non è una *forza di volume* (cioè proporzionale al volume), ma una *forza di superficie* (cioè proporzionale alla superficie, perchè agisce indipendentemente su ogni areola della superficie del corpo).[3] Quindi, mentre la forza peso non dipende dalla forma del corpo, ne dipende la forza di resistenza dell'aria, e in generale le due forze non si possono bilanciare; ogni forma darà luogo a una diversa forza risultante e quindi a un diverso movimento. Per questo motivo la legge di caduta considerata da Aristotele (i corpi più pesanti cadono più velocemente),

[3] Una situazione analoga si presenta in meccanica celeste. Pensiamo ad un oggetto gravitante attorno al Sole; allora esso è soggetto all'attrazione gravitazionale del Sole, che è proporzionale al volume, ma anche alla forza di pressione dovuta alla luce solare, che è una forza proporzionale alla superficie. Per corpi piccoli, queste due forze possono bilanciarsi. È questo in effetti un argomento di studio recente nella dinamica del sistema solare.

pur essendo assurda quando si trascuri la resistenza dell'aria (come messo in luce da Galileo), in presenza di tale resistenza non solo non è assurda, ma è addirittura vera. Il problema della forza di resistenza che un corpo subisce in un fluido (in particolare nell'aria) è ampiamente discusso nei *Principia* di Newton, precisamente nella Part II, *The motion ob bodies in resistive mediums*, particolarmente Proposition XXXIV, Theorem XXVIII, pag. 331 della edizione University of California Press.

> Massa inerziale e massa gravitazionale. *L'ipotesi di Newton illustrata sopra viene di solito enunciata come affermante l'uguaglianza di massa inerziale e massa gravitazionale. Con ciò si intende quanto segue. La massa che entra nella seconda legge* $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ *viene detta* massa inerziale *per motivi ovvii, perchè misura la "inerzia", la resistenza che un corpo oppone a variare il suo stato di moto (si sottintende, nel senso di Galileo e Newton, ovvero della prima legge: un corpo non soggetto a forza – in un sistema inerziale – mantiene il suo stato di moto, cioè la sua velocità). In presenza di una forza, il corpo modifica il suo stato di moto, cioè subisce una accelerazione, ma il cambiamento dello stato di moto, cioè la accelerazione, è (in accordo con la seconda legge) inversamente proporzionale alla quantità di materia che vi è nel corpo (come direbbe Newton), cioè a una quantità che chiamiamo massa inerziale (un sacco di farina ha una massa inerziale doppia che non metà dello stesso sacco di farina). La massa gravitazionale riguarda invece la forza. Si tratta di una proprietà a priori "ontologicamente" diversa dalla massa inerziale. Per mettere in luce questo fatto, potremmo considerare l'analogia con le altre forze che furono introdotte successivamente nella fisica, come tipicamente la forza elettrica coulombiana. In tal caso parliamo di* cariche *elettriche: pensiamo che ogni corpo abbia una sua carica elettrica e diciamo che la forza di Coulomb tra due corpi è porporzionale al prodotto delle cariche elettriche di ciascuno dei due corpi. Analogamente, nel caso della forza gravitazionale, possiamo dire che ogni corpo ha una propria carica gravitazionale (che poi chiamiamo* massa *gravitazionale), e affermiamo, con Newton e Galileo, che la forza gravitazionale esercitantesi tra due corpi è proporziale al prodotto delle loro masse gravitazionali. Allora interpretiamo le esperienze di Galileo e di Newton come indicanti che la massa gravitazionale di un corpo è proporzionale alla sua massa inerziale, e anzi scegliamo le unità di misura in modo che le due masse siano addirittura uguali.*[4] *Ovviamente questa uguaglianza non era affatto da attendersi a priori. Einstein stesso ne fa un uso altamente pregnante nel suo* principio di equivalenza*, e anche in diversi*

[4]Nelle parole di Newton (pag. 412 UCP) "But forces which equally accelerate unequal bodies must be as those bodies; that is to say, the weight of the planets towards the sun must be as their quantities of matter".

suoi scritti divulgativi sottolinea ripetutamente la rilevanza di questo fatto (si veda Einstein in [EININ].

1.2.3 Intermezzo sul calcolo differenziale.

Torniamo ora al filo che stavamo seguendo, in relazione alle citazioni di Heisenberg ed Einstein, riguardo la matematizzazione della fisica. Vorremmo ora illustrare come questa espressione matematizzata delle leggi fisiche ha potuto essere compiuta soltanto attraverso la formaziome stessa, piuttosto faticosa, di un appropriato linguaggio, che è anzitutto il calcolo differenziale. Ora, è ben vero che Galileo non si esprime esplicitamente in termini di calcolo differenziale moderno, perché si esprime con il linguaggio del suo maestro Archimede (che peraltro è anche lo stesso linguaggio ancora usato da Newton, almeno nei *Principia*).[5]

Tuttavia è chiaro che la nuova scienza stava costruendo proprio quel linguaggio, e senza di quello è impossibile trasmetterne i concetti stessi. Abbiamo dunque il problema cruciale di poter disporre del linguaggio del calcolo differenziale. Questo è il punto in cui casca l'asino, perché nelle scuole superiori in generale ciò non avviene. Sembra allora che non ci sia nulla da fare e che siamo costretti ad usare un linguaggio approssimativo. Questo è proprio il segno della sconfitta, una sconfitta a priori: dove c'è stata una rivoluzione nei concetti e nel linguaggio, noi accettiamo di fermarci. Dobbiamo dire agli studenti che mentre possono capire la storia e la filosofia, ed i loro metodi, invece per quanto riguarda la scienza alta, non puramente descrittiva, quella possiamo spiegargliela solo in maniera approssimativa. E questo, nonostante il fatto che i grandi scienziati molto spesso abbiano ottenuto importantissimi risultati già in giovanissima età. A diciotto anni un giovane brillante del conservatiorio può suonare benissimo Chopin, ma un giovane liceale non può capire i secenteschi Galileo e Newton. Personalmente, crediamo che questo non sia affatto necessario, e che sia semplicemente sbagliato il modo in cui si insegna la matematica, con assurdi infiniti esercizi e pochissime cose importanti veramente trattate: le primissime nozioni di algebra (spesso come pure regole di calcolo) e solo la geometria euclidea (almeno quando la si insegna) come vera scienza.

Qui vorremmo convincere il lettore che si potrebbe tentare di fare qualche cosa di più. Veniamo quindi a un *intermezzo su nozioni minime di calcolo differenziale*. Se poi nell'esperienza didattica non riuscisse possibile insegnarle di fatto, almeno questo richiamo potrebbe servire a stimolare l'insegnante.

Consideriamo un punto che si muova su una retta. Avendo fissato origine, verso e unità di misura, la posizione del punto è individuata da

[5] Ricordo che Newton, nato nell'anno (1642) della morte di Galileo, pubblicò i *Principia* attorno al 1687, e che l'opera fondamentale di Galileo (le *Dimostrazioni matematiche attorno a due nuove scienze*) fu scritta da Galileo nell'esilio di Arcetri e venne pubblicata postuma ad Amsterdam. Le due nuove scienze sono rispettivamente la teoria dell'elasticità o di quella che oggi si chiamerebbe scienza dei materiali (prime due giornate) e la teoria del moto (terza e quarta giornata). In effetti, le prime due giornate contengono molto di più. e sono particolarmente interessanti (sto preparando su questo una appendice, con l'aiuto di uno stidente del corso.

un numero reale x. Sia poi dato un orologio (che scorre uniformemente per definizione – su questo ritorneremo parlando del principio di inerzia) e dunque il tempo t come variabile reale. Assegnare un movimento significa assegnare una funzione $x = x(t)$ (come funzione da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$, o eventualmente da un aperto di $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$).[6] *A questo punto tutti sappiamo definire (e ne comprendiamo il significato) la velocità media tra due istanti t e $t+\tau$ come rapporto tra spazio percorso e tempo trascorso (chiamato solitamente* rapporto incrementale*, cioè rapporto degli incrementi):*

$$v_m(t,\tau) := \frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} \,, \tag{1.2.1}$$

(con la notazione $:=$ intendiamo che il primo membro è definito dal secondo membro, esattamente come nei linguaggi di programmazione), e si tratta di capire la velocità istantanea al tempo t, come limite della velocità media quando τ tende a zero. Qui spesso si dice che queste cose sono state capite soltanto dopo la formulazione "rigorosa"ottocentesca di Cauchy. Ma questo è assolutamente falso, e crediamo che uno studente possa capirle benissimo, come le capiva benissimo Archimede.[7]

Vediamo un esempio. Per il moto $x(t) = t$ si calcola $v_m(t,\tau) = [(t+\tau)-t]/\tau = 1$, sicché la velocità media non dipende né dal tempo "iniziale" t nè dal tempo trascorso τ, e il moto si dice appunto "uniforme". Proviamo ora il moto $x(t) = t^2$. Si ha $v_m(t,\tau) = [(t+\tau)^2 - t^2]/\tau = [2t\tau+\tau^2]/\tau$ e quindi

$$v_m(t,\tau) = 2t+\tau \,. \tag{1.2.2}$$

[6] Può essere interessante richiamare qui il paradosso di Zenone, del quale alcuni studenti delle scuole secondarie avranno sentito parlare nel corso di filosofia. Zenone sembra asserire che Achille non può passare ad esempio dal punto $x = 1$ al punto $x = 2$ in un tempo finito, perché tra quei due punti ne esistono infiniti. Ammesso che questo sia il paradosso, allora lo si supera con una affermazione fattuale: si afferma che *esiste* il movimento, cioè esiste una legge che ad ogni t fa corrispondere uno e un solo x, e quindi Achille di fatto si muove. Ad esempio, se la legge di moto è $x(t) = t$, allora Achille si trova nel primo punto al tempo 1 e nel secondo punto al tempo 2. Il paradosso deve comunque essere compreso in senso storico. Come dice [TOE], pag. 2, *"It is unreasonable to suppose that Zeno was unaware that the time needed to traverse these successive halves themselves become shorter and shorter. He is protesting against the antinomy of the infinite process which we encounter in proceeding along a continuum. And this protest, expressed with youthful exuberance but recorded almost against the will, indicates that mathematicians had then first dared to undertake the summation of infinitely many, but ever decreasing, bits of time, like* $1+1/2+1/4+1/8+\cdots$*. "*

[7] Basta fare l'esperienza di seguire il modo in cui Archimede dimostra la convergenza della serie geometrica, per capire che il suo metodo era assolutamente rigoroso, in termini moderni. Si veda ad esempio [RUS], paragrafo 2.7, dove la dimostrazione viene data in connessione col metodo di esaustione per la quadratura della parabola. Tra l'altro, dal modo usato da Galileo per definire la parabola nella quarta giornata delle *Due Nuove Scienze*, a proposito della composizione dei movimenti nella caduta dei gravi, appare evidentissimo che Galileo conosceva questo passo di Archimede.

Questa volta la velocità media tra i tempi t e $t+\tau$ dipende sia dal tempo iniziale" t, sia dal tempo trascorso τ, ma ognuno dovrebbe capire cosa si intende quando si dice che, fissato il tempo iniziale t, la velocità media ha un limite quando τ tende a zero: se $t = 10$ e $\tau = 0.1$, allora $v_m = 20.1$, e prendendo successivamente $\tau = 0.01, 0.001, 0.0001.\cdots$ si ottiene rispettivamente $v_m = 20.01$, 20.001, $20.0001, \cdots$. Risulta così spontaneo definire la velocità istantanea *al tempo t come quella che si ottiene dalla espressione sopra data per la velocità media $v_m(t,\tau)$ ponendo $\tau = 0$ (si veda [ALE]); indichiamola con $v(t)$. In generale adotteremo la regola di ottenere la velocità istantanea ponendo $\tau = 0$ nello sviluppo del rapporto incrementale in potenze dell'incremento τ della variabile indipendente (almeno nei casi in cui siamo in grado di esprimere il rapporto incrementale in tale modo).*

(Qui ci arrestiamo a questo punto. Ma la digressione meriterebbe di venire estesa, fornendo una appropriata definizione di limite - ricordando anche la definizione usata da Archimede e citata in una nota precedente. Si dovrebbe poi illustrare il fatto che il calcolo della derivata permette di approssimare, nel piano t,x la curva $x = x(t)$ con una spezzata, e così via. Questo punto verrà ripreso più sotto, in una appendice, a proposito del metodo di Eulero per la soluzione numerica delle equazioni differenziali.)

Naturalmente, la velocità istantanea *$v = v(t)$ è una funzione nello stesso senso in cui lo è la funzione $x = x(t)$. Se $x(t) = t^2$, allora $v(t) = 2t$. Per corroborarci possiamo fare l'esercizio di calcolare la derivata delle potenze con un intero positivo: se $x(t) = t^n$, allora $v(t) = nt^{n-1}$, e poi osservare che la stessa legge vale anche per le potenze intere negative*[8]

Abbiamo così introdotto la *derivata* di una funzione, quello che gli anglosassoni chiamano più efficacemente il *rate of growth* (rapidità di crescita), che è una costruzione matematica che nulla a che fare con l'interpretazione fisica degli oggetti di cui si parla, allo stesso modo in cui due più tre fa cinque, indipendentemente dal fatto che stiamo sommando mele oppure pere. Possiamo allora venire all'accelerazione. Si tratta nient'altro che della derivata della velocità ovvero del *rate of growth* della velocità. Essendo la velocità una funzione del tempo, allora possiamo derivarla, e otteniamo una funzione che chiamiamo accelerazione e denotiamo con $a(t)$. Ad esempio, se $v(t) = \alpha$ con α costante (moto uniforme $x(t) = \alpha t + \beta$), allora $a(t) = 0$, se $v(t) = \alpha t$, allora $a(t) = \alpha$ (moto uniformemente accelerato), se $v(t) = \alpha t^2$, allora $a(t) = 2\alpha t$, e così via. Per mettere in evidenza che una funzione viene ottenuta per derivazione di un'altra, allora la si denota con la stessa

[8] Qui si deve usare anche la proprietà che il limite dell'inverso di una funzione (quando il limite sia diverso da zero) coincide con l'inverso del limite.

lettera della funzione assegnata, aggiungendo un punto (notazione di Newton) o un apice, e dunque si denota $v(t) \equiv \dot{x}(t)$ (oppure $v(t) \equiv x'(t)$), e analogamente $a(t) \equiv \dot{v}(t) \equiv \ddot{x}(t)$.

Si può andare all'indietro, e deteminare una funzione se ne è conosciuta la derivata (si dice che in tal caso si determina la "*primitiva*" della funzione assegnata). Ci si convince subito che questa operazione non è univoca, e che, per una funzione data, si hanno infinite primitive che differiscono per una costante arbitraria additiva (questo fatto sarà di notevole importanza in relazione al fatto che il moto viene determinato, nota la forza, quando si assegnino i "dati iniziali", ovvero la posizione e la velocità iniziali). Così se $\dot{x}(t) = \alpha$, allora $x(t) = \alpha t + c$, se $\dot{x}(t) = \alpha t$, allora $x(t) = \alpha t^2/2 + c$.

> *Parte ancora da scriversi: Galileo e il movimento come integrale della velocità; la generalizzazione di Newton per forze non costanti (Lemma X, pag 34 UCP). .*

1.2.4 Crescita delle popolazioni e caduta dei gravi.

Dunque abbiamo ricordato come in maniera più o meno implicita od esplicita Galileo, Newton e gli altri si siano dovuti familiarizzare con le nozioni di velocità, accelerazione, e più in generale con la nozione di derivata e con quella di primitiva. Veniamo ora invece al punto centrale che si intende mettere in rilievo in questo paragrafo, ovvero l'aspetto platonico della legge di Galileo della caduta dei gravi. Il fatto è che, ovviamente, si osserva che la velocità di un grave aumenta man mano che il grave discende (ammettiamo per semplicità che il moto avvenga lungo un asse verticale, che orientiamo ad esempio verso il basso, e denotiamo ancora con x la coordinata del grave, identificato con un punto; il grave parta inoltre dalla quiete). Si tratta di stabilire la legge ideale con cui aumenta questa velocità. Ora, Galileo fece dapprima l'ipotesi che gli sembrava per qualche motivo spontanea, ovvero che la velocità crescesse proporzionalmente allo spazio percorso: quando il grave viene a trovarsi nel punto x, la velocità sarebbe βx, con una certa costante β. La velocità sarebbe allora una funzione del posto: $v(x) = \beta x$. Il punto che vogliamo ora mettere in rilievo è che Galileo si rese conto, con argomenti puramente matematici, che tale legge è logicamente assurda in relazione a un fatto altamente qualitativo, cioè il fatto che il corpo si muove. Il modo in cui egli vi giunse non sembra del tutto limpido; egli stesso infatti ripudiò un prima dimostrazione, e la seconda dimostrazione che diede nelle "*Due nuove scienze*" è stata criticata da E.Mach (si veda [MAC]). Tuttavia la conclusione è corretta. In termini moderni l'argomento è il seguente. Ricordando che per definizione la velocità è la derivata della posizione, $v(t) = \dot{x}(t)$, e che a sua volta la posizione è una certa funzione (anche se a noi ancora sconosciuta) del tempo, $x = x(t)$, l'ipotesi di Galileo si scrive nella forma

$$\dot{x}(t) = \beta\, x(t) \qquad (1.2.3)$$

dove β 'e una costante. Ora, questa relazione non va letta come una identità, ma come una equazione differenziale. Questo significa, anzitutto, che si tratta di una equazione, precisamente una equazione funzionale, una equazione cioè in cui l'incognita non è un numero (come nelle familiari equazioni algebriche, del tipo $ax+b=0$, $ax^2+bx+c=0$), ma una funzione; nel nostro caso l'incognita è la funzione che descrive il movimento, ovvero la funzione $x=x(t)$. Inoltre, si tratta di una equazione differenziale, perché sulla funzione incognita $x=x(t)$ si dà una prescrizione che ne coinvolge la derivata: a parole, si cerca una funzione tale che la sua derivata coincida con la funzione stessa, a meno del prodotto per un numero.

Si noti bene che questa equazione è a priori, come equazione matematica, del tutto sensata, anzi è anche una equazione che ha una chiarissima interpretazione di grandissimo significato nella dinamica delle popolazioni (o del decadimento radioattivo). Infatti, se ora $x(t)$ rappresenta il numero[9] di individui di una certa specie esistenti al tempo t, è ben naturale attendersi che la rapidiità di crescita della popolazione (cioè il numero di nascite per unità di tempo) sia proporzionale alla popolazione stessa. E in effetti la soluzione generale della equazione suddetta esiste (per una trattazione euristica si veda una Appendice) ed ha ben senso, essendo (in un certo modo per definizione) la funzione $x(t)=ce^{\beta t}$, dove c è una costante arbitraria ed e il numero di Nepero, $e=2.71\cdots$ (crescita esponenziale delle popolazioni).

Ora, per quale motivo tale legge di crescita esponenziale, che ha senso nel caso delle popolazioni (almeno per tempi finiti, fino a quando ci sono risorse di cibo illimitate), non ha invece senso per il movimento di un grave in caduta libera che parta dalla quiete? La ragione è nel fattore c, che ora passiamo ad indentificare. Se consideriamo la funzione $x(t)=ce^{\beta t}$, ricordando che per una legge generale delle potenze vale $e^0=1$, osserviamo che si trova allora $c=x(0)$, sicché la soluzione assume la forma

$$x(t)=x(0)e^{\beta t}\ . \tag{1.2.4}$$

Da questo si deduce che il grave non si muove affatto, ovvero si ha a tutti i tempi $x(t)=0$, se esso è inizialmente fermo, ovvero se è soddisfatta la condizione iniziale $x(0)=0$. Nel caso delle popolazioni ciò va benissimo, perché la popolazione resterà sempre nulla se è inizialmente nulla. Ma ciò non ha invece senso nel moto dei gravi, perché sappiamo bene che un grave, che inizialmente si trovi in una qualunque posizione (che convenzionalmente possiamo assumere come origine delle coordinate, cioè con $x(0)=0$), di fatto si muove e non resta fermo, contro la previsione $x(t)=0$ a cui conduce la primitiva ipotesi di Galileo $v(x)=\beta x$. In questo senso, la legge inizialmente considerata come possibile da Galileo risulta insensata per descrivere il moto dei gravi.

Avendo capito questo fatto, Galileo scelse allora un'altra legge, con i requisiti di coerenza matematica (rispetto ai fatti che si vogliono descrivere) e di semplicità.

[9]Naturalmente tale numero dovrebbe essere rappresentato da un intero naturale, ma è significativo rappresentarlo con un numero reale, se si ha a che fare con numeri grandi. Si veda ad esempio [VOL].

La legge cui pensò fu quella di proporzionalità tra la velocità e il tempo trascorso:

$$v(t) = \alpha\, t \tag{1.2.5}$$

con una certa costante α. Questa legge non ha difficoltà logiche del tipo di quella precedente, come subito vediamo. Infatti in questo caso l'equazione differenziale per il movimento diviene

$$\dot{x}(t) = \alpha\, t\ . \tag{1.2.6}$$

Si noti per inciso che questa è una equazione differenzale molto più semplice della precedente, perché questa volta il secondo membro non dipende dalla incognita $x(t)$, ma è una funzione nota della variabile indipendente t. Questo significa banalmente che della funzione incognita $x = x(t)$ conosciamo esplicitamente la derivata, ovvero, nella terminologia introdotta sopra, che il movimento è una primitiva della funzione assegnata αt. La soluzione generale risulta dunque essere

$$x(t) = \alpha\, t^2/2 + c\,, \tag{1.2.7}$$

in cui la costante arbitraria appare sotto forma additiva e non moltiplicativa. Ponendo $t = 0$ nella relazione precedente si trova allora $x(0) = c$, sicché la soluzione generale prende la forma

$$x(t) = \alpha\, t^2/2 + x(0)\ . \tag{1.2.8}$$

Dunque la condizione iniziale $x(0) = 0$ non comporta alcun problema, perché essa semplicemente seleziona, fra tutte le soluzioni, la soluzione particolare $x(t) = \alpha t^2/2$. La legge di Galileo fu dunque trovata perchè logicamente corretta e semplice. La circostanza poi che tale legge risulti conforme all'esperienza (almeno l'esperienza idealizzata in cui si rimuovano gli attriti, le resistenze con l'aria e così via) appare quasi come in miracolo. Se questa è la situazione riguardo alla prima scoperta di una legge fisica, non meraviglierà allora trovare che Einstein stesso si esprimesse sostanzialmente nello stesso modo a proposito della legge fondamentale della relatività generale, che egli afferma di avere determinato seguendo i due principi di coerenza matematica e di semplicità, trovando poi miracoloso che essa si conformasse alla realtà, come ben si vede dalla citazione riportata sopra.

> *Intermezzo (ancora da scriversi). Newton* Principia *Lemma X (pag. 34 UCP) metodo grafico uguale a quello di Galileo per integrare la velocità anche per forze non costanti.*

> *Intermezzo (da scriversi): Visualizzazione del movimento (troppo rapido nella caduta libera): il piano inclinato (e il caso limite di inclinazione nulla)*

1.2.5 Il problema del determinismo, e le condizioni iniziali.

Veniamo ora a un altro aspetto alquanto significativo della legge dei gravi. Si tratta del fatto che la "vera" legge del moto si esprime non come legge sulla velocità, ma come legge sull'accelerazione. Cominciamo con l'osservare che se è nota la legge sulla velocità nella forma $v(t) = \alpha\, t$, allora si trova, per derivazione, la legge sull'accelerazione, evidentemente nella forma $a(t) = \alpha$ (moto uniformemente accelerato). Ma queste due leggi $v(t) = \alpha t$, $a(t) = \alpha$ (rispettivamente sulla velocità e sull'accelerazione) non sono equivalenti. La differenza si presenta in relazione al problema di quante condizioni iniziali esse richiedono per *determinare* il movimento. Infatti la legge $v(t) = \alpha t$ comporta $v(0) = 0$, e quindi non può descrivere la situazione generale in cui il grave ha inizialmente una generica velocità v_0, cioè, come si dice, soddisfa la *condizione iniziale* $\dot{x}(0) = v_0$ con v_0 (dato iniziale) arbitrario. Invece, dalla legge $a(t) = \alpha$, ovvero $\dot{v}(t) = \alpha$, risalendo all'indietro si ottiene $v(t) = \alpha t + \beta$ con β arbitraria. Essendo poi $\beta = v(0)$ (come si calcola col porre $t = 0$ in quella relazione), si ottiene dunque in questo secondo caso la legge $v(t) = \alpha t + v(0)$, che bene descrive la situazione generale in cui si assegna la condizione iniziale $v(0) = v_0$ con v_0 arbitraria. Questa relazione può leggersi anche nella seguente forma significativa,

$$v(t) - v(0) = \alpha t\,, \tag{1.2.9}$$

nella quale be si coglie la generalizzazione rispetto alla (1.2.5), $v(t) = \alpha t$, corrispondente al caso $v(0) = 0$: la legge afferma che *L'incremento di velocità è proporzionale al tempo trascorso.*

Passando alla posizione, si trova infine che la legge $a(t) = \alpha$ con α fissata corrisponde a un movimento

$$x(t) = \alpha t^2/2 + v(0)t + x(0)\ , \tag{1.2.10}$$

che è dunque determinato da due parametri, ovvero la posizione e la velocità al tempo iniziale. (Si noti per inciso come la necessità di considerare la situazione più generale in cui si assegnano i dati iniziali x_0, v_0 sia coerente con il principio di inerzia (si veda un successivo paragrafo), perché, se in un sistema di riferimento inerziale si ha accidentalmente $v_0 = 0$, allora esiste un altro sistema inerziale in cui la velocità iniziale v'_0 assume un valore arbitrario prefissato.)

Essendo pertanto passati dalla legge sulla velocità alla legge sull'accelerazione, si potrebbe ora pensare di proseguire: come la legge $v(t) = \alpha t$ ci ha condotto per derivazione alla legge $a(t) = \alpha$, così la legge $a(t) = \alpha$ ci dice anche che la derivata dell'accelerazione è nulla, $\dot{a}(t) = 0$, e si potrebbe pensare di assumere quest'ultima come legge fondamentale. Ma questo non va bene per motivi di conformità con l'esperienza, perchè l'equazione $\dot{a}(t) = 0$, pensata come equazione per la incognita $a(t)$, ammette le infinite soluzioni $a(t) = a(0)$ con tutti i possibili valori dell'accelerazione iniziale $a(0)$, e quindi, risalendo all'indietro, si troverebbero i movimenti $x(t) = a(0)t^2/2 + v(0)t + x(0)$; invece, l'esperienza ci dice che l'accelerazione è la medesima per tutti i gravi (la piuma cade come il sasso, se si elimina la resistenza del'aria), circa 9.8 metri/sec^2 (accelerazione di gravità), e inoltre tutti esperimentiamo che il movimento di un corpo è determinato da due condizioni iniziali, che fissano la posizione iniziale e la velocità inziale (si pensi di dare un calcio ad un pallone). Per tale motivo Galileo assume che la legge di moto si esprima nella forma $a(t) =$ costante, dove la costante ha un valore ben preciso, determinato sperimentalmente con metodi di cui qui non ci occupiamo.

Usando notazioni più consuete, orientiamo l'asse verticale verso l'alto e denotiamo con z la corrispondente coordinata cartesiana; inoltre denotiamo con g il modulo del valore sperimentale dell'accelerazione di gravità. Ricordando che l'accelerazione è la derivata seconda della posizione, la legge di Galileo viene allora scritta nella forma

$$\ddot{z}(t) = -g \, . \tag{1.2.11}$$

Questa viene letta come una equazione differenziale del secondo ordine (cioè coinvolgente come derivata massima la derivata seconda) nella funzione incognita $z = z(t)$. La soluzione generale (dipendente da due parametri A, B) è allora

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B \, , \tag{1.2.12}$$

e la soluzione particolare che soddisfa le *condizioni iniziali* $z(0) = z_0$, $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$ corrispondenti ai *dati iniziali* z_0, $\dot{z}_0$ ha infine la forma

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0 \, . \tag{1.2.13}$$

Dunque, l'essenza delle argomentazioni di Galileo può essere riassunta affermando che il moto dei gravi (in caduta verticale; la generalizzazione al moto nello spazio verrà data nel prossimo paragrafo) è governata dall'equazione differenziale del secondo ordine $\ddot{z} = -g$, dove g è una costante, e dunque ogni moto è individuato dall'assegnazione dei dati iniziali z_0 $\dot{z}_0$. In una analisi profondissima del principio di inerzia ne *La science e l'Hypothèse*, Cap. V della edizione Flammarion, Poincaré afferma che è significativo postulare un principio d'inerzia generalizzato nella forma seguente:

> *L'accelerazione di un corpo dipende solo dalla posizione e dalla velocità di quel corpo e dei corpi vicini.*

È questo il cuore del cosiddetto *determinismo laplaciano* sottostante la meccanica classica, riassunto nella celebre frase conclusiva del libro *Saggio sulla teoria delle probabilità* di Laplace, che riportiamo a memoria:

> *"Se vi fosse un Dio così perfetto da conoscere la posizione e la velocità che hanno a un certo tempo iniziale tutte le particelle costituenti l'universo, allora Egli conoscerebbe tutto il futuro e tutto il passato dell'universo."*

Questo enunciato si basa, come è ben noto, sul teorema fondamentale delle equazioni differenziali ordinarie, ovvero il cosidetto *Teorema di esistenza ed unicità*.

1.2.6 La "composizione dei movimenti" e la natura vettoriale della legge del moto.

Veniamo ora al moto del grave nel caso in cui questo sia libero nello spazio (è questa la quarta giornata delle *Due nuove scienze* di Galileo). Qui interviene il "principio d'inerzia": il grave subisce accelerazione (costante) solo nella direzione verticale, mentre la proiezione su un piano orizzontale compie un moto per inerzia, ovvero un moto rettilineo uniforme.[10] In questo senso si usa dire che Galileo considera due movimenti indipendenti, che poi compone. In termini moderni, parliamo di natura vettoriale del moto. Anzitutto, fissata un'origine O nello spazio, la posizione di ogni punto P è individuata da un vettore $\mathbf{x}$, che possiamo decomporre rispetto a tre assi cartesiani ortogonali, scrivendo

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{1.2.14}$$

con riferimento a tre vettori ortonormali (versori ortogonali) **i**, **j** **k**. Allora il movimento è descritto da una funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ da R in R^3. Si osserva che si possono derivare le funzioni vettoriali esattamente come si derivano le funzioni da R in R (Basta avere la nozione di differenza di vettori, e la nozione che un vettore dipendente da un parametro tende a zero quando la sua lunghezza tende a zero; un modo equivalente per definire la derivata di un vettore è attraverso le derivate delle componenti.)

Poiché si postula che l'accelerazione di gravità si esercita solo verticalmente, mentre il moto orizzontale è imperturbato (nel senso del principio di inerzia, cioè nel senso che è la velocità che resta inalterata), allora la legge del moto dei gravi si scrive nella forma

$$\ddot{\mathbf{x}} = -g\mathbf{k}\,, \tag{1.2.15}$$

o equivalentemente, in componenti.

$$\ddot{x} = 0\,, \ddot{y} = 0\,, \ddot{z} = -g\,. \tag{1.2.16}$$

Assegnate le condizioni iniziali

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}\ ,\ \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v_0}\ , \tag{1.2.17}$$

dove $\mathbf{x_0}, \mathbf{v_0}$ (*dati iniziali*) sono dei vettori arbitrari, avremo dunque la soluzione

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x_0}, \mathbf{v_0}) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} + \mathbf{v_0}t + \mathbf{x_0}\ . \tag{1.2.18}$$

Se in particolare si scelgono gli assi in modo che il piano x, z sia quello individuato dai due vettori $\mathbf{x_0}, \mathbf{v_0}$ (supposti indipendenti, cioè non paralleli), il moto si svolgerà nel piano x, z (ovvero sarà $y(t) = 0$) e si avrà la decomposizione

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + z_0\ ,\ x(t) = \dot{x}_0 t + x_0\ ,\ y(t) = 0\ , \tag{1.2.19}$$

[10] Si tratta qui di una ulteriore generalizzazione rispetto al passaggio dalla (1.2.5), $v(t) = \alpha t$, alla (1.2.9), $v(t) - v(0) = \alpha t$. Qui si assume che l'incremento della componente verticale della velocità, in un dato tempo, sia indipendente anche dalla componente orizzontale della velocità.

e la traiettoria nel piano di moto x, z risulta una parabola. Basta infatti a tal fine eliminare il tempo t tra le due funzioni $z = z(t)$, $x = x(t)$ date sopra.

Esercizio. *Si legga la quarta giornata delle Dimostrazioni, in cui Galileo discute il moto dei proiettili. Si osservi il modo in cui egli dimostra che ls traiettoria è una parabola, senza potere disporre dei metodi analitici che abbiamo impiegato nella nostra deduzione, oggi standard, consistente nella eliminazione del tempo nella descrizione analitica del movimento.*

Appendice: soluzione dell'equazione $\dot{x} = \beta x$ mediante il metodo di Eulero

Riportiamo il seguente argomento, sviluppato in maniera euristica. Si tratta del cuore del fondamentale metodo di Eulero per la soluzione approssimata di una equazione differenziale ordinaria $\dot{x} = v(x)$ con una assegnata funzione $v = v(x)$; nel nostro caso, $v(x) = \beta x$. Volendo determinate il valore della soluzione x al tempo t, conoscendone il valore x_0 al tempo zero, $x_0 = x(0)$, discretizziamo il tempo nell'intervallo $[0,t]$ dividendo tale intervallo in n subintervalli di ampiezza $\tau = t/n$, sicché abbiamo i tempi $0, \tau, 2\tau, \cdots, n\tau = t$, ovvero $t_i = i\tau$ $(i = 0, \cdots, n)$. In corrispondenza avremo i valori $x_0, x_1, \cdots, x_n$ con $x_i = x(t_i)$, e vogliamo costruire dei corrispondenti valori approssimati $\tilde{x}_i$. Il metodo di Eulero consiste nel sostituire il movimento $x(t)$ (che è una curva nel piano x,t) con una successione di moti rettilinei uniformi (successione di segmenti, cioè una spezzata, nel piano x,t) aventi velocità quella relativa all'estremo sinistro di ogni intervallo:

$$\tilde{x}_o = x_0 \; , \; \tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-1} + v(\tilde{x}_{i-1})\tau \; .$$

Nel nostro caso si ha

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-1} + \beta\tau\tilde{x}_{i-1} = \tilde{x}_{i-1}\,(1 + \beta\tau) \; .$$

Dunque, iterando, per l'approssimazione n–esima $\tilde{x}^{(n)}(t)$ di $x(t)$ corrispondente alla suddivisione in n intervalli troviamo

$$\tilde{x}^{(n)}(t) = x_0\,\big(1 + \frac{\beta\tau}{n}\big)^n \; .$$

Ci si imbatte così nella espressione che, quando $n \to \infty$, ha come limite, nel caso $\beta\tau = 1$, il numero di Nepero $e = 2.71...$, e in generale $e^{\beta\tau}$. Per una bellissima discussione di come tale successione si presentò a Jacopo Bernoulli (circa 1700) nel problema dell'interesse composto continuo, e una discussione delle sue proprietà, si veda [TOE], pagg. 24 seg. Nel nostro caso, si trova in tal modo la soluzione $x(t) = x_0 e^{\beta t}$ per l'equazione differenziale $\dot{x} = \beta x$. Viceversa, è poi evidente (almeno a livello euristico) che la derivata di $x(t) = e^t$ è ancora proprio e^t stessa. Infatti, costruendo il rapporto incrementale della funzione $x(t) = e^t$ si trova

$$\frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} = \frac{e^{t+\tau} - e^t}{\tau} = e^t\,\frac{e^\tau - 1}{\tau} \; .$$

Ricordando poi l'appossimazione di e all'ordine n data sopra, e ricordando la formula per il binomio di Newton, si ha

$$e^\tau \simeq (1 + \frac{\tau}{n})^n = 1 + \tau + a_{2,n}\tau^2 + a_{3,n}\tau^3 + \cdots + (\frac{\tau}{n})^n$$

con opportuni coefficienti $a_2, a_3, \cdots$ che qui non ci interessano, e si trova così

$$\frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau} \simeq \frac{\tau + a_2\tau^2 + a_3\tau^3 + \cdots}{\tau} = 1 + a_1\tau + \cdots \; .$$

Pertanto, con la consueta regola elementare di calcolare la derivata ponendo $\tau = 0$ nello sviluppo del rapporto incrementale in potenze di τ si trova il risultato: se $x(t) = e^t$, allora $\dot{x}(t) = x(t)$. Naturalmente, è poi significativo completare questo argomento euristico e ritrovare la dimostrazione completa riportata in tutti i testi universitari. È anche interessante osservare che dall'espressione approssimata sopra riportata per e^τ si trova facilmente lo sviluppo dell'esponenziale in serie di potenze, ovvero

$$e^\tau = \sum_0^\infty \frac{\tau^k}{k!} \, .$$

A tal fine, basta infatti esprimere i coefficienti $a_{k,n}$ in termini dei noti coefficienti binomiali di Newton e valutarne il limite per $n \to \infty$.

Per quanto riguarda Galileo, non abbiamo ancora trovato il tempo di leggere il capitolo 3 a lui dedicato da Pólya nel suo libro *Metodi matematici per l'insegnamento delle scienze fisiche*, che probabilmente è molto interessante. Naturalmente, è molto interessante anche quanto dice Mach nel suo libro *La meccanica* ...

1.3 Copernico, Galileo, Keplero e Newton

1.3.1 Introduzione.

Nel precedente paragrafo abbiamo mostrato come il contributo di Galileo, opportunamente estrapolato, possa essere riassunto nelle seguenti due affermazioni:

- 1) sui gravi (nel vuoto) viene esercitata una azione che fa sì che la loro accelerazione $\mathbf{a}$ sia costante (indipendente dal posto e dal tempo), precisamente data da
$$\mathbf{a} = -g\mathbf{k} \,,$$
dove g è una costante (accelerazione di gravità), uguale per tutti i gravi, e $\mathbf{k}$ è il versore verticale, rivolto verso l'alto;

- 2) tale assegnazione del campo di accelerazioni determina il movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, come soluzione dell'equazione differenziale del secondo ordine
$$\ddot{\mathbf{x}} = -g\mathbf{k} \,,$$
(si deve ricordare che l'accelerazione è la derivata seconda del movimento, $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t)$), il moto essendo determinato da assegnate condizioni iniziali, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$ relative ai dati iniziali $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$).

È chiaro che questa estrapolazione possa apparire un poco eccessiva. Questa impressione viene però almeno ridotta se si va direttamente ad osservare come nei *Principia* Newton stesso, dopo avere enunciato le sue tre leggi, con magnanimità attribuisce senz'altro le prime due a Galileo. Questo è proprio quanto fatto qui sopra, almeno in relazione al campo di accelerazione costante.

> Intermezzo*: citazione di Galileo da parte di Newton,* Axioms, or Laws of Motion: Scholium *(pag. 21 dell'edizione University of California Press), traduzione dal latino di Motte.*
>
> *Hitherto I have laid down such principles as have been received by mathematicians, and are confirmed by abundance of experiments.* By the first two Laws *and the first two Corollaries Galileo discovered that the descent of bodies varied with the square of the time (in duplicata ratione temporis) and that the motion of projectiles was in the curve of a parabola ...*[11]

Scopo del presente paragrafo è di mostrare come analogamente la fenomenologia dei moti planetari (letta attraverso Copernico e Keplero) abbia condotto Newton

[11] Nelle successive 11 righe Newton descrive la fenomenologia del moto dei gravi, e poi passa a ricordare le esperienze sui pendoli compiute da Wren, Wallis e Huygens, e infine descrive le sue proprie esperienze sui pendoli, con le quali conferma la terza legge (pag. 25).

ad affermare che i moti dei pianeti attorno al Sole debbano essere riguardati[12] come soluzioni particolari dell'equazione differenziale

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{C_S}{r^2}\frac{\mathbf{x}}{r}, \tag{1.3.1}$$

dove C_S è una costante caratteristica del Sole. (Qui, sequendo Copernico, per individuare la posizione del pianeta P si considera un sistema di riferimento avente per origine il Sole S, e si è introdotto il vettore $\mathbf{x} \equiv SP \equiv (P-S)$, mentre $r := |\mathbf{x}|$ è il suo modulo.) Il Sole esercita dunque su ogni pianeta una azione acceleratrice che lo fa deviare dal suo moto naturale rettilineo uniforme, producendo una accelerazione che è diretta dal pianeta verso il Sole (infatti il versore, o vettore unitario, $-\mathbf{x}/r$ punta dal pianeta verso il Sole) ed è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Dunque, mentre nel caso della caduta dei gravi si aveva una accelerazione costante (indipendente dal posto), qui si ha invece propriamente un *campo di accelerazioni*, ovvero una accelerazione dipendente dal posto. Vedremo anche come la mitica esperienza della "mela di Newton" debba leggersi come descrivente uno dei passaggi cruciali della storia della scienza, ovvero il momento in cui fu trovata la fondazione teorica per l'uguaglianza di fenomeni terrestri e fenomeni celesti, già fortemente predicata da Galileo su base osservativa (satelliti di Giove, fasi di Venere, montagne della Luna). Infine, metteremo in luce come la legge del moto di Newton (1.3.1) abbia costituito il primo forte esempio di predizione teorica. Infatti, mentre essa fu indotta sulla base della fenomenologia dei moti ellittici dei pianeti, si trova poi che, letta come equazione differenziale, essa predice anche moti con traiettorie paraboliche ed iperboliche.

> *Ribadiamo questo fatto. L'osservazione dei moti planetari – mediata dalla interpretazione di Keplero – riguarda movimenti con orbite ellittiche, e da queste Newton induce l'esistenza di un ben particolare campo di accelerazioni (che leggeremo in seguito come corrispondente a un campo di forze) "prodotto" dal Sole: è questo il cosiddetto* problema inverso*: indurre il campo di forze (o di accelerazioni) dal moto. Newton legge allora l'esistenza del campo di accelerazioni come definente una equazione differenziale per i movimenti* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$*, le cui soluzioni sono determinate da condizioni iniziali* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$*,* $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$ *corrispondenti ai dati iniziali* $\mathbf{x}_0$*,* $\mathbf{v}_0$*. Newton scopre allora, risolvendo l'equazione differenziale, che i dati iniziali con energia negativa forniscono i già noti moti ellittici, mentre i dati con energia nulla o positiva conducono a moti con orbite rispettivamente paraboliche e iperboliche: è questo il cosiddetto* problema diretto*: dedurre il moto dal campo di forze (o di accelerazioni).*

Infine, anticipando la discussione delle forze e del principio di azione e reazione (che verrà svolta più avanti), mostreremo come il campo di accelerazioni corri-

[12] Almeno in prima approssimazione, ovvero quando si trascura la loro mutua interazione, e quando si identifica la massa dei pianeti con la loro massa ridotta.

spondente alla legge (1.3.1) debba leggersi come corrispondente ad un “campo di forze”, precisamente il campo di forze gravitazionali “prodotto” da un punto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{x}}{r}\,, \tag{1.3.2}$$

dove G è una costante (di gravitazione universale) ed m_1, m_2 la massa del punto attraente e quella del punto attratto.

1.3.2 Premessa: quello che si osserva è geocentrico: Copernico e Galileo.

Tutti conosciamo la rivoluzione copernicana e abbiamo visto fin da bambini la famosa figura in cui il Sole si trova al centro e i pianeti gli ruotano intorno, a diverse distanze: i pianeti “interni” Mercurio e Venere, la Terra, poi i pianeti “esterni” (gli asteroidi)[13], Marte, Giove, Saturno, e infine i “pianeti nuovi” Urano, Nettuno e Plutone.[14] Vorremmo però mettere in luce come proprio qui ci si trovi di fronte, si potrebbe dire, a una grande mistificazione, a una assoluta banalizzazione di quella che in effetti è una delle più grandi scoperte della storia dell’umanità. Il fatto è che, mentre tutti hanno visto quella figura, sono davvero poche le persone (a tutti i livelli sociali) che si rendano conto del fatto che essa è una trasposizione immaginaria (rappresenta quello che vedremmo se ci trovassimo sul Sole) di fenomeni che effettivamente vediamo dalla Terra. Quello che vogliamo dire è che moltissime persone non sono invece coscienti di quello che si vede dalla Terra. Da questo punto di vista, poco importa che quelle persone credano una cosa che risulta essere giusta; il fatto è che, poiché non ci si rende per nulla conto di quello che fattualmente si vede (o si potrebbe vedere), allora allo stesso modo si potrebbero credere giuste cose che invece sono completamente false.[15] Ci permettiamo dunque di indicare alcuni richiami assolutamente elementari su quello che effettivamente si vede dalla Terra.

[13] Il primo fu osservato dall’abate Piazzi, la notte di capodanno (o di Natale ?) del 1800. Si ricordi il contributo di Gauss, che trovò un metodo concreto per determinare la posizione successiva dell’asteroide in base a idati di Piazzi, che non aveva più potuto seguirlo a causa del cattivo tempo.

[14] Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno sono i “pianeti classici”, che, in aggiunta alla Luna e al Sole, costituiscono i sette classici corpi erranti della sfera celeste. Il primo pianeta più esterno, Urano (già osservato, ma classificato tra le stelle fisse), fu per la prima volta identificato come un pianeta da William Herschel nel 1781. Successivamente, l’orbita di Urano fu calcolata da Bouvard nel 1821, e nel 1845 si notò che l’orbita effettiva deviava molto fortemente (addirittura 2 gradi, che in meccanica celeste è una quantità enorme) dall’orbita kepleriana. Subito dopo, nel 1846, Adams e Le Verrier eseguirono dei calcoli perturbativi che attribuivano tali effetti a un altro pianeta, Nettuno, e questo sulla base delle loro indicazioni venne osservato da Galle il 23 settembre 1846. Plutone venne invece osservato in maniera del tutto indipendente, in effetti casualmente, molto più tardi, attorno al 1930.

[15] Nella scienza, un fenomeno analogo avviene per la chimica. Tutti hanno visto, o piuttosto hanno subito, le formule chimiche per le varie reazioni, e anche hanno visto la tabella di Mendeleev, ma non molti hanno di fatto visto che cosa sia concretamente una reazione chimica o capito che gli elementi davvero esistono. Questo è il motivo per cui la chimica condivide con la matematica il primato della disaffezione da parte degli studenti.

Per quanto riguarda il cosiddetto “moto diurno” (cioè giornaliero, ovvero della durata di un giorno) non dovrebbero esserci problemi: il Sole nasce ad Est e cala ad Ovest, e così vediamo fare, durante la notte, le stelle; questo fatto lo interpretiamo dicendo che le stelle sono fisse e la Terra ruota in un giorno attorno a un asse passante grossomodo per la stella polare (e per il centro della Terra)[16]. Dunque prescindiamo dal moto diurno (questo concetto ideale di prescindere dal moto diurno viene materializzato concretamente negli osservatori astronomici, montando i telescopi su apparati che ruotano in maniera opportuna). Naturalmente, già questa è una altissima immaginazione, perché sarebbe molto più spontaneo pensare che la “sfera celeste” ruoti attorno a un asse passante per la Terra, essendo la Terra “fissa” in qualche “spazio assoluto”.

Il primo fatto è allora che, rispetto alle stelle fisse (cioè che appaiono fisse in un sistema in cui si prescinda dal moto diurno), osserviamo che vi sono corpi che si muovono: la Luna (che compie un giro in circa 28 giorni), il Sole, che compie un giro in circa un anno) e i cinque pianeti classici, ovvero i due interni rispetto alla Terra (ovvero Mercurio e Venere – periodi circa 3 mesi e circa sei mesi) e i tre esterni (Marte, Giove, Saturno - periodi circa 3, 12 e 30 anni). Il moto delle Luna è il primo che effettivamente si osserva in maniera semplicissima. Svolgiamo infatti il seguente semplicissimo

Esercizio. *Osserviamo il bordo destro del disco lunare quando si trova a contatto con una stella. Teniamo presente che il disco lunare occupa circa mezzo grado*[17]*. Sapendo (per osservazione comune) che la Luna gira attorno alla Terra in circa un mese, calcolare quanto tempo impiega il disco lunare per superare la stella.*

Si troverà che la risposta è di circa un'ora.[18] Viceversa, da questa osservazione, che si può effettivamente compiere in un'ora, segue che la Luna impiega circa un mese per girare attorno alla Terra, come in effetti pure si osserva.

Esercizio. *Comprendere la fenomenologia delle fasi lunari.*

Esercizio. (serve per capire l'importanza della scoperta delle fasi di Venere da parte di Galileo) *Si compia l'analogo esercizio per un corpo che ruota, anziché attorno alla Terra, attorno ad un punto (*deferente*) che si trovi: caso 1) tra la Terra e il Sole, oppure caso 2) oltre il Sole oppure, caso 3) nel Sole.*

Il risultato che si trova può essere, in una prima approssimazione, descritto come segue: nel primo caso il corpo presenta due fasi “nuove” anziché una nuova e una “piena”; nel secondo caso, due fasi piene; nel terzo caso una fase nuova e una piena, proprio come nel caso della Luna che ruota attorno alla Terra.

Ci siamo permessi di insistere su queste cose elementarissime, perché se non si compie una esperienza come quella di svolgere gli esercizi sopra citati non sarà possibile capire nulla di Copernico, Galileo, Newton. In particolare, la comprensione delle fasi della Luna è importante anche in relazione al fatto che Galileo nei

[16] Newton, nei *Principia*, dedica molto spazio a spiegare questo fatto.

[17] Quasi esattamente come il Sole. Per questo motivo sono possibili le eclissi totali di Sole e di Luna.

[18] 360 gradi in circa 30 giorni vuol dire circa 12 gradi in un giorno, overo 0.5 gradi in un'ora.

Dialoghi insiste ripetutamente sull'importanza della osservazione da lui fatta che Venere presenta delle fasi, proprio come quelle della Luna (*Cynthiae figuras aemulatur mater amorum*)[19], mentre Marte, Giove e Saturno non ne presentano affatto. Galileo fa notare che questo fatto è il punto cruciale che "dimostra" la correttezza della teoria copernicana. Senza questi fatti di osservazione la teoria copernicana sarebbe solo più semplice di quella tolemaica, e non "provata", e proprio per questo Galileo si dice ammirato (si veda la terza giornata dei *Dialoghi*) di come Copernico possa essere stato capace di sostenere la sua teoria, pur non possedendo la prova essenziale dovuta all'osservazione delle fasi di Venere. Secondo Galileo, dunque, questo fatto riguardante le fasi di Venere è il punto cruciale per convalidare la teoria copernicana.

Gli altri fatti estremamente rilevanti sono i seguenti.

- *1) La coincidenza del numero delle retrogradazioni (nei pianeti esterni, si veda più avanti) con il loro periodo espresso in anni terrestri. Infatti nella teoria tolemaica questa coincidenza è puramente accidentale, mentre nella teoria copernicana essa viene* spiegata *– perché le retrogradazioni sono attribuite al fatto che mentre il pianeta esterno compie un suo periodo attorno al Sole, la Terra (dalla quale il moto del pianeta viene osservato) compie attorno al Sole tante oscillazioni quanto è il periodo del pianeta espresso in anni terrestri.*[20]
- *2) Il fatto che il periodo dei pianeti cresce man mano che ci si allontana dal Sole, ma quando poi ci si allontana ancora, fino a giungere alla sfera delle stelle fisse, la "macchina celeste" ha una improvvisa incredibilmente grande accelerazione (o meglio decelerazione), e il periodo diventa improvvisamente solo di un giorno. Questa grandissima accelerazione, riguardata come un fatto fisico, pare a Galileo poco probabile. Nella visione copernicana, invece, i due meccanismi sono "sganciati", perché il moto diurno del cielo delle stelle fisse viene attribuito alla rotazione propria della Terra attorno al proprio asse.*

Secondo Galileo, vi sarebbe poi una ulteriore prova della bontà della teoria copernicana, e questa consisterebbe in una spiegazione delle maree, che egli presenta nella quarta giornata dei Dialoghi. *Tuttavia tale spiegazione viene ordinariamente considerata non corretta. Infatti, come è ben noto, si ritiene che la fenomenologia delle maree venga*

[19]E inoltre l'altra osservazione riguardante Venere, ovvero che le sue dimensioni variano moltissimo dalla fase di Venere nuova alla fase di venere piena.

[20]Analogamente, nella teoria tolemaica è accidentale il fatto che Mercurio e Venere appaiano, nella volta celeste, sempre prossimi al Sole. Invece nella teoria copernicana questo fatto viene "spiegato" o meglio addirittura assunto, perché si assume che essi ruotino attorno al Sole su raggi più piccoli di quelli della Terra, e questo fa sì che dalla Terra essi appaiano sempre prossimi al Sole.

> *spiegata dall'ifluenza delle attrazioni gravitazionale anzitutto da parte della Luna e poi del Sole (si veda Mach,* La meccanica *..., o meglio direttamente Newton – vedi avanti).*[21]

Tornando alla descrizione di quello che si osserva dalla Terra, ricordiamo che, dopo la Luna, l'oggetto celeste di cui meglio si osserva il movimento è Venere.[22] Esso, come Mercurio (che però è alquanto difficile da vedere, perchè situato troppo vicino al Sole[23]), è un pianeta interno, cioè si trova situato, nella descrizione copernicana, tra il Sole e la Terra. Fenomenologicamente (cioè per quanto riguarda le osservazioni dalla Terra), ciò vuol dire semplicemente che esso è in qualche modo sempre "attaccato" al Sole, cioè non si scosta mai dal Sole oltre un certo angolo, circa 47 gradi.[24] In altri termini, sulla sfera celeste basta individuare il Sole, e lì vicino allora si trova anche Venere. Più precisamente, poiché il Sole paradossalmente *oscura i pianeti e le stelle* – dato che la sua luce sovrasta quella degli altri oggetti – , allora per vedere Venere, come qualunque altro oggetto celeste, si deve attendere il tramonto, cioè che il Sole sia calato a Ovest (nel periodo in cui Venere gli sta a sinistra) o si deve compiere l' osservazione prima dell'alba, cioè prima che il Sole sorga ad Est (nel periodo in cui Venere sta a destra del Sole). Per questo motivo Venere è nota fin dall'antichità come stella della sera (quando la si osserva al tramonto) e stella del mattino (lucifero, ovvero portatore della luce).[25][26]

Esercizio. *Sapendo che la massima elongazione di Venere dal Sole è di* 47 *gradi, di*

[21] Questa imprecisione di Galileo potrebbe essere spiegata dal fatto che egli viveva in Italia, paese mediterraneo, anziché in un paese nordico. Infatti nei paesi nordici, in cui le maree toccano anche gli 8 metri e quindi si vedono molto concretamente e i marinai ne debbono tenere ben conto, anche un comune turista, guardando le tabelle dei massimi e dei minimi che sono esposte ovunque, si rende subito conto che i massimi si hanno in corrispondenza del passaggio della Luna sul meridiano locale.

[22] Sarebbe opportuno familiarizzarsi prima con il moto annuo del Sole attraverso lo Zodiaco, ma forse il moto di Venere si impone maggiormente all'evidenza.

[23] Si narra che Copernico, poco prima di morire, si rammaricasse di non avere mai potuto vedere egli stesso Mercurio.

[24] Ai tempi di Galileo, il numero 47 non era ancora ben determinato, e ci si riferiva a un numero un poco superiore a 40. Infatti, già Giordano Bruno, ne *La cena de le ceneri*, dialogo terzo, così si esprime: *... eccetto se fusse qualcuno tanto ignorante de l'optica e la geometria, che creda, che la distanza di quaranta gradi e più, la quale acquista Venere discostandosi dal Sole or da l'una or da l'altra parte, sii caggionata dal movimento suo ne l'epiciclo....* E così anche Galileo, nella terza giornata dei *Dialoghi* (pag. 388 della edizione Einaudi 1970) fa dire a Simplicio: *Posto che siano vere le apparenze narrate da voi ..., cioè che tale stella non si discosti mai dal Sole oltre a certo determinato intervallo di 40 e tanti gradi ...*

[25] Il periodo di Venere rispetto alla Terra è di circa nove mesi. Si potrebbe immaginare che per metà di tale periodo Venere di veda al tramonto, e per metà all'alba. Si ha invece una forte asimmetria nei tempi, dovuta al fatto che la Terra si sposta, nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, nella stessa direzione di Venere (come anche di tutti gli altri pianeti.)

[26] Un altro fatto rilevante su cui insiste moltissimo Galileo, è la diversa grandezza di Venere nelle sue varie fasi. Ciò naturalmente è dovuto al fatto che le due orbite di Venere e della Terra sono molto vicine, sicchè la loro distanza relativa ha cambiamanenti molto grandi passando dalla situazione in cui i due pianeti sono dalla stessa parte rispetto al Sole (congiunzione inferiore) a quella in cui sono da parti opposte (congiunzione superiore).

deduca quale è la distanza di Venere dal Sole (in unità astronomiche, cioè ponendo uguale ad 1 la distanza Terra–Sole). [27] [28]

Invece i pianeti esterni sono caratterizzati dal fatto che lungo l'eclittica (la circonferenza lungo la quale essi si muovono sulla sfera celeste, come anche il Sole e pressappoco la Luna) essi sono del tutto "sganciati dal Sole"[29], e compiono dei giri completi ciascuno con un proprio periodo: circa tre anni Marte, dodice Giove, trenta Saturno (rispetto al Sole). La loro caratteristica principale è che loro orbite compiono delle *retrogradazioni*, cioè traslano in modo praticamente uniforme lungo l'eclittica in una direzione fissata, ma di tanto in tanto si fermano e tornano indietro, per poi rifermarsi e tornare a muoversi in avanti. Ora, il punto essenziale è che per ogni pianeta esterno il numero di retrogradazioni è praticamente coincidente con il suo periodo di rivoluzione attorno al Sole, espresso in anni terrestri. Abbiamo già indicato più sopra che questa coincidenza appare come completamente fortuita nella teoria tolemaica, mentre nella teoria copernicana essa viene spiegata come dovuta al fatto che l'osservatore, trovandosi sulla Terra, compie egli stesso, durante un periodo del pianeta esterno, proprio tante oscillazioni quanto è il periodo del pianeta in anni terrestri.[30]

> *Questa differenza osservativa tra pianeti interni e pianeti esterni, i primi agganciati al Sole, gli altri sganciati, fa comprendere come mai il grande Tycho Brahe (maestro di Keplero) avesse un proprio sistema in cui tutto girava attorno alla Terra (come nel sistema tolemaico), tranne i pianeti interni che girerebbero intorno al Sole (come nel sistema copernicano).*[31]

[27] Si osservi che, alla massima elongazione dal Sole, Venere è *in quadratura*, nel senso che il triangolo Terra–Venere–Sole è retto in Venere. Allora si usa la trigonometria elementare e, presa uguale ad uno la distanza Terra–Sole (detta *unità astronomica*), per la distanza Sole–Venere d si trova $d = \sin 47^0$.

[28] Si osservi che nel calcolo appena eseguito si è fatto esplicito uso dell'ipotesi che Venere ruoti su un cerchio avente centro nel Sole (cioè, in termini tolemaici, che il deferente di Venere sia il Sole). Questa è proprio l'essenza stessa della teoria copernicana. Nella teoria toelmaica, Venere ruota invece attorno a un centro esterno al Sole (cioè attorno a un centro che ruota esso stesso su una circonferenza esterna al Sole), a una distanza non conosciuta.

[29] Ovvero, essi non soltanto vengono a trovarsi *in congiunzione* con il Sole, ma anche si trovano *in opposizione* al Sole. Invece i pianeti interni Merucurio e Venere vengono in congiunzione e *in quadratura*, ma mai in opposizione.

[30] Vi è poi un'altra coincidenza che si presenta come fortuita nella teoria tolemaica. Si tratta del fatto che i pianeti interni, Mercurio e Venere, sono assunti ruotare su circonferenze (epicicli) aventi centri che ruotano essi stessi su delle circonferenze (deferenti) centrati sulla Terra, con la proprietà però che i centri restano allineati col Sole (altrimenti i due pianeti non potrebbero restare sempre vicini al Sole). Nella teoria copernicana, invece, (esprimendosi in termini tolemaici) si assume che i centri degli epicicli di Mercurio e Venere coincidano con il Sole stesso, ovvero, come si dice ordinariamente, si assume che i pianeti (tutti: quelli interni, quelli esterni e la Terra) abbiano per centro il Sole.

[31] A proposito del sistema tolemaico, si osservi che Galileo fa notare ripetutamente come esso sia messo in crisi dalla osservazione da lui fatta dei satelli medicei di Giove. Infatti, anche nel sistema tolemaico (in cui tutto dovrebbe girare attorno alla Terra) si deve ammettere che esiste qualcosa che non gira attorno alla Terra: si tratta dei satelliti medicei, che in ogni caso girano attorno a Giove.

Esercizio. *Cercare di immaginare come si possa determinare la distanza dal Sole di un pianeta esterno (Marte, Giove, Saturno).*[32]

È interessante riportare il modo in cui Newton descrive una parte rilevante della fenomenologia dei pianeti classici, in *Principia, Book Three: System of the World, Vol II, pag. 403*

PHENOMENA

That the five planets Mercury, Venus, Mars, Jupiter and Saturn, with their several orbits, encompass the sun

> *That Mercury and Venus revolve about the sun, is evident from their moon–like appearances. When they shine out with a full face, they are, in respect to us, beyond or above the sun; when they appear half full, they are about the same height on one side or other of the sun, when horned, they are below or between us and the sun; and they are sometimes, when directly* under*, seen like spots traversing the sun's disk. That Mars surrounds the sun, is as plain from its full face when near its conjunction with the sun, and from the gibbous figure which it shows in its quadratures. And the same thing is demonstrable of Jupiter and Saturn, from their appearing full in all situations; for the shadows of their satellites that appear sometimes upon their disks make it plain that the light they shine with is not their own, but borrowed from the sun.*

1.3.3 Dalle leggi di Keplero al campo di accelerazioni attorno al Sole.

Tutti sappiamo che dopo lunghissima fatica Keplero giunse a interpretare le osservazioni di Tycho Brahe sui moti planetari riassumendole nelle sue famose tre leggi, ovvero (prendiamo da Levi Civita e Amaldi [II, 51])

1. Le orbite dei pianeti sono ellissi, e il Sole ne occupa uno dei fuochi.

2. Le aree descritte dal raggio vettore che va dal Sole a un pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.

3. I quadrati dei tempi impiegati dai vari pianeti a percorrere le loro orbite (durate delle rivoluzioni) sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori.

In questo ambito, il primo grande contributo di Newton consistette nel riuscire a fornire di tali leggi una lettura matematica: le leggi di Keplero comportano che ogni pianeta (e poi addirittura ogni corpo) subisce da parte del Sole una certa ben definita accelerazione. Qui sta la analogia e la estensione rispetto al contributo di

[32] Suggerimento. Si pensi di osservare la Terra dal pianeta esterno, in modo di ricondursi al caso precedente (calcolo della distanza di un pianeta interno). Nel fare ciò si dovrà tenere conto che è conosciuto il moto del pianeta in studio rispetto als Sole: si assuma un moto circolare uniforme, con velocità determinata dalla conoscenza del periodo. L'esercizio è svolto in una Appendice, non ancora disponibile.

Galileo. La analogia sta nel fatto che le leggi dei moti sono riassunte in maniera condensata attraverso la forma della loro accelerazione; l'estensione consiste nel fatto che ora la accelerazione, invece di essere costante, varia da posto a posto (si tratta dunque propriamente di un *campo* di accelerazioni), è di tipo *centrale* (cioè disposta nella direzione corpo–Sole), con verso diretto verso il Sole, ed inoltre è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Infine, si trova che la costante di porporzionalità costituisce una caratteristica del corpo centrale (il Sole). Il campo di accelerazioni è dunque dato da (con $r = |\mathbf{x}|$)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = -\frac{C_S}{r^2}\,\mathbf{e}_r\,, \quad (\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{x}}{r}). \tag{1.3.3}$$

Inoltre la costante C_S caratteristica del Sole è data, nel caso particolare di moti circolari anziché ellittici, da

$$C_S = 4\pi^2\,\frac{r_0^3}{T_0^2}\,, \tag{1.3.4}$$

dove r_0 e T_0 sono la distanza e il periodo di uno qualsiasi dei corpi gravitanti attorno al Sole; nel caso generale di orbite ellittiche, nella formula (1.3.4) il raggio r_0 va sostituito con il semiasse maggiore a_0 (si spera che non ingeneri confusione il fatto che qui il simbolo a denota – come si fa tradizionalmente – il semiasse maggiore e non l'accelerazione). Si noti bene che i dati osservativi a disposizione di Keplero erano soltanto quelli relativi ai cinque pianeti classici (Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno), mentre la legge (1.3.4) si riferisce a qualsiasi corpo, che si trovi "tra" i pianeti o al di sotto o al di fuori di essi. Questa peculiarità è dovuta al carattere interpolante ed estrapolante della terza legge: il suo aspetto analitico particolarmente semplice induce spontaneamente ad ammettere che la stessa legge valga per un corpo qualsiasi che si trovi ad una distanza qualsiasi r dal Sole.

Newton stesso, prima di determinare la forma analitica del campo di accelerazioni in relazione alle leggi di Keplero nella loro forma completa, che coinvolge orbite ellitiche, ne diede la dimostrazione nel caso semplificato in cui si assume che i pianeti si muovano su circonferenze anziché su ellissi.[33] [34] Seguiamolo dunque anche noi. Si osserva che, se il moto è circolare, la seconda legge si riduce ad affermare che il moto è anche uniforme. Tutti allora sappiamo (vedi alla fine di questo paragrafo) che in tal caso la accelerazione è un vettore diretto dal punto

[33]Scholium precedente la Proposition IV (pag. 45). *Since the equable description of areas indicates that there is a center to which tends the force by which the body is most affected, and by which it is drawn back from the rectilinear motion, and retained in its orbit, why may we not be allowed, in the following discourse, to use the equable description of areas as an indication of a center, about which all* circular *motion is performed in free space?*

[34]Si faccia attenzione a non prendere troppo sul serio il modello di Keplero semplificato (orbite circolari anziché ellittiche): Poincaré ha messo bene in luce (nella *Science et Hypothèse* e nei *Dernières Pensées*) come un modello alla Keplero semplificato preso sul serio porterebbe a leggi fisiche completamente diverse dalle nostre, in cui il movimento è individuato dalla sola posizione e non da posizione e velocità delle particelle. Si veda *Science et Hypothèse*, Cap. VI, pag 114 della edizione Flammarion.

mobile verso il centro della circonferenza e di modulo

$$a(r) = \omega^2 r \equiv \frac{4\pi^2 r}{T^2} .$$

Ma dalla terza legge si ha $T^2/r^3 = T_0^2/r_0^3$ (dove T_0 ed r_0 sono il periodo e il raggio di un qualunque corpo orbitante attorno al Sole), ovvero

$$T^2 = r^3 \frac{T_0^2}{r_0^3} ,$$

sicchè si ha immediatamente la (1.3.3) con la (1.3.4).

Un calcolo analogo vale anche nel caso delle leggi di Keplero complete (cioè per orbite ellittiche). Una versione moderna (non dunque quella originaria di Newton) viene riportata in Appendice.[35]

Se ora assumiamo come dato fenomenologico (in realtà mediato dalle osservazioni di Tycho Brahe lette attraverso Keplero) l'esistenza del campo di accelerazioni (1.3.3), allora possiamo studiare la corrispondente equazione differenziale[36] che si ottiene ricordando che l'accelerazione è la derivata seconda del moto,

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{C_S}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} .$$

Il risultato che si trova è allora il seguente.[37] Anzitutto, la seconda legge e il fatto che il moto sia piano valgono in generale per tutti i campi centrali,[38] cioè per qualunque campo di forze (o di accelerazioni) in cui la forza nel punto $\mathbf{x}$ è parallela al vettore $\mathbf{x}$ stesso (si fa qui riferimento a una origine O fissa, detta centro delle forze o delle accelerazioni). In effetti, con linguaggio moderno, si dimostra immediatamente che per tutti i campi di forze centrali si conserva il vettore momento angolare: da questo fatto segue immediatamente che il moto si svolge in un piano (perpendicolare al vettore momento angolare, il quale è determinato dalle condizioni iniziali). D'altra parte, si vede subito che per dimostrare che il moto è piano basta che sia costante la direzione del momento angolare. Resta dunque da utilizzare anche la conservazione del modulo del momento angolare. Ma si vede immediatamente che il modulo del momento angolare è proporzionale alla velocità areolare. sicché, in conclusione, la seconda legge ha validità generale per tutti i campi di forze centrali.

Se si viene poi a considerare il caso speciale kepleriano (o newtoniano) di campi a simmetria sferica con intensità proporzionale all'inverso del quadrato della distanza, allora si ottiene l'ulteriore risultato che le orbite sono sezioni coniche; più

[35] Non ancora disponibile. Si veda Levi Civita e Amaldi [II, 51]

[36] È questo il cosiddetto *problema diretto*, mentre si intende per *problema inverso* quello di ricostruire il campo di accelerazione quando siano noti i movimenti

[37] Questi fatti sono ben noti dai corsi di Meccanica. Intendiamo richiamare questi risultati in una appendice.

[38] Si veda *Principia*, pag. 40 dell'edizione University of California Press, e una Appendice (non ancora scritta).

particolarmente le orbite sono ellissi nel caso di energia negativa, parabole nel caso di energia nulla e iperboli nel caso di energia positiva.[39]

> **Intermezzo: accelerazione nel moto circolare uniforme.** *In molti testi elementari, la formula dell'accelerazione nel moto circolare uniforme viene dedotta confrontando le velocità in due istanti vicini. Questo naturalmente è corretto, perché corrisponde alla definizione di accelerazione come derivata della velocità. In un certo senso, però, questo procedimento sembra rivelare una certa paura, come se non si fosse sicuri di avere capito la derivata stessa. Infatti la dimostrazione più semplice si ottiene "riconducendosi al caso precedente": basta conoscere la formula per la velocità di un punto in moto circolare uniforme.*
>
> *Ammettiamo dunque di sapere che, se un punto P si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio r e centro O (ad esempio in senso antiorario), allora la sua velocità (derivata della posizione – o meglio del raggio vettore OP) è un vettore* $\mathbf{v}$ *tangente alla circonferenza nel punto P, opportunamente diretto, e di modulo*
>
> $$v = \frac{2\pi r}{T},$$
>
> *se T è il periodo. Meglio ancora, dato che i vettori sono una classe di equivalenza di frecce rispetto al trasporto parallelo, possiamo pensare il vettore* $\mathbf{v}$ *spiccato anch'esso dal centro O della circonferenza, e "girato" di 90 gradi rispetto al vettore posizione OP, in senso antiorario nell'esempio considerato.*
>
> *Più in generale abbiamo dunque dimostrato che, qualunque sia il significato fisico di un vettore, se esso ruota uniformemente (ad esempio in senso antiorario) su una circonferenza di raggio R con periodo T, allora la sua velocità (il suo* rate of growth*) è un vettore che gli sta 90 gradi in avanti e ruota su una circonferenza di raggio*
>
> $$R' = \frac{2\pi R}{T}.$$
>
> *Ora, nel nostro caso il vettore di cui vogliamo calcolare la deerivata è la velocità, che ha il modulo v dato sopra, e dunque il nostro vettore si muove su una circonferenza di raggio v, ruota proprio con periodo T (perché è rigidamente collegato al vettore posizione, che ruota con periodo T): dunque la derivata della velocità (cioè la accelerazione) è un vettore che sta 90 gradi avanti alla velocità (e dunque 180*

[39]si veda *Principia*, Proposizione XVII, pag. 65 della edizione University of California Press.

gradi avanti al vettore posizione - e dunque è allineato con il vettore posizione e di verso opposto) e ha modulo a dato da

$$a = \frac{2\pi v}{T} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \ .$$

Il metodo sopra illustrato è probabilmente quello che di solito viene chiamato metodo dell'odografo (Hamilton); questo potrebbe essere controllato sul testo di Levi Civita e Amaldi. Si osservi che è moltissimo interessante anche il modo in cui Newton dimostra la formula per l'accelerazione nel moto circolare uniforme, in cui egli approssima il moto circolare uniforme con un moto uniforme su un poligono regolare inscritto in una circonferenza. Spero di avere presto occasione per scriverlo in queste note. (si veda Principia *Prop. IV Theor. IV (pag. 46 edizione UCP e il successivo scolio a pag 47)*

1.3.4 L'unificazione dei fenomeni terrestri e di quelli celesti: la mela di Newton.

Abbiamo dunque visto come le leggi di Keplero vengano lette da Newton come indicanti che il Sole produce intorno a sé su tutti i corpi una sollecitazione che si manifesta come una accelerazione, decrescente come l'inverso del quadrato della distanza, la cui intensità è fissata da un fattore C_S, il quale è determinato a sua volta dalla conoscenza di distanza e periodo di un qualunque oggetto che orbiti attorno al Sole. Sappiamo poi che la Terra esercita una sollecitazione sui gravi (e sulle mele), che si manifesta come una ben definita accelerazione, 9,8 m/sec^2. È molto spontaneo quindi immaginare che la sollecitazione esercitata dalla Terra si estenda anch'essa oltre la superficie terrestre, in particolare fino alla Luna, che orbita attorno ad essa analogamente al modo in cui i pianeti orbitano attorno al Sole. L'idea centrale è allora che la intensità della accelerazione prodotta dalla Terra sia determinata, a qualsiasi distanza r dalla Terra, ancora da una legge come quella di Keplero–Newton, solo con una costante C_T caratteristica della Terra, che potrà essere determinata per il fatto che conosciamo la distanza e il periodo della Luna. Se tutto è consistente, dovremmo ritrovare in particolare che, per $r = r_T$ (raggio della Terra), il valore della accelerazione causata dalla Terra coincide con il classico valore di Galileo, $g = 9.8$ metri al secondo quadrato. In questo consiste essenzialmente il mito della mela di Newton.

Newton compie il calcolo nella Proposition IV (pag. 407 dell'edizione UCP), dal titolo *That the moon gravitates towards the earth, and by the force of gravity is continually drawn off from a rectilinear motion, and retained in its orbit.* Anzitutto, conoscendo periodo e distanza della Luna, egli calcola l' a ccelerazione della Luna con la nota formula del moto circolare uniforme $a = 4\pi^2 r/T^2$. Newton assume per la distanza Terra–Luna il valore di 60 raggi terrestri (ben stabilito da una antica consolidata tradizione che va da Tolomeo a Copernico– tranne che per una diversa valutazione di Tycho Brahe, che Newton però corregge), e per il periodo T il valore $27^d\ 7^h\ 43^m$, ovvero .... sec. Per eseguire il calcolo, occorre inoltre conoscere il valore del raggio terrestre (semidiametro, come lo chiama Newton), o equivalentemente il valore della circonferenza terrestre. Newton assume per la circonferenza il valore di 123249600 piedi parigini (*as the French have found by mensuration*[40]). Noi naturalmente possiamo usare come unità il metro, che come si ricorderà venne in seguito introdotto dagli scienziati napoleonici, per definizione, proprio come la quarantamilionesima parte della circonferenza terrestre. La circonferenza terrestre è dunque per definizione 40 milioni di metri, e il raggio terrestre ha dunque il valore di $4 \cdot 10^7/2\pi$, ovvero .... metri. In tal modo, per l'accelerazione della Luna otteniamo il valore di ..... m/sec^2, Dobbiamo ora calcolare l'accelerazione al livello del suolo terrestre. *Wherefore, since the force, in approaching to the earth, increases in the proportion of the inverse square of the distance, and, upon that account, at the surface of the earth, is* $60 \cdot 60$ *times greater than at the moon, a body in our regions* avrebbe una accelerazione di .... m/sec^2,[41]. Newton poi commenta: *And with this very force we actually find that bodies here upon earth do really descend .. (as Mr . Huygens has observed).*

Per il seguito, è utile compiere un calcolo del tutto analogo per determinare il valore della costante C_T della Terra come definito sopra, ovvero

$$C_T = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2},$$

inserendo il periodo e la distanza della Luna.[42] Si trova in tal modo

$$C_T = .. \tag{1.3.5}$$

È molto affascinante leggere come, nel successivo Scholium, Newton descrive questa unificazione tra fenomeni celesti e fenomeni terrestri.

> *Suppose several moons to revolve about the earth, as in the system of Jupiter or Saturn; the periodic times of these moons (by the argument of induction) would observe the same law which Kepler found to obtain among the planets; and therefore their centripetal force would be inversely as the square of the distances from the centre of the earth ... Now, if the lowest of these were very small, and were so near the earth as almost to touch the tops of the highest mountains, the centripetal force thereof, retaining it in its orbit, would be nearly equal to the weights of the terrestrial bodies that should be found upon the tops of those mountains, as may be known by the foregoing computation.*

[40] Newton probabilmente si riferisce alla misurazione di un arco di meridiano terrestre eseguita nel 1682–3 da J. Picard.

[41] Newton dice: *ought, in the space of one minute of time, to describe* $60 \cdot 60 \cdot 151/12$ *Paris feet, or more accurately 15 feet, 1 inch and 1 line4/9.*

[42] O equivalentemente moltiplicando $g = 9.8$ m/sec^2 per il quadrato del raggio della Terra.

> *Therefore if the same little moon should be deserted by its centrifugal force that carries it through its orbit, and be disabled from going onward therein, it would descend to the earth; and that with the same velocity, with which heavy bodies actually fall upon the tops of those very mountains, because of the equality of the forces that oblige them both to descend.*

Un altro punto che Newton discute a questo proposito, in un'altra parte dei *Principia (System of the World*, [3], pag. 551 della edizione UCP, con una bellissima figura), è il moto di un sasso, lanciato da una certa altezza in direzione orizzontale. *That by means of centripetal forces the planets may be retained in certain orbits, we may easily understand, if we consider the motion of projectiles; for a stone that is projected ....* Al crescere della velocità iniziale, il sasso andrà sempre più lontano prima di cadere sulla superficie terrestre, fino a ritornare nella posizione di partenza ed eventualmente lasciare la terra: *We may therefore suppose the velocity to be so increased, that it would describe an arc of 1,2,5,10,100,1000 miles before it arrived at the earth, till at last, exceeding the limits of the earth, it should pass into space without touching it*. Si ha qui dunque il problema della cosiddetta *velocità di fuga*.
Esercizio. *Giustificare la formula per la velocità di fuga.*

1.3.5 Il principio di azione e reazione, la costante di gravitazione universale e la legge gravitazionale di Newton.

Abbiamo dunque visto [43] che è consistente ritenere che la Terra eserciti sulla Luna e sul sasso (o sulla mela) una sollecitazione acceleratrice della medesima natura, diversa soltanto per la diversa distanza del sasso e della Luna (dal centro della Terra), perché la accelerazione decresce con l'inverso del quadrato della distanza. È dunque del tutto spontaneo immaginare che tale sollecitazione si eserciti su ogni corpo, a qualunque distanza dalla Terra, in particolare fino ai pianeti e al Sole. Ovviamente, per analogia, si dovrà poi ammettere che una simile sollecitazione si eserciti tra ogni coppia di corpi.

Concentriamoci ora sulla coppia Sole–Terra. Avremo dunque l'azione acceleratrice *sulla* Terra dovuta al Sole, diciamola a_{TS} e reciprocamente una azione acceleratrice *sul* Sole da parte della Terra, diciamola a_{ST}, date rispettivamente da (dove $r \equiv r_{TS}$)

$$a_{TS} = C_S \frac{1}{r^2}\,, \quad a_{ST} = C_T \frac{1}{r^2}$$

[43] Non ci è chiaro chi abbia per primo introdotto il ragionamento illustrato in questo paragrafo, in cui si fa un uso pregnante del principio di azione e reazione per stabilire che ad esempio si ha $C_S = Gm_S$, dove G è una costante universale. Nei *Principia*, questo ragionamento è certamente implicito nei paragrafi del *System of the World* in cui Newton confronta il ruolo del Sole e quello della Luna nel determinare le maree. Ma potrebbe esserci un altro luogo in cui la cosa è più esplicita. Certamente, questo uso pregnante del terzo principio per definire la massa inerziale è alla base del procedimento esposto nel noto libro di Mach.

ed è spontaneo confrontarle tra di loro.

Un problema analogo si presenta in un dominio di esperienze del tutto diverso, che è il dominio della fenomenologia delle *forze* con cui si ha a che fare nelle ordinarie esperienze che non coinvolgono i corpi celesti. Di questo argomento (riguardante le forze) ci occuperemo in un prossimo capitolo (seguendo Levi Civita e Amaldi II, Cap. VII). In tale ambito si misurano le forze con pesi e dinamometri (mentre nessuno invece ha mai misurato le forze tra pianeti mediante molle), e si giunge all'idea che una forza produca su ogni corpo una sollecitazione che consiste in una ben definita accelerazione; inoltre, tale accelerazione esercitata dalla forza considerata risulta inversamente proporzionale alla *quantità di materia* costituente il corpo (se dò un calcio a un pacco contenente della farina ottengo una certa accelerazione, mentre se dò lo stesso calcio a un pacco contenente la metà della farina ottengo una accelerazione doppia). Si introduce in tal modo il concetto di *massa* (o meglio massa inerziale)[44] di un corpo, nel senso che essa misura quanto il corpo è inerte, cioè quanto resiste alle sollecitazioni. In tale modo si viene a postulare quella che di solito viene chiamata *seconda legge di Newton*, ovvero la legge

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}\,. \tag{1.3.6}$$

Questa viene letta nel modo seguente. Se si pensa assegnata la forza (in funzione della posizione, della velocità, del tempo), e si ricorda $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$, allora la (1.3.6) appare come una equazione differenziale del secondo ordine avente per incognita il movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Se invece è noto il movimento, e quindi anche l'accelerazione, allora la (1.3.6) permette di conoscere la forza agente sul corpo (descritto come un *punto materiale*, cioè oggetto dotato di posizione e massa).

Ora, un punto cruciale è che per le forze reciproche tra due corpi si ammette che valga il principio di azione e reazione (*terza legge di Newton*): se urto contro un muro, il muro urta contro di me e mi fa male... . Estrapolando questo principio al caso di ogni coppia di corpi, in particolare alla coppia Sole–Terra, avremo quindi

$$\mathbf{F}_{TS} = -\mathbf{F}_{ST}\ .$$

Dunque, unendo questa legge di azione e reazione con la seconda legge, e applicandola in particolare ai moduli dei vettori considerati, avremo

$$m_T\, a_{TS} = m_S\, a_{TS}\,,$$

ovvero (essendo le due accelerazioni valutate alla medesima distanza)

$$m_T C_S = m_S C_T$$

o anche

$$\frac{C_S}{m_S} = \frac{C_T}{m_T}\,.$$

[44]Una discussione della relazione tra massa inerziale e massa gravitazionale è rimandata ad un altro capitolo. Per un confronto tra massa e peso in Newton si veda *Principia* Parte II, Sezione VI: *The motion and resistence of pendolous bodies* Prop. XXIV Theor, XIX, pagine 303 edizione UCP.

Ma lo stesso procedimento può applicarsi a ogni coppia di corpi, diciamo Sole–Pianeta, e quindi troviamo anche

$$\frac{C_S}{m_S} = \frac{C_P}{m_P} \,,$$

qualunque sia il pianeta, o il corpo, P. In conclusione, troviamo che la quantità C_P/m_P non dipende dal corpo P, ed è quindi una costante universale, che chiamiamo G:

$$\frac{C_S}{m_S} = \frac{C_P}{m_P} = \frac{C_T}{m_T} = \cdots = G \,.$$

In altri termini, in conseguenza del principio di azione e reazione, per ogni corpo P abbiamo

$$C_P = G m_P \,.$$

La costante G viene detta *costante di gravitazione universale*.

Il risultato appena ottenuto può anche essere espresso in termini della forza gravitazionale che un corpo di massa m_1 esercita su un corpo di massa m_2 situato nella posizione $\mathbf{x}$ (con origine nel primo punto), ovvero, come avevamo già preannunciato nella (1.3.2),

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r} \,.$$

1.3.6 L'esperienza di Cavendish e la determinazione della massa del Sole, della Terra e di tutti i corpi che hanno satelliti

. Per determinare la costante di gravitazione universale G evidentemente è sufficiente misurare la forza che si esercita tra due masse conosciute, a una distanza conosciuta. Ai tempi di Newton si riteneva che non fosse possibile determinare tale forza tra due corpi in laboratorio, presumibilmente in quanto tale forza sarebbe "mascherata" dalla forza di attrazione esercitata dalla Terra, chiaramente preponderante sulla forza esercitantesi tra i due corpi nel laboratorio. Quindi Newton pensò di utilizzare la Terra stessa come uno dei due corpi, e di utilizzare il noto valore stabilito da Galileo (e poi con più precisione da Huygens) per l'accelerazione dei gravi sulla supeficie terrestre. Naturalmente, a tal fine occorre stabilire che la Terra, assunta sferica, produce la medesima attrazione che essa produrrebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro della Terra. Infine, e questo è un punto più delicato. bisogna conoscere la massa m_T della Terra. A questo proposito Newton poteva fare solo delle congetture, ed egli in effetti assunse che la densità della Terra fosse cinque volte quella dell'acqua. Conoscendo poi il raggio della Terra, egli poté dare una stima della massa della Terra, e così anche stimare la costante G. In tale modo ottenne un valore di circa $6 \cdot 10^{-11}$ unità MKS.

È ben noto che la determinazione diretta della costante di gravitazione universale G venne compiuta da Cavendish nel 1798 (circa cento anni dopo la pubblicazione dei *Principia*), il quale, mediante una bilancia di torsione, misurò in laboratorio la forza di attrazione tra due sfere metalliche (una pallina d'oro di pochi grammi e una sfera di piombo di diversi kili). Si ottiene in tal modo per la costante G il valore in unità MKS è

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \qquad \mathrm{Newton\,m^2/kg^2}\,. \tag{1.3.7}$$

Trovato il valore di G, è allora conosciuta la massa di tutti i corpi che hanno satelliti e per i quali è dunque possibile determinare la costante C_P (perché sappiamo che si ha $C_P = Gm_P$). In tal modo Cavendish poté dunque *pesare la Terra* ed il Sole. Per la Terra si ottiene il valore $m_T = ...$, e da questo valore, conoscendo il raggio terrestre, si ottiene il valore medio della densità della Terra, che risulta essere ..... Analogamente si ottiene la massa del Sole $m_S = ...$

Per quanto riguarda il personaggio di Cavendish, è significativo osservare come ai suoi tempi fosse diffusa una grande unità del sapere, e come egli personalmente abbia dato grandi contributi anche alla chimica. Riportiamo a questo proposito la seguente breve nota dal *Lessico Universale Italiano* della Treccani.

> *Caavendish Henry. Chimico e fisico inglese di nobile famiglia (Nizza 1731, Londra 1810), uno dei più eminenti del* 18^0 *secolo. Nel 1766 isolò e studiò a fondo l'idrogeno, dimostrò successivamente che l'acqua è formata di idrogeno e ossigeno, e che sotto l'azione di scariche elettriche l'azoto e l'ossigeno dell'aria si combinano, in presenza di acqua, per dare acido nitrico. Osservò la presenza nell'aria di un residuo (circa 1 percento) incapace di combinarsi con l'ossigeno, precorrendo così la scoperta dei gas nobili, i quali sono appunto presenti nell'aria in tale proporzione. In fisica il suo nome è legato alla prima determinazione sperimentale della costante f (da noi denotata con G) della gravitazione universale, detta appunto costante di Cavendish, effettuata nel 1798; per tale determinazione il Cavendish si servì di una bilancia di torsione costruita nel 1795 dall'astronomo J. Michell, alla quale apportò vari perfezionamenti. Nel corso di tale delicata misurazione ebbe modo di accertare le cosiddette anomalie della gravità; applicò poi il metodo alla determinazione della densità media della Terra.*

Per la Luna invece questo procedimento non si può applicare, e la massa venne determinata da Newton tendendo conto delle osservazioni sulle maree. Si rimanda per questo al riassunto che ne viene dato da Mach nel suo libro, oppure si veda direttamente Newton, *The System of the World, n. [52] The ratio of the tides under the equator in syzygies and quadratures due to the joint attraction of sun and moon, e n. [55] The moon is about six times denser than the sun, e n. [56] The moon is denser than our earth in the ratio of about 3 to 2*, pagina 595 edizione UCP. [45]. Ulteriori informazioni sulla massa della Luna si ottengono dalla osservazione

[45] Estremamente bella e impressionante la descrizione della marea incontrata alla foci dell'Indo da Alessandeo Magno, come narrata da uno storico greco che lo accompagnava nella spedizione.

del suo moto; infatti si deve anzitutto considerare l'azione del Sole sul baricentro Terra–Luna, una nozione appunto che coinvolge sia la massa della Terra che quella della Luna.

Naturalmente si trattava di una marea enorme, di tipo oceanico, se confrontata con le modestissime maree familiari ai greci nel mare Meditteraneo

1.4 Dalla teoria delle perturbazioni ai moti caotici

1.4.1 Cartesiani e newtoniani.

Ci si potrebbe attendere che il lavoro di Newton dovesse essere accolto immediatamente, e con entusiasmo. Le cose non andarono in tal modo (si veda E. Whittaker, *A history of the theories of æther and electricity*, Dover (New York, 1989), Capitolo 1. Si veda anche l'appendice di Cajori alla traduzione inglese dei *Principia*, nota 5 pag. 629). La ragione profonda è che la scienza era allora dominata dalle idee di Cartesio, il quale ricercava una spiegazione meccanica di tutti i fenomeni mediante un modello generale che coinvolgeva un etere permeante tutto l'universo, con moti vorticosi. Il riferimento a questo etere era dovuto al fatto che Cartesio rifuggiva completamente dall'idea che esistessero *forze a distanza*, non trasmesse da alcun mezzo, ritenute al livello di misteriose forze occulte. Riguardo questo punto di vista di Cartesio, così si esprime Whittaker:

> *This implied that bodies can act on each other only when they are contiguous; in other words, he denied action at a distance; and this had the further consequence that the space between the moon and the earth, and indeed the whole of space, could not be void. It is occupied partly by ordinary material things – air and tangible bodies; but the interstices between the particles of these, and the whole of the rest of space, must be filled with particles of a much more subtle kind, which everywhere press upon, or collide with, each other: they are the contrivence introduced in order to account for all physical happenings. Space is thus, in Descartes' view, a* plenum*, being occupied by a medium which, though imperceptible to the senses, is capable of transmitting force, and exerting effects on material bodies immersed in it – the æther, as it is called (Whittaker, pag. 5).*

Si noti bene, che neanche Newton rifuggiva da idee di questo tipo, anzi sostanzialmente le condivideva. Egli però insisteva sul fatto di avere trovato la legge con cui l'attrazione si produce, indipentemente dal meccanismo che eventualmente lo produce. In questo atteggiamento "descrittivo" dei fenomeni fisici, in termini delle leggi matematiche con cui essi si presentano, egli in qualche modo seguiva la scuola di Galileo (che è la stessa di Poincaré ed Einstein rispetto al problema della costanza della velocità della luce, a differenza di Lorentz, che cercava un meccanismo che la spiegasse).

> *Newton claimed nothing more for his discovery than that it provided* forniva *the necessary instrument for mathematical prediction, and he pointed out that it did not touch on the question of the mechanism of gravity. As to this, he conjectured that the density of the æther might vary from place to place, and that the bodies might tend to move from the denser parts of the medium towards the rarer; but whether this were the true explanation or not, at any rate, he said, to suppose* "that

> one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of anything else, ... is to me so great an absurdity, that I believe no man, who has in philosophical matters a competent faculty for thinking, can ever fall into."

È molto bella a questo proposito la seguente famosa citazione dal General Scholium che conclude i Principia (pag 547 della edizione UCP). Dopo avere descritto la legge di gravitazione, egli aggiunge la seguente frase, penultima del libro:

> *"But hitherto I have not been able to discover the cause of those properties of gravity from phenomena, and I frame no hypotheses (*hypotheses non fingo*); for whatever is not deduced from the phenomena is to be called an hypothesis, and hypotheses, whether metaphysical or physical, whether of occult qualities or mechanical, have no place in experimental philosophy. In the philosophy particular propositions are inferred from the phenomena, and afterwards rendered general by induction. Thus it was that the impenetrability, the mobility and the impulsive force of bodies, and the laws of motion and of gravitation, were discovered.* And to us it is enough that gravity does really exist, and acts according to the laws which we have explained, and abundantly serves to account for all the motions of the celestial bodies, and of our sea.*"*

E anche la seguente frase, che conclude il libro, è estremamente interessante, anche se (o proprio perché) di carattere alquanto diverso.

> *"And now we might add something concerning a certain most subtle spirit which pervades and lies hid in all gross bodies; by the force and action of which spirit the particles of bodies attract one another at near distances, and cohere, if contiguous; and electric bodies operate to greater distances, as well repelling as attracting the neighboring particles; and light is emitted, reflected, refracted, inflected, and heats bodies; and all sensation is excited, and the members of animal bodies move at the command of the will, namely, by the vibrations of this spirit, mutually propagated along the solid filaments of the nerves, from the outward organs of sense to the brain, and from the brain into the muscles. But these are things that cannot be explained in few words, nor are we furnished with that sufficiency of experiments which is required to an accurate determination and demonstration of the laws by which this electric and elastic spirit operates."*

Dunque, per il prevalere anche in Inghilterra dei cartesiani, si dovette attendere fino al 1718 perché le idee di Newton fossero accettate. Questo è descritto nel modo seguente da Whittaker. Dopo avere ricordato che, anche dopo la pubblicazione dei

Principia, per lungo tempo *the textbook of natural philosophy used at Cambridge continued to be a translation (into Latin from French) of the* Physics *of Rohault, a work entirely cartesian*, egli aggiunge

> *The change in the character of the official teaching was brought about in a very curious manner. Dr Samuel Clarke, a zealous Newtonian, published about the year 1718 a new translation of Rohault, with a running commentary of notes which, while avoiding the language and appearence of controversy, anctually constituted a complete refutation of the text. This edition superseded the older one in current use, and the younger generation peacefully adopted the new knowledge.*

E Whittaker continua con la famosa citazione di Voltaire.

> *In the continent, the change took place still more slowly. " A Frenchman that arrives in London" wrote Voltaire in 1730, "will find Philosophy, like everything else, very much changed there. He had left the world a* plenum*, and now he finds it a* vacuum*". For this he gave a most surprising explanation. "It is," he said, " the language used, and not the thing in itself, that irritates the human mind. If Newton had not used the word* attraction *in his admirable philosophy, everyone in our Academy would have opened his eyes to the light; but unfortunately he used in London a word to which an idea of ridicule was attached in Paris; and on that alone he was judged adversely, with a rashness which will some day be regarded as doing very little honour to his opponents."*

Infine, anche il continente cedette, verso la metà del secolo. Un grande contributo in questa direzione fu dato da Ruggero Boscovich, un gesuita croato di Dubrovnik. Questi, che soggiornò quasi sempre in Italia, e in particolare costruì l'osservatorio di Brera a Milano, *was the first exponent of Newtonian ideas in Italy, and attempeted*[46] *to account for all known physical effects in terms of action at a distance between point particles.*' In particolare, nel suo libro si danno delle forme di potenziali intermolecolari (come diremmo oggi) che spiegassero i diversi stati di aggregazione della materia.

1.4.2 Difficoltà della teoria newtoniana; le disuguaglianze secolari e la teoria delle perturbazioni.

Si deve notare che una certa ritrosia all'accettazione della teoria newtoniana della gravitazione proveniva anche da una sua difficoltà intrinseca, del tutto indipendente dalle discussioni di tipo filosofico cui si accennava sopra. Si tratta del problema delle *disuguaglianze* secolari nelle orbite planetarie, che ora descriveremo. Tuttavia queste difficoltà vennero brillantemente superate da Laplace nel 1773, col suo

[46] R. Boscovich, Theoria Philosopiæ Naturalis, (Venezia, 1753).

famoso teorema sulla teoria delle perturbazioni, e la difficoltà si convertì allora in uno strepitoso successo, il quale culminò infine nella famosa predizione dell'esistenza dei pianeti non classici al di là di Urano, ovvero Nettuno e Plutone, data da Le Verrier e altri.

Prendiamo dalla bella esposizione di Whittaker, vol II, Capitolo V (*Gravitazion*), pag. 144.

L'opposizione a Newton da parte di Huygens in Olanda, Leibnitz in Germania, Johann Bernoulli in Svizzera e Cassini in Francia era dovuta al fatto seguente. Essi ammettevano che la legge di Newton spiegava in maniera soddisfacente la prima approssimazione delle orbite planetarie, secondo la quale esse si muovono su orbite kepleriane, ovvero su ellissi aventi il Sole in un fuoco, con i semiassi maggiori costanti e la terza legge soddisfatta. Ora, questa descrizione viene ottenuta solo nell'approssimazione in cui ogni coppia Sole–Pianeta si muove trascurando l'azione gravitazionale dei rimanenti pianeti, e ci si deve attendere che queste ulteriori forze alterino i movimenti kepleriani.

> *But by the end of the seventeenth century much was known observationally about the departures from elliptic motion, or* inequalities *as they were called, which were presumably due to mutual gravitational interaction: and some of these seemed to resist attempts to explain them as consequences of the Newtonian law.*
>
> *The inequalities were of two kinds: first there were disturbances which rigthed themselves (si bilanciavano) after a time,*[47] *so as to have no cumulative effect; these were called* periodic *inequalities. Much more serious were those derangements which proceed continually in the same sense, always increasing the departure from the original type of motion: these were called* secular *inequalities (che si accumulano nei secoli). The best known of them was what was called the* great inequality of Jupiter and Saturn*, of which an account must now be given.*
>
> *A comparison of the ancient observations cited by Ptolemy in the* Almagest *with those of the earlier astronomers of Western Europe and their more recent successors, showed that for centuries past the mean motion, or average angular velocity*[48] *round the sun, of Jupiter, had been continually increasing, while the mean motion of Saturn had been continually decreasing.*[49] *This indicated some striking conse-*

[47] Cioè avevano il carattere di una fluttuazione priva di "deriva".

[48] Si pensi alla velocità angolare $\omega = 2\pi/T$ nel moto circolare uniforme.

[49] Nella teoria dell perturbazioni, si ha tipicamente una equazione del tipo $\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x,t)$, con ε molto piccolo. Allora per tempi non troppo lunghi è significativo approssimare il moto $x(t)$ con una soluzione del *problema imperturbato* $\dot{x} = f(x)$ (nel nostro caso, moti con traiettorie ellttiche), in cui però i parametri significativi (nel nostro caso, il semiasse maggiore e l'eccentricità) variano lentamente col tempo: così nel nostro caso si avranno delle ellissi con semiasse maggiore ed eccentricità praticamente costanti per moltissimi periodi, e dopo un tempo lungo si avranno poi altre ellissi con altri valori di quei parametri.

> *quences in the remote future. Since by Kepler's third law the square of the mean motion is proportional to the inverse cube of the mean distance, the decrease in the mean motion of Saturn implied that the radius of his orbit must be increasing, so that this planet, the most distant of those then known, would be always becoming more remote, and would ultimately, with his attendant ring and satellites, be altogether lost to the solar system. The orbit of Jupiter, on the other hand, must be constantly shrinking, so that he must at some time or other either collide with one of the interior planets, or must be precipitated on the incandescent surface of the sun. No explanation of the secular inequality of Jupiter and Saturn could be be obtained by any simple and straightforward application of Newton's gravitational law, and the French Academy of Sciences offered a prize in 1748, and again in 1752, for a memoir relating to these two planets. On each occasion Euler made considerable advances in the general treatment of planetary perturbations, and received the award: but the result of his investigations was to make the observed secular accelerations of Jupiter and Suturn more mysterious than ever, for they appeared to be quite inconsistent with the tolerably complete theory which he created. Lagrange, who wrote on the problem in 1763, and gave a still more complete discussion, likewise failed to obtain a satisfactory agreement with the observations.*

Ancora da scrivere:

1. Idem per la luna, con Laplace che valuta la velocità della trasmissione della gravità.
2. La teoria delle perturbazioni, Eulero e Lagrange, il grande teorema di Laplace.
3. La scoperta dei pianeti nonclassici.
4. Il problema matematico delle perturbazioni: esempio del problema dei tre corpi, ristretto circolare piano
5. Poincaré e i moti caotici. Esempio della traslazione del toro e del gatto di Arnold (oppure standard map). Relazione con il caso delle soluzioni delle equazioni algebriche.
6. Risonanza e cattura in risonanza. Esempio della Luna, esempio di Mercurio (Colombo), esempio di Plutone, la cui orbita attraversa quella di Nettuno.

BIBLIOGRAFIA

[ALE] A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Lavrentev, *Le matematiche*, Bollati Boringhieri (Torino, 2000).
[BOR] M. Born, *La sintesi einsteiniana*, Boringhieri (Torino, 1980).

[EIN] A. Einstein, *Opere*, a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri (Torino, 1988).
[EININ] A. Einstein, L. Infeld, *L'evoluzione della fisica*, Bollati Boringhieri (Torino, 1985).
[FER] E. Fermi, *Fisica, ad uso dei licei*, Zanichelli (Bologna, 1931, 1948).
[GAL] G. Galilei *Dialoghi*
[GAL2] G. Galilei *Dimostrazioni matematiche ...*
[HEI] W. Heisenberg, *Encounters with Einstein*, Princeton U.P. (Princeton N.J., 1989).
[LCA] Levi Civita e Amaldi ....
[MAC] E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*, Bollati Boringhieri (Torino, 1977).
[NEW] I. Newton *Principia ...*
[POI] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion (Paris. 1968).
[POL] Pólya, *Metodi matematici per l'insegnamento delle scienze fisiche*
[TOE] O. Toeplitz, *The calculus, a genetic approach*, The University of Chicago Press (Chicago Ill. 1963).
[RUS] L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli (Milano, 1996).
[VDW] Van der Waerden, a history of algebra.
[VOL] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier–Villars (Paris, 1931).
[WHI] E. Whittaker *A history of the theories of æther and electricity*, Dover (New York, 1989).