

Capitolo 4

L'equazione di d'Alembert per la corda vibrante come prototipo di teoria di campo

4.1 Introduzione

Come la dinamica di un sistema di N punti è regolata da un sistema di equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine, le equazioni di Newton $m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i$, ($i = 1, \dots, N$), così la dinamica di un sistema continuo, di cui il caso più semplice è una corda elastica, è regolata da una equazione alle derivate parziali. Si tratta del fatto che l'indice discreto i di particella viene sostituito dall'indice continuo x (perché le particelle costituiscono appunto un continuo), e in tal modo nel caso della corda vibrante ci si imbatte, come verrà illustrato qui sotto, nella equazione di d'Alembert.¹ È questa in effetti la prima equazione alle derivate parziali scritta nella storia dell'umanità, appunto da d'Alembert a Berlino nel 1750, e poi (attraverso un metodo diverso, oggi molto in voga con il nome di *lattice field theory*, ovvero teoria di campo di reticolo) da Lagrange a Torino nel 1759 (quindi circa 70 anni dopo le equazioni di Newton per la dinamica dei punti).

Si apre così tutto il dominio della *teoria dei continui*, che costituisce uno dei grandi capitoli della fisica matematica classica. Si hanno i *continui elastici* (particolarmente rilevanti i lavori di Cauchy²³ per fornire modelli meccanici di etere – il *mezzo luminifero* che si pensava dovesse fungere da sostegno alle onde elettromagnetiche), e i *continui fluidi* (equazioni di Eulero per i fluidi perfetti, e di Navier–Stokes ($\simeq 1824$) per i fluidi viscosi);

¹Pronuncia d'Alamber.

²Leggi Coscí .

³Si veda E. Whittaker, A history of the theories of ether and electricity.

vi è poi *l'equazione del calore o della diffusione* (Fourier \simeq 1825) e inoltre *l'equazione di Laplace*, e la sua variante di Poisson, che descrivono problemi statici nell'equazione del calore e nell'equazione di d'Alembert tridimensionale, e l'andamento di campi gravitazionali ed elettrici "creati" da materia statica. Si hanno ancora le *equazioni di Maxwell* per le onde elettromagnetiche (1873), di tale rilevanza fisica ed estetica da fare esclamare a Boltzmann: "Fu un Dio a scrivere questi segni?". Poi *le equazioni della relatività generale di Einstein* (1916), che riguardano quello che può dirsi il continuo per eccellenza, ovvero lo spaziotempo. Infine, nel 1925, con l'introduzione della *meccanica quantistica*, anche la meccanica dei punti venne ad essere descritta da una equazione alle derivate parziali. Si tratta della celebre *equazione di Schrödinger*, in cui si ha la peculiarità che ora non è l'incognita stessa ad avere un significato fisico (come era nel caso della tradizionale teoria dei continui), ma ha significato fisico il quadrato del suo modulo (interpretato come densità di probabilità per le posizioni delle particelle); un'altra peculiarità è poi che l'equazione è ora complessa anziché reale (formalmente uguale all'equazione del calore - nel caso della particella libera - pur si sostituire la massa m con la quantità immaginaria im).

Un anno dopo l'introduzione dell'equazione di Schrödinger, descrittiva di un sistema di un punto o anche di N punti in ambito quantistico, venne compiuta, da parte di Born, Heisenberg e Jordan⁴, l'estensione della dinamica quantistica al caso di un continuo. Il caso che tutti avevano in mente era quello della quantizzazione delle equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico. Ma il caso più semplice da trattarsi, e tuttavia alquanto significativo, era evidentemente quello della equazione di d'Alembert della corda vibrante, che appunto venne discusso da tali autori in quanto prototipo di tutta la teoria dei continui, o come si usa dire in ambito quantistico, della *Teoria dei campi*⁵. Allo stesso modo, se è lecito paragonare cose piccole a cose grandi⁶, anche noi studieremo in questo capitolo il problema della corda vibrante, con l'intento di illustrare, su un modello prototipo particolarmente semplice, il maggior numero possibile di proprietà che siano significative per la teoria classica dei campi.

In effetti, ci limiteremo a un richiamo sulla "deduzione" dell'equazione di d'Alembert per il filo perfetto, alla definizione del problema di Cauchy e alla sua soluzione, all'illustrazione del metodo della separazione delle variabili per scrivere la soluzione generale come serie di Fourier (per la corda con estremi fissi), e corrispondentemente l'energia della corda come somma di energie di oscillatori armonici (modi normali di vibrazione). Come complemento,

⁴Si tratta del celebre *dreimänner Arbeit*: M. Born. W. Heisenberg, P. Jordan, *Zur Quantenmechanik, Zeitschr. für Physik* **35** 557-615 (1926). Traduzione inglese in van der Waerden, *Sources of quantum mechanics*, Dover (New York, 1968).

⁵Il più bel libro in assoluto, in ambito classico, è senz'altro Landau Lifshitz, *Teoria classica dei campi*.

⁶*Si parva licet componere magnis.*

aggiungeremo infine la discussione del tensore energia–momento.

4.2 Generalità sulle equazioni alle derivate parziali

Già sappiamo che cos'è un'equazione alle derivate ordinarie, ad esempio del tipo $F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$, come tipicamente $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (oscillatore armonico): si ha per incognita una funzione $x = x(t)$, tale che valga identicamente (ovvero per ogni t) $F(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0$, dove $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$. Così $x(t) = \sin \omega t$ è soluzione di $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, mentre $x(t) = t^3$ non lo è. Analogamente, nelle equazioni a derivate parziali l'incognita è una funzione di più variabili (almeno due), diciamo $u = u(x, t)$; è assegnata ad esempio una funzione F di tre variabili, e si considera l'equazione

$$F(u, u_t, u_x) = 0, \tag{4.2.1}$$

dove⁷

$$u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \partial_t u, \quad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \partial_x u. \tag{4.2.2}$$

Le soluzioni della (4.2.1) sono le funzioni $u = u(x, t)$ per cui vale *identicamente* (ovvero per ogni x, t)

$$F(u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t)) = 0. \tag{4.2.3}$$

Ad esempio, per l'equazione

$$u_t + cu_x = 0, \quad (c = \text{cost}), \tag{4.2.4}$$

(detta *equazione del trasporto*, che in un certo senso descrive mezza equazione d'onda, come si capirà più avanti) la funzione $u(x, t) = x - ct$ è soluzione, perché per tale funzione si ha $u_t = -c$, $u_x = 1$, sicché vale $u_t + cu_x = 0$ per ogni x, t ; analogamente si controlla subito che $u(x, t) = x^2 - ct$ non è soluzione, perché $u_t + cu_x = c(-1 + 2x)$, diverso da zero tranne che per $x = 1/2$.⁸

La (4.2.1) viene detta equazione *del primo ordine*, perché contiene solo derivate del primo ordine, mentre ad esempio l'equazione di d'Alembert

⁷Analogamente scriveremo anche

$$u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv \partial_{xx} u, \quad u_{xt} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \equiv \partial_{xt} u,$$

e così via. Considereremo tipicamente funzioni di classe C^∞ (derivabili quante volte si vuole); vale allora il teorema di Schwarz $u_{tx} = u_{xt}$, e così via. Spesso si scrive ∂_{xx}^2 anziché ∂_{xx} .

⁸E' facile mostrare che la soluzione generale di (4.2.4) è $u(x, t) = f(x - ct)$, dove f è una funzione arbitraria; questa rappresenta una forma che trasla rigidamente con velocità c . Si veda più avanti.

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ è *del secondo ordine*. L'equazione del trasporto $u_t + cu_x = 0$ e quella di d'Alembert vengono dette *equazioni lineari* perché contengono l'incognita u e le sue derivate parziali alla prima potenza. Ad esempio l'equazione (di Hopf) $u_t + uu_x = 0$ non è lineare (per via del prodotto uu_x), come anche non lo sono l'equazione di Korteweg–de Vries $u_t + uu_x + u_{xxx}$ (del terzo ordine, descrivente le onde solitarie o *solitoni*), l'equazione di Burgers $u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0$ e l'equazione di Sine-Gordon⁹ $u_{tt} - c^2 u_{xx} = \alpha \sin u$.

Di consueto, si riserva il nome di *equazioni classiche della fisica–matematica* alle tre seguenti equazioni lineari del secondo ordine:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{d'Alembert} \quad u = u(x, t) \quad (4.2.5)$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{Laplace} \quad u = u(x, y) \quad (4.2.6)$$

$$u_t - D u_{xx} = 0 \quad \text{calore o diffusione} \quad u = u(x, t), \quad (4.2.7)$$

dove c, D sono costanti positive; corrispondentemente, nel caso di tre variabili spaziali, si hanno le equazioni

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad u = u(\mathbf{x}, t) \quad (4.2.8)$$

$$\Delta u = 0 \quad u = u(\mathbf{x})$$

$$u_t - D \Delta u = 0 \quad u = u(\mathbf{x}, t), \quad (4.2.9)$$

$$(4.2.10)$$

dove $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$, e si è denotato

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \equiv \nabla^2 u \quad (\text{laplaciano di } u). \quad (4.2.11)$$

L'equazione di d'Alembert descrive tipicamente fenomeni oscillatori di corde (caso monodimensionale nelle variabili spaziali), di membrane (caso bidimensionale) o del suono o delle onde elettromagnetiche (caso tridimensionale). L'equazione del calore descrive appunto la propagazione del calore o la diffusione, ed è strettamente legata alla problematica dei processi stocastici (processi di Wiener per il moto browniano, equazione di Fokker-Planck); il coefficiente (positivo) D si dice *coefficiente di diffusione*. L'equazione di Laplace regge tipicamente problemi di potenziale (in teoria della gravitazione e dell'elettromagnetismo), nel senso che $\text{grad } u$ rappresenta tipicamente le forze newtoniane o coulombiane. Ma l'equazione di Laplace regge anche fenomeni completamente diversi, precisamente descrive soluzioni statiche (cioè indipendenti dal tempo) delle equazioni di d'Alembert e del calore, perché in entrambe tali equazioni, ponendo $u_t = 0$, segue $\Delta u = 0$. Si osservi in particolare come l'equazione di d'Alembert in una dimensione spaziale $u_{tt} - u_{xx} = 0$ ¹⁰ differisca da quella di Laplace in due dimensioni

⁹Il nome è dovuto al fatto che l'equazione lineare $u_{tt} - c^2 u_{xx} = \alpha u$ (descrittiva di particelle a spin intero e di massa non nulla in teoria dei campi) è detta di Klein–Gordon, e qui si rimpiazza u con $\sin u$, donde Sine invece di Klein.

¹⁰Si è posto $c = 1$, il che può sempre ottenersi riscaldando la coordinata temporale t , ad esempio introducendo $\tau = ct$ (e poi chiamando ancora τ con t).

spaziali $u_{xx} + u_{yy}$ solo per un segno;¹¹ si trova che questa differenza porta conseguenze alquanto notevoli (esistenza di fenomeni propagatori nel primo caso, e non nel secondo). E' possibile dare una classificazione generale per le equazioni del secondo ordine lineari¹² nelle derivate seconde, suddividendole in iperboliche, paraboliche, ellittiche, di cui i prototipi sono appunto rispettivamente le equazioni di d'Alembert, del calore e di Laplace.

4.3 Digressione matematica: funzioni come vettori in spazi di dimensione infinita

La definizione sopra data di equazione alla derivate parziali fa riferimento a nozioni di carattere elementare riguardanti le funzioni e le loro derivate. Esiste tuttavia un secondo livello di formalizzazione, in cui si riguarda alle funzioni come punti (o vettori) di spazi a dimensione infinita, al quale è opportuno sollevarsi se si ricerca una più profonda comprensione. Ne diamo qui un breve cenno, ma il lettore, se preferisce, può passare al prossimo paragrafo, ritornando poi a questo quando ne avrà bisogno durante la lettura del capitolo.

Si tratta di familiarizzarsi con il fatto che si può riguardare a una funzione f (a valori reali, definita in un certo dominio $D \subset \mathbb{R}$) come a un vettore in uno spazio vettoriale di dimensione infinita. In effetti, quando si parla di vettori, si parte considerando l'esempio elementare delle frecce nell'ordinario spazio "fisico" tridimensionale (i cosiddetti vettori spostamento, ciascuno individuato da una coppia ordinata di punti, inizio e termine della freccia), e si definisce per tali frecce il prodotto per uno scalare (si allunga o si accorcia la freccia, mantenendone la direzione e il verso (se lo scalare è positivo, invertendolo se lo scalare è negativo)) e la somma con un'altra freccia (regola del parallelogramma). Ma già il passaggio da \mathbb{R}^3 ad \mathbb{R}^N costituisce una alta idealizzazione. Infatti, in tal caso non "vediamo" più le frecce, e definiamo un vettore $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ come una N -upla di numeri reali (le componenti del vettore in una fissata base). Allora, la moltiplicazione per uno scalare α , e la somma vettoriale, vengono definite per componenti (*componentwise*), dato che le componenti sono numeri reali, che noi sappiamo sommare e moltiplicare per un numero. Dunque la componente i -esima di $\alpha\mathbf{x}$ viene definita come la componente i -esima di \mathbf{x} moltiplicata per α , e la componente i -esima di $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ viene definita come la somma delle

¹¹A parte il nome delle variabili, che è matematicamente irrilevante.

¹²E anche per quelle che vengono dette *quasilineari*.

componenti i -esime di \mathbf{x} e di \mathbf{y} , ovvero¹³¹⁴

$$(\alpha\mathbf{x})_i = \alpha x_i, \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y})_i = x_i + y_i.$$

A questo punto è stata compiuta l'idealizzazione di passare dallo spazio vettoriale inteso come insieme di frecce allo spazio vettoriale inteso come insieme astratto di elementi, l'insieme essendo caratterizzato dalla proprietà strutturale che sui suoi elementi sono definite due operazioni: somma di due elementi, e moltiplicazione di un elemento per un numero, aventi certe ben note proprietà (distributività, ...). Il segreto per passare ora agli spazi vettoriali in cui il ruolo di vettore è svolto da una funzione consiste nel compiere una reinterpretazione della nozione di vettore in \mathbb{R}^N appena descritta. Si reinterpreta la N -upla (x_1, \dots, x_N) come una funzione a valori reali che ha per dominio l'insieme $I = \{1, \dots, N\}$ (insieme di indici) e che ad $i \in I$ associa il numero x_i (la componente i -esima del vettore). Allo stesso modo, una funzione $y = f(x)$ deve essere pensata come una legge che per ogni x in un dominio $D \subset \mathbb{R}$ fornisce un numero reale, il numero $f(x)$. Si può dire che, per un x fissato, $f(x)$ è la x -esima componente del vettore-funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. L'unica differenza rispetto al caso di \mathbb{R}^N è che ora l'insieme di indici è un continuo D contenuto in \mathbb{R} anziché l'insieme $I = \{1, \dots, N\}$, costituito da N elementi. Dunque è chiaro che la moltiplicazione per uno scalare e la somma vettoriale saranno definite per componenti (*componentwise*), e si avrà

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Talvolta, quando si vuole mettere in rilievo che si riguarda ad una funzione come ad un vettore, si denota la funzione con il simbolo $f(\cdot)$: il vettore è una legge, che attende che venga assegnato un elemento del dominio (insieme di indici), elemento che è qui rappresentato dal puntino, perché sia conosciuto il valore della componente.

Veniamo ora agli *operatori lineari*. Se si riguarda alla funzione $f(\cdot)$ come a un vettore di uno spazio vettoriale V , e si considera poi un altro spazio vettoriale W , si possono considerare delle funzioni $F : V \rightarrow W$. Particolarmente significativo è il caso in cui $W = V$, ad esempio lo spazio delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} che siano infinitamente differenziabili. In tal caso, un ruolo speciale è svolto dagli *operatori lineari* (che vengono solitamente denotati con lettere del tipo A, B, \dots), cioè funzioni da V in V aventi la proprietà che

$$A(\alpha f) = \alpha Af, \quad A(f + g) = Af + Ag.$$

¹³Il punto è che nel caso elementare delle frecce queste proprietà sono teoremi. Data una terna di vettori base \mathbf{e}_i $i = 1, 2, 3$, a ogni vettore \mathbf{x} corrisponde una unica terna di componenti x_i tale che $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$, e si dimostra che le leggi di somma di vettori e di moltiplicazione di un vettore per un numero si traducono in corrispondenti regole per le componenti. Nel caso di \mathbb{R}^N , queste regole vengono sollevate a definizioni.

¹⁴Con $(\mathbf{x})_i$ denotiamo la componente i -esima del vettore (x_1, \dots, x_N) , ovvero $(\mathbf{x})_i = x_i$.

Se V è lo spazio delle funzioni (infinitamente differenziabili) reali di variabile reale $f = f(x)$, allora è particolarmente interessante l'operatore lineare di derivazione

$$A = \frac{d}{dx} : \left(\frac{d}{dx} f\right)(x) = \frac{df}{dx}(x) .$$

Ad esempio, $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$. Analogamente, se V è lo spazio delle funzioni di due variabili, $f = f(x, t)$, allora ∂_x è un operatore lineare, come lo sono ∂_t , ∂_{xt} , ∂_{xx} , ∂_{tt} . È un utile esercizio, che servirà più sotto, osservare che vale l'identità operatoriale

$$(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x) = \partial_{tt} - \partial_{xx} ,$$

analogamente alla identità algebrica

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 .$$

Nel caso presente, la identità è dovuta al fatto che, essendo le funzioni regolari (infinitamente differenziabili), vale il teorema di Schwarz per cui si ha la relazione

$$\partial_{tx} = \partial_{xt} ,$$

analogamente alla relazione algebrica $xy = yx$.

Ricordiamo infine che cosa si intende per *problema agli autovalori* in \mathbb{R}^n . Se è assegnato un operatore lineare A (concretamente, una matrice, se è fissata una base), allora questo operatore lineare (o, se si vuole, la matrice), applicato ad un generico vettore \mathbf{x} , lo trasformerà in un altro vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Possono però esistere degli speciali vettori \mathbf{x} aventi la proprietà

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} ,$$

ovvero la proprietà che il vettore trasformato è parallelo a quello di partenza. Ognuno di questi speciali vettori viene chiamato *autovettore* (ingl. *eigenvector*) e il corrispondente numero λ viene chiamato *autovalore* (ingl. *eigenvalue*). Evidentemente, se \mathbf{x} è un autovettore, ogni suo multiplo $a\mathbf{x}$ con a reale nonnullo è anch'esso un autovettore corrispondente al medesimo autovalore. In altri termini, un autovalore determina un corrispondente spazio lineare, detto *autospazio* (*eigenspace*).

Queste nozioni si trasportano del tutto invariate al caso di spazi vettoriali V di dimensione infinita. Così ad esempio l'equazione

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \alpha f$$

per l'incognita $f = f(x)$, equazione che studieremo più sotto in relazione alla ricerca di onde stazionarie nel problema della corda vibrante, appare come l'equazione agli autovalori per l'operatore $\frac{d^2}{dx^2}$. Si osservi che nella definizione dell'operatore svolge un ruolo fondamentale il suo dominio. Nel

caso che studieremo (corda con estremi fissi), il dominio sarà quello delle funzioni definite nell'intervallo chiuso $0 \leq x \leq l$ e soddisfacenti le *condizioni al contorno* (*boundary conditions*) $f(0) = f(l) = 0$ (dette *condizioni di Dirichlet*). In tal caso, gli autovalori saranno $\alpha_n = -(n\pi/l)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Se invece il dominio fosse quello delle funzioni soddisfacenti le condizioni al contorno $f(0) = 0$, $f'(l) = 0$ (di interesse per gli strumenti a fiato), gli autovalori sarebbero diversi, precisamente $\alpha_n = -[2(n-1)\pi/l]^2$, $n = 1, 2, \dots$ ¹⁵

Si osservi anche come in problemi di questo tipo ci si riduca allo studio di equazioni differenziali ordinarie di tipo ben diverso da quello che solitamente si presenta in meccanica in relazione alle equazioni di Newton. Infatti, di solito le equazioni di Newton vengono studiate in relazione al *problema di Cauchy*, in cui si ricercano soluzioni soddisfacenti opportune *condizioni iniziali* (si fissano le posizioni e le velocità delle particelle al tempo iniziale); in tale ambito, nei casi tipici la soluzione esiste unica, in un opportuno intervallo di tempo attorno al tempo iniziale. Si dice pertanto che si pone un *problema locale*. Nel presente caso, invece, si ha un *problema globale*, perché si vuole che la soluzione esista in un ben definito intervallo chiuso, che è dato a priori, con ben definite condizioni al contorno. Vedremo sotto che proprio queste condizioni globali sono la causa del fatto che le soluzioni esistono solo per certi ben definiti valori (autovalori) del parametro α . Si usa anche dire che in questo caso si ha a che fare con un *problema di Sturm-Liouville*, in contrapposizione al problema di Cauchy.

Nel seguito di questo capitolo, una generica funzione soluzione di una equazione alle derivate parziali verrà denotata con la lettera u , anziché con la lettera f .

4.4 Il modello del filo perfetto per le piccole oscillazioni trasversali di una corda

L'equazione della corda vibrante

$$\rho u_{tt} - \tau u_{xx} = 0 ,$$

ovvero

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 , \quad c^2 = \frac{\tau}{\rho} ,$$

¹⁵Poiché mostreremo che a ogni autovalore corrisponde una diversa frequenza di vibrazione della corda (percepita dall'osservatore come un suono diverso), si capisce così che diverse condizioni al contorno (cioè diversi strumenti) "suonano" in maniera diversa, ed è pertanto possibile in linea di principio "sentire" la forma dello strumento.

dove ρ è la densità di massa e τ la tensione della corda,¹⁶¹⁷ fu ottenuta da d'Alembert a Berlino nel 1750 e da Lagrange a Torino nel 1759,¹⁸ con due procedimenti diversi che costituiscono due prototipi per il “*passaggio al continuo*”, per il modo cioè di scrivere le equazioni per un sistema continuo per analogia con quelle di un corrispondente sistema discreto, come i sistemi di N punti materiali fin qui considerati. In tale procedimento di passaggio al continuo si può rimanere perplessi ed avere la sensazione di mancanza di rigore. In effetti, il problema è alquanto delicato, perché è oggi particolarmente chiaro che non sappiamo bene neppure che cosa sia il continuo da un punto di vista rigoroso.¹⁹²⁰ In ogni caso, deve essere ben chiaro che le equazioni descrittive i continui vengono sostanzialmente postulate, e che la loro relazione con le corrispondenti equazioni per sistemi finiti è puramente analogica.

Tornando alla corda vibrante, esiste anzitutto il problema che, come si vede nella trattazione generale dei corpi elastici, condizioni iniziali tipiche danno luogo contemporaneamente sia a fenomeni vibratorii longitudinali sia a fenomeni vibratorii trasversali (così anche nei terremoti si hanno onde longitudinali e onde trasversali – oltre alle onde di superficie). Per isolare qui il problema del passaggio al continuo nella sua forma più semplice, consideriamo dunque il caso in cui la corda giace in un piano (ad esempio il piano verticale xz) ed in cui inoltre si abbiano *oscillazioni puramente trasversali*.²¹ Rappresentiamo quindi la corda, in ogni istante t fissato, come una curva nel

¹⁶La relazione tra la (4.4) e la (4.4) è simile a quella tra le equazioni $m\ddot{x} + kx = 0$ e $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ($\omega^2 = k/m$) per l'oscillatore armonico.

¹⁷Molto spesso l'equazione di d'Alembert viene scritta nella forma equivalente

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial(ct)^2} - u_{xx} = 0,$$

(si ricordi che c è una costante). Si capisce così come sia addirittura conveniente passare alla variabile $\tau = ct$ (come si fa in relatività) e poi addirittura denotare τ con la lettera t (ovvero si scelgono unità di misura in cui sia $c = 1$), sicché l'equazione diviene

$$u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

¹⁸Si veda l'introduzione storica di R.E. Lindsay nel classico libro di J.W.S. Rayleigh, *Theory of Sound*, (1894, ristampa Dover, 1945).

¹⁹Si veda H. Weyl, *The continuum: a critical examination of the foundation of analysis*, Dover (New York, 1994) e P.J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, Benjamin (New York, 1966); traduzione italiana: Feltrinelli (Milano, 1973).

²⁰E' presumibilmente da attendersi che vi saranno progressi considerevoli nei prossimi anni, a seguito delle recenti notevoli scoperte dell'*analisi non standard*, che dà una forma logicamente consistente ai procedimenti con cui i classici trattavano gli infinitesimi. Si veda E.Nelson, *Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis*, Bull. Am. Math. Soc. 83, 1165–1198 (1977); A Robinson, *Nonstandard analysis*, Elsevier (New York, 1966).

²¹Trascuriamo l'effetto della forza peso, che risulta essere, in molti casi di interesse, alquanto più piccola della tensione.

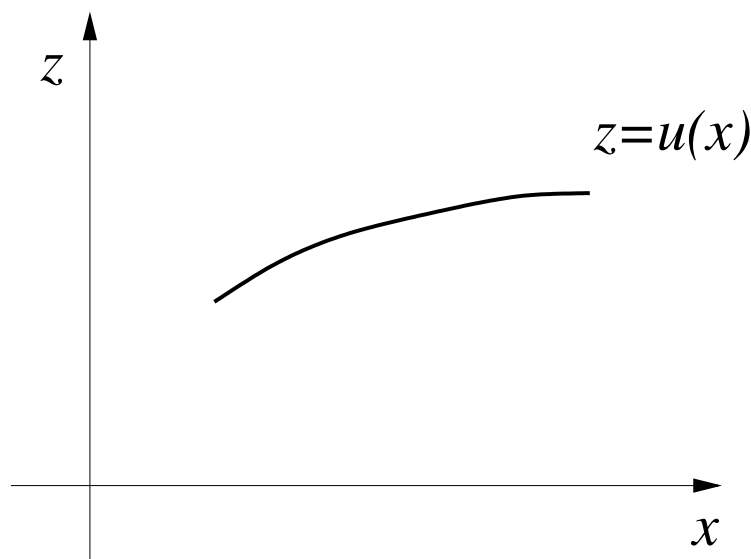


Figura 4.1: Ad un tempo t fissato, la funzione $u(x, t)$ dà l'altezza z del punto di ascissa x .

piano x, z , che sia il grafico di una funzione $z = u(x, t)$ (Fig. 4.1); l'indice continuo x è da pensarsi come l'etichetta di un punto particolare della corda il quale, potendo muoversi solo trasversalmente, ha ascissa fissata (appunto x), e allora $u(x, t)$ dà la corrispondente ordinata al tempo t .

Veniamo ora a definire la *tensione*. Da un punto di vista fenomenologico, avviene che in ogni punto si hanno azioni di un tratto della corda sull'altro adiacente. Si pensi infatti di avere una corda tesa per l'azione di due persone che ne tirino gli estremi, con due forze che sono rispettivamente \mathbf{F}_a e $\mathbf{F}_b = -\mathbf{F}_a$ (avendo trascurato la forza peso). Allora, se si taglia la corda in un punto intermedio, si osserva che i due lembi tagliati si allontanano. Se si vuole che i lembi non si allontanino, occorre che qualcun altro vada lì a tirare i due lembi. Ciò significa che qualche cosa tirava la corda nei lembi prima di tagliarla. In altri termini, in ogni punto, di ascissa generica x , esiste un'azione del tratto di sinistra su quello di destra e viceversa. Evidentemente questa azione locale deve pensarsi dovuta alle molecole costituenti la corda, che si trovano in prossimità del punto considerato, ed è del tutto distinta da altre azioni dovute a corpi esterni, (ad esempio, il peso dovuto all'azione della Terra). Dal punto di vista macroscopico l'azione locale interna può pensarsi ridotta ad una forza e una coppia, come ci insegna la meccanica dei punti. Il *modello matematico della corda perfettamente flessibile* consiste nell'ammettere che tale azione si riduca *solo ad una forza*, e che questa sia *diretta lungo la tangente*;²² questa forza viene detta *forza di tensione*. Si ha

²²Nel caso più generale in cui l'azione è quella di una forza e una coppia, si dice che si

allora il *modello del filo perfetto*, analogo al modello del fluido perfetto, in cui l'azione di una porzione di fluido su un'altra attraverso un'areola $d\sigma$ è soltanto una forza, che inoltre è diretta proprio normalmente alla superficie, senza sforzi di taglio (ciò è analogo all'essere la tensione della corda diretta lungo la tangente), e senza coppia. Nel caso del fluido perfetto, la forza ha però carattere di pressione anzichè di tensione (cioè spinge, anzichè tirare). Sia la pressione nel fluido perfetto, sia la tensione nel filo perfetto devono essere considerate come *incognite* del relativo problema. Vedremo tuttavia che la tensione risulterà costante, e quindi nota a priori, nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, che porta all'equazione di d'Alembert; anche la linearità di tale equazione risulterà essere una conseguenza della medesima approssimazione.²³

4.5 L'equazione di d'Alembert: “deduzione” alla Lagrange, mediante discretizzazione spaziale

Deduciamo ora l'equazione di d'Alembert e la corrispondente espressione della densità di energia (e della densità di lagrangiana), seguendo una variante del metodo di Lagrange.²⁴ La classica deduzione alla d'Alembert è riportata invece in Appendice.²⁵ Il metodo di Lagrange di discretizzazione della corda è diventato popolare, in tempi recenti, nella teoria dei campi quantistici con il nome di *lattice field theory*, ovvero teoria di campo di reticolo (si pensi a una maglia che rimpiazza lo spazio – o lo spaziotempo – continuo).

Lagrange pensa la corda modellata da un sistema discreto di punti, in ciascuno dei quali sia concentrata la massa di un trattino di corda (Fig. 4.2). Per determinatezza, consideriamo ad esempio il caso di corda con estremi fissi, e pensiamo la corda divisa in un certo numero di trattini di lunghezza a (passo reticolare), ciascuno dei quali viene ridotto ad un punto (situato nel centro del trattino). Ammettiamo che questi punti possano muoversi solo trasversalmente. Ammettiamo poi che i due punti estremi siano fissi. Se il numero dei punti mobili è N , e prendiamo come origine delle ascisse la posizione del punto fisso di sinistra, le ascisse dei punti saranno allora $x_i = ia$, $i = 0, \dots, N + 1$, di cui $x_0 = 0$ e $x_{N+1} = l$ sono le ascisse degli

ha a che fare con una *verga*.

²³Che tale linearità debba essere considerata come una approssimazione, appare ovvio se si pensa a un modello molecolare con forze realistiche. Bisognerà dunque tenere conto in generale di termini nonlineari, come fu fatto ad esempio nel celebre lavoro di FPU, che costituì forse l'ultimo lavoro scientifico di Fermi (1954). Si veda E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of nonlinear problems*, in E. Fermi, *Note e memorie*, Vol II, pag. 978, Accademia Nazionale dei Lincei e The University of Chicago Press (Roma e Chicago, 1965).

²⁴J.W.S. Rayleigh, *The theory of sound*, §120.

²⁵Non ancora scritta.

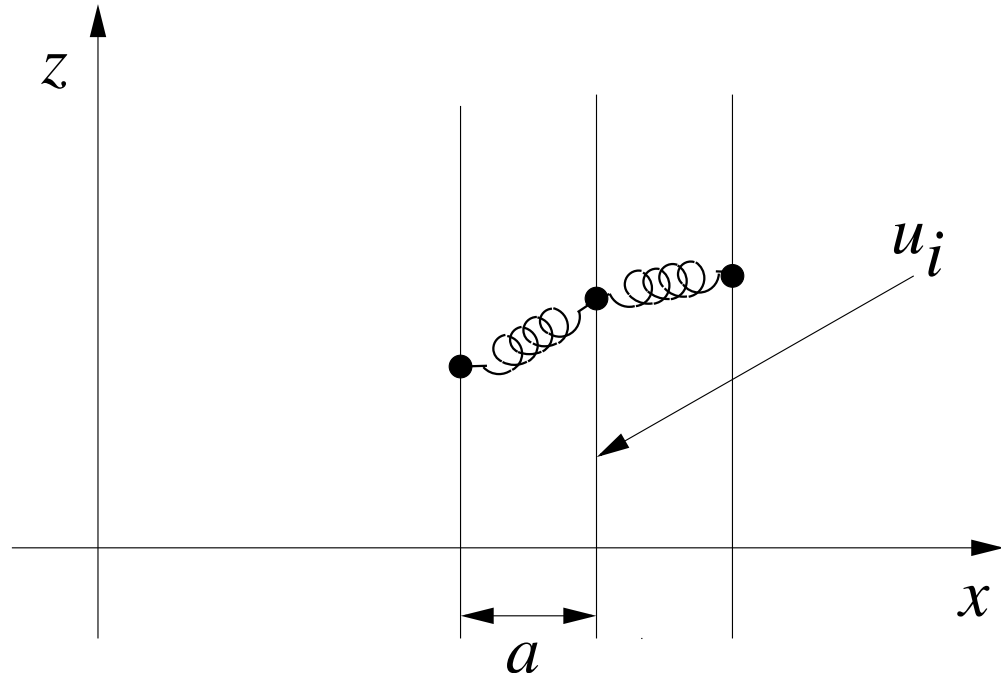


Figura 4.2: La corda discretizzata, su un reticolo di passo a .

estremi fissi. Se dunque la corda ha lunghezza a riposo l e massa M , la massa m di ogni punto è data da $m = M/(N + 2)$, e si ha $a = l/(N + 2)$. Inoltre si ha una densità (lineare) di massa ρ data da $m = \rho a$ (o equivalentemente da $M = \rho l$).

Se u_i è lo spostamento trasversale del punto i -esimo (con $u_0 = u_{N+1} = 0$), allora le incognite del problema sono i movimenti degli N punti mobili parallelamente all'asse z , ovvero le N funzioni

$$u_1(t), \dots, u_N(t),$$

che verranno determinate come soluzioni di un sistema di equazioni di Newton quando si tenga conto delle forze agenti sui vari punti. Il passaggio al continuo verrà poi effettuato in maniera euristica ammettendo l'esistenza di una funzione $\tilde{u}(x, t)$ che ad ogni tempo t *interpola* spazialmente la "forma discretizzata" rappresentata dagli spostamenti discreti, cioè una funzione $\tilde{u}(x)$, con $0 \leq x \leq l$, tale che valga (si pensi a un tempo t fissato)

$$\tilde{u}(ia) = u_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.5.1)$$

o meglio, reintroducendo il tempo, esista una funzione $\tilde{u}(x, t)$ tale che valga

$$\tilde{u}(ia, t) = u_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.5.2)$$

a: energia e lagrangiana

Veniamo ora all'*energia* del sistema discretizzato. L'energia cinetica del sistema è evidentemente $T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2$. Per quanto riguarda le forze, e la corrispondente energia potenziale, modifichiamo l'argomento originale di Lagrange considerando il modello in cui ogni punto mobile interagisce con ciascuno dei due punti adiacenti mediante l'azione di una molla elastica ideale di *lunghezza a riposo nulla*, essendo le molle tutte uguali, con costante elastica k .²⁶ Ora, ben sappiamo che se due punti interagiscono mediante due forze mutue elastiche (come dovute all'azione di *una* molla ideale che li connette) allora la corrispondente energia potenziale (che si riferisce alla *coppia* di punti, cioè in qualche modo alla molla ideale) è $(1/2)kr^2$ se r è la lunghezza della molla (distanza tra i due punti). Nel nostro caso, la distanza $r_{i,i+1}$ tra i punti $i, i+1$ è evidentemente data (secondo il teorema di Pitagora) da

$$r_{i,i+1}^2 = a^2 + (u_{i+1} - u_i)^2, \quad (4.5.3)$$

e l'energia potenziale del sistema è dunque data da²⁷ $V = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} k r_{i,i+1}^2$, ovvero da

$$V = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} k (u_{i+1} - u_i)^2 + \text{cost} . \quad (4.5.4)$$

Trascurando la costante additiva²⁸ otteniamo pertanto l'energia E e la lagrangiana L del sistema, come date da

$$E = \frac{1}{2} \sum_i [m \dot{u}_i^2 + k(u_{i+1} - u_i)^2], \quad (4.5.5)$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_i [m \dot{u}_i^2 - k(u_{i+1} - u_i)^2]. \quad (4.5.6)$$

Veniamo ora al *passaggio al continuo*, che verrà compiuto in maniera euristica, ovvero senza nessuna pretesa di rigore.²⁹

²⁶La descrizione matematica diventa alquanto più complicata se si considera in caso di molle con lunghezza propria non nulla. Il punto più rilevante è che in tal caso si trovano equazioni nonlineari, che si riducono poi ad equazioni lineari nell'*approssimazione delle piccole oscillazioni*, nell'approssimazione cioè in cui la corda è poco inclinata. Si veda più sotto. Il caso di molle con lunghezza propria nonnulla è discusso in una appendice, non ancora scritta nella presente versione delle note.

²⁷Si osservi che si deve eseguire la somma su tutte le molle (ovvero su tutte le coppie), e d'altra parte ogni molla può venire identificata mediante il suo punto estremo ad esempio di sinistra, ovvero dall'indice $0, 1, 2, \dots, N$.

²⁸La costante additiva è evidentemente data da $(N+1)ka^2/2$, ed è fisicamente significativa. Infatti, da una parte si ha $(N+1)a = l$ dove l è la lunghezza a riposo della corda, mentre d'altra parte il fattore ka verrà identificato più sotto con le tensioni τ della corda. Quindi la costante additiva ha la forma $\tau l/2$.

²⁹Vorremmo mettere in evidenza che questa "assenza di rigore" è necessaria. Perché qui

Per quanto riguarda l'energia cinetica, il procedimento è banalissimo, perché si ha $\dot{u}_i = \tilde{u}_t(x_i)$, e quindi, per quanto riguarda i singoli termini che entrano nell'energia cinetica, avremo

$$\dot{u}_i^2 = \tilde{u}_t^2(x_i) .$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, evidentemente la corrispondenza con il caso del modello discreto avverrà mediante la relazione tra incrementi finiti e derivate, come data dallo sviluppo di Taylor (o Taylor–Lagrange) di una funzione. Nel nostro caso, consideriamo un punto del reticolo, di ascissa $x = x_i = ia$. Ricordando la formula di interpolazione (4.5.1) $u_i = \tilde{u}(x_i)$, avremo (trascuriamo la dipendenza dal tempo, pensando a un tempo t fissato)

$$u_{i+1} - u_i = \tilde{u}(x_i + a) - \tilde{u}(x_i) \quad (4.5.7)$$

e quindi, in virtù della formula di Taylor–Lagrange,

$$u_{i+1} - u_i = \tilde{u}_x(x_i + \vartheta a) \cdot a , \quad (0 \leq \vartheta \leq 1) . \quad (4.5.8)$$

Pertanto, l'energia assume la forma

$$E = \frac{1}{2} \sum_i [m \tilde{u}_t^2(x_i) + ka^2 \tilde{u}_x^2(x_i + \vartheta a)] . \quad (4.5.9)$$

Si presenta qui un passaggio significativo. Infatti vorremmo ora passare al limite $a \rightarrow 0$ (e corrispondentemente $N \rightarrow \infty$), in cui la somma (4.5.9) dovrebbe svolgere il ruolo di una somma di Riemann approssimante un integrale. In tal caso il passo reticolare a diventerà poi il dx dell'integrale. Occorre dunque fattorizzare un fattore a . Ora, nell'energia cinetica ciò avviene in maniera per così dire automatica, perché abbiamo già osservato che si ha $m = \rho a$. Invece nel termine dell'energia potenziale sembra che abbiamo un fattore a di troppo, perché, dopo avere fattorizzato a , resta ancora il fattore ka . È dunque chiaro che, se passiamo al limite in maniera ingenua, tenendo costante il valore di k , otteniamo una teoria in cui il fattore ka tende a zero, e quindi il termine di energia potenziale scompare. Pertanto il sistema ha solo energia cinetica: in altri termini, ogni particella del continuo si muove come se non avesse alcuna interazione con le altre. Si dice in tal caso che si è costruita una *teoria banale*. Una circostanza analoga si presenta in effetti nella teoria quantistica dei campi, e prima ancora si era presentata nella teoria classica dell'interazione di una carica puntiforme con il campo

si sta inventando una nuova teoria, quella del continuo come modello matematico della materia, e l'invenzione di una teoria è sempre un atto libero, che può essere espresso in un teorema solo in una forma surrettizia, nascondendo da qualche parte l'atto di libera invenzione. I soli requisiti che si possono porre sono quelli a) della consistenza interna, b) della corrispondenza od analogia con un altro modello di riferimento (nel nostro caso il modello discreto).

elettromagnetico, nella quale per la prima volta venne introdotta il cosiddetto *procedimento di rinormalizzazione*, in cui si fa divergere un parametro caratteristico del sistema.^{30 31}

Ma, in effetti, il prototipo di procedimenti di questo tipo si ha proprio nel caso della corda vibrante. Infatti, per ottenere una teoria non banale è necessario che nel compiere il passaggio al limite si introduca una precisa *prescrizione*, ovvero: nel mandare $a \rightarrow 0$ occorre contemporaneamente mandare $k \rightarrow \infty$ in maniera tale che il limite di ka sia finito, diciamo

$$ka \rightarrow \tau, \tag{4.5.10}$$

dove τ è una costante positiva (ad esempio, si prenda $k = \tau/a$).

Infatti noi sappiamo fenomenologicamente, come abbiamo ricordato sopra, che nella corda esiste una tensione, e d'altra parte è spontaneo che la tensione debba essere identificata, nel modello discretizzato, con la forza che si esercita tra due punti adiacenti. Ora, si verifica immediatamente che, per a finito, la quantità ka rappresenta proprio il modulo della forza che si esercita tra particelle adiacenti, e quindi la tensione, *solamente nel caso in cui la corda sia poco inclinata*, cioè si abbia (si ricordi che l'inclinazione della corda è misurata da \tilde{u}_x)

$$\tilde{u}_x^2 \ll 1 \tag{4.5.11}$$

(la condizione (4.5.11) di piccola inclinazione viene solitamente descritta come corrispondente alle *piccole oscillazioni della corda*). Infatti, ben sappiamo che la forza esercitata da una molla ideale su un punto che si trovi a un suo estremo ha modulo kr , dove r è la lunghezza della molla. Nel nostro caso, il quadrato di tale lunghezza $r_{i,i+1}$ è dato dalla (4.5.3), e dunque si ha

$$r_{i,i+1} = a\sqrt{1 + \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{a^2}} \simeq a\sqrt{1 + \tilde{u}_x^2},$$

³⁰Infatti, nell'ambito della interazione tra particella e campo elettromagnetico, nel compiere il limite di particella puntiforme si ottiene una teoria banale (la particella si muove come se non avesse alcuna interazione con il campo elettromagnetico) se non si introduce una opportuna rinormalizzazione di massa, in cui si manda a $-\infty$ la massa meccanica (o *massa nuda*) della particella. Ciò fu discusso per la prima volta da Lorentz e Abraham, attorno al 1903, ed è illustrato in maniera efficacissima nel capitolo 28 del bellissimo manuale di Feynman sull'elettromagnetismo. Si tratta del fatto che, quando una carica di raggio r si muove uniformemente con una velocità v , essa è accompagnata da un campo elettromagnetico (il trasformato di Lorentz del campo Coulombiano "attaccato" a una carica fissa) che ha una certa quantità di moto proporzionale a v . Quindi tutto va "come se" la particella possedesse, oltre alla sua massa meccanica, una "massa elettromagnetica", e si trova che questa diverge quando tende a zero il raggio r della particella, allo stesso modo in cui diverge l'energia del corrispondente campo Coulombiano (cioè diverge come $1/r$).

³¹Tuttavia la teoria banale può in taluni casi manifestarsi come una utile approssimazione. Un esempio significativo è quello del lavoro E. Fucito et al., *Approach to equilibrium in a chain of nonlinear oscillators*, *Journal de Physique* **43**, 707–713 (1982), compiuto da un gruppo di studiosi attorno a G. Parisi in relazione al cosiddetto *problema di Fermi–Pasta–Ulam*.

ovvero

$$r_{i,i+1} \simeq a \quad \text{per} \quad u_x^2 \ll 1 .$$

Dunque, nel caso di piccole oscillazioni ($u_x^2 \ll 1$) si ha (come doveva essere evidente a priori) $kr_{i,i+1} \simeq ka$, sicché ka coincide con il modulo della forza tra particelle adiacenti, e dunque con la tensione τ .³²³³

In conclusione, l'energia E della corda nel modello continuo (e nell'approssimazione delle piccole oscillazioni) si scrive come l'integrale di una *densità di energia* ϵ

$$E = \int_o^l \epsilon \, dx , \quad (4.5.12)$$

dove la *densità di energia* ϵ è definita (denotando $\tilde{u}(x, t) \equiv u(x, t)$) da

$$\epsilon = \frac{1}{2} \rho u_t^2 + \frac{1}{2} \tau u_x^2 = \frac{\rho}{2} (u_t^2 + c^2 u_x^2) , \quad (4.5.13)$$

ed è stata introdotta la quantità c (delle dimensioni di una velocità) definita da $c^2 = \tau/\rho$ (essendo τ e ρ la tensione e la densità). Poiché ci siamo messi in *condizioni di omogeneità*, avendo assunto che m e k sono indipendenti dall'indice i , avremo anche che ρ e τ sono costanti, sicché anche la velocità caratteristica c è costante, indipendente da x .

È allora anche ovvio che la lagrangiana L della corda ha la forma dell'integrale di una *densità di lagrangiana* \mathcal{L} ,

$$L = \int_o^l \mathcal{L} \, dx , \quad (4.5.14)$$

dove la *densità di lagrangiana* \mathcal{L} è data da

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} (u_t^2 - c^2 u_x^2) . \quad (4.5.15)$$

A questo punto, avendo a disposizione la lagrangiana del modello continuo di filo perfetto, utilizzando il principio di azione che viene lungamente discusso nel capitolo ad esso dedicato in queste note, possiamo ottenere “automaticamente” l'equazione di moto della corda come equazione di Eulero–Lagrange relativa all'azione $S = \int L dt = \int \int \mathcal{L} \, dx dt$, ovvero

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = 0 .$$

³²Il fatto che nel passaggio al continuo ($a \rightarrow 0$) si debba compiere lo “strano” artificio di mandare k all'infinito può forse essere descritto nel modo seguente. Sappiamo che la corda è costituita da molecole a distanza finita, e quindi è da se stessa “discretizzata”. Tuttavia, per comodità di descrizione matematica, pretendiamo di descrivere la corda *come se fosse un continuo*. Bene. Questo possiamo farlo per nostra comodità, e quindi mandiamo a a zero, ma paghiamo questo con la necessità di mandare k all'infinito.

³³Nel caso generale in cui u_x^2 non è trascurabile, la tensione, identificata con il modulo della forza tra particelle adiacenti, è data da $\tau = ka\sqrt{1 + u_x^2}$.

Si verifica immediatamente che si ottiene in tal modo l'equazione di d'Alembert

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 .$$

b: equazioni del moto

Su questo punto ritorneremo più sotto, e vogliamo ora invece eseguire l'esercizio di ottenere l'equazione di d'Alembert in maniera diretta, con un procedimento di discretizzazione analogo a quello seguito sopra per ottenere l'energia e la lagrangiana. Scriveremo dunque le equazioni di moto per il sistema discretizzato, passando poi al continuo. Vedremo allora che, in luogo della formula (4.5.8) degli incrementi finiti coinvolgente la derivata prima, avremo bisogno della analoga formula coinvolgente la derivata seconda

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = \tilde{u}_{xx}(x_i) \cdot a^2 + O(a^4) . \tag{4.5.16}$$

Questa si ottiene nel modo seguente.³⁴ Dalla formula di Taylor al secondo ordine (si ricordi $u_i = \tilde{u}(x_i)$) si ha

$$u_{i+1} = \tilde{u}(x_i + a) = \tilde{u}(x_i) + \tilde{u}_x(x_i) \cdot a + \tilde{u}_{xx}(x_i) \cdot a^2/2 + O(a^3) , \tag{4.5.17}$$

ovvero

$$u_{i+1} - u_i = \tilde{u}_x(x_i) \cdot a + \tilde{u}_{xx}(x_i) \cdot a^2/2 + O(a^3) , \tag{4.5.18}$$

Analogamente si ha

$$u_{i-1} - u_i = -\tilde{u}_x(x_i) \cdot a + \tilde{u}_{xx}(x_i) \cdot a^2/2 + O(a^3) . \tag{4.5.19}$$

Sommando si ottiene allora³⁵ la (4.5.16).

Ora, le equazioni del moto del sistema discretizzato sono evidentemente³⁶

³⁷

$$m\ddot{u}_i = -k(u_i - u_{i+1}) - k(u_i - u_{i-1}) , \quad (i = 1, \dots, N) ,$$

³⁴Intuitivamente, si può anche pensare nel modo seguente. Si ha $u_{i+1} - u_i \simeq a\tilde{u}_x(x_i + a/2)$ e analogamente $u_i - u_{i-1} \simeq a\tilde{u}_x(x_i - a/2)$ e quindi $(u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1}) \simeq a[(\tilde{u}_x(x_i + a/2)) - (\tilde{u}_x(x_i - a/2))]$ $\simeq a^2\tilde{u}_{xx}(x)$.

³⁵Dalle formule sopra scritte si otterrebbe $+O(a^3)$. Ma si osserva che nella somma si cancellano i due termini proporzionali ad a^3 allo stesso modo in cui si cancellano i termini proporzionali ad a .

³⁶Si ricordi l'esempio di due punti P_1, P_2 su una retta, soggetti all'azione di una molla ideale che li congiunge. Allora, se x_1, x_2 sono le ascisse dei due punti, la forza F_1 agente su P_1 e la forza F_2 agente su P_2 sono rispettivamente $F_1 = -k(x_1 - x_2)$ e $F_2 = -k(x_2 - x_1)$. Nel nostro caso, il punto i -esimo è soggetto all'azione delle due molle che lo congiungono ai punti $i + 1$ ed $i - 1$. Inoltre, ci importa solo la proiezione dell'equazione di Newton sull'asse z , perchè l'accelerazione del punto i -esimo lungo l'asse x è nulla (dato che si è imposto che le oscillazioni siano trasversali).

³⁷Se si vogliono dedurre le equazioni (4.5.20) dalla Lagrangiana (4.5.6) del sistema discretizzato, occorre tener presente che la variabile u_i compare in due termini della lagrangiana, e non in uno. Ad esempio, la variabile u_3 appare in $(1/2)k[(u_4 - u_3)^2 + (u_3 - u_2)^2]$.

ovvero

$$m\ddot{u}_i = k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (4.5.20)$$

Esprimendo dunque la massa in termini della densità, $m = \rho a$, e usando la formula di interpolazione di Taylor–Lagrange (4.5.16), e dividendo per a , la (4.5.20) assume la forma

$$\rho\ddot{u}_i = ka \cdot \tilde{u}_{xx}(x_i) + O(a^4).$$

Fissiamo ora un punto del reticolo, e denotiamo con x la sua ascissa. La formula appena ottenuta si scrive allora

$$\rho\tilde{u}_{tt}(x, t) = ka \cdot \tilde{u}_{xx}(x, t) + O(a^4). \quad (4.5.21)$$

Pertanto, passando al limite per $a \rightarrow 0$, ma tenendo fisso il punto x ,³⁸ e ricordando la prescrizione $ka \rightarrow \tau$, dove τ è una costante coincidente con la tensione (almeno nell'approssimazione di piccole oscillazioni), si ottiene l'equazione di d'Alembert nella incognita $\tilde{u}(x, t)$, che ora denoteremo invece con $u(x, t)$,³⁹

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c^2 = \tau/\rho.$$

Si osservi come nella deduzione dell'equazione di d'Alembert non si sia mai usato il fatto che la corda abbia una estensione finita, cioè la limitazione $0 \leq x \leq l$. La corda può essere estesa su tutto l'asse delle x . Infatti, come si vede benissimo dalla (4.5.21), l'equazione ha carattere *locale*: preso un reticolo di passo a sull'asse delle ascisse, un punto del reticolo avente ascissa x subisce l'azione soltanto dei punti adiacenti, di ascissa $x + a$, $x - a$ (primi vicini, ingl. *nearest neighbors*), e questa azione “locale” viene tradotta analiticamente nella presenza della derivata seconda \tilde{u}_{xx} della funzione interpolante.

Tecnicamente, per il calcolo di $\frac{\partial L}{\partial u_i}$ conviene, nella somma che figura in L , usare come indice su cui si somma (indice *muto*, in inglese *dummy*, che significa fantoccio, perché scompare quando è stata eseguita la somma) una lettera diversa, ad esempio j . Allora l'energia potenziale V (che è la parte di L in cui compare u_i) è data da

$$V = (1/2)k \sum_j (u_{j+1} - u_j)^2.$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} (u_{j+1} - u_j)^2 &= \frac{\partial (u_{j+1} - u_j)^2}{\partial (u_{j+1} - u_j)} \frac{\partial (u_{j+1} - u_j)}{\partial u_i} \\ &= 2(u_{j+1} - u_j) (\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j}) \end{aligned}$$

e pertanto

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = k [(u_i - u_{i-1}) - (u_{i+1} - u_i)] = -k (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}).$$

³⁸Ricordando $ia = x$ ed $a = a(N) = l/(N+1)$, abbiamo allora $i = i(N) = (N+1)x/l$.

³⁹Per la discussione di un modo in cui si possa rendere rigorosa la connessione tra il sistema di equazioni differenziali ordinarie e l'equazione alle derivate parziali in questo caso, si veda G.Gallavotti, *Meccanica elementare* (Boringhieri, Torino), proposizione 10, pag 264.

4.6 Soluzione dell'equazione di d'Alembert: metodo di d'Alembert e fenomeni di propagazione

Consideriamo l'equazione di d'Alembert *definita su tutto l'asse delle x* (il caso con $0 \leq x \leq l$ verrà discusso più avanti),

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.6.1)$$

dove c è una costante. Si ha allora il

Teorema 1 (Soluzione di d'Alembert). *La soluzione generale⁴⁰ dell'equazione di d'Alembert monodimensionale (4.6.1) sulla retta è*

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad (4.6.2)$$

dove f, g sono funzioni arbitrarie.

Lemma 1 *Si consideri l'equazione*

$$u_{xy} = 0, \quad (4.6.3)$$

nell'incognita $u = u(x, y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Allora la soluzione generale è

$$u(x, y) = f(x) + g(y), \quad (4.6.4)$$

con f, g funzioni arbitrarie.

Dimostrazione. La (4.6.3) si integra a vista. Infatti l'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ si scrive anche

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0,$$

sicché, per definizione di derivata parziale, si ha che $\frac{\partial u}{\partial x}$ non dipende da y , ovvero vale

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F(x), \quad (4.6.5)$$

dove F è una funzione arbitraria. Avendo fissato tale funzione F di una sola variabile, e denotando con $f(x)$ una sua primitiva, ancora per definizione di derivata

⁴⁰Per *soluzione generale* si intende una famiglia di funzioni che contiene tutte le soluzioni. Ad esempio, la funzione $f(x - ct)$ è soluzione, ma non è la soluzione generale. Analogamente, per l'equazione dell'oscillatore armonico $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ la funzione $x(t) = a \cos(\omega t)$ è soluzione ma non la soluzione generale, la quale si scrive ad esempio nella forma $x(t; a, b) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$.

parziale si ha⁴¹ che la relazione (4.6.5) è equivalente a

$$u = f(x) + g(y) ,$$

dove g è una funzione arbitraria. Poiché l'arbitrarietà di F comporta l'arbitrarietà della sua primitiva f , segue l'asserto. **Q.E.D.**

Dimostrazione. del teorema. Passando alle variabili

$$\xi = x + ct , \quad \eta = x - ct$$

(lettere greche ξ ed η), e denotando con U la funzione composta, $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$, si verifica che l'equazione di d'Alembert (4.6.1) è equivalente a $-4U_{\xi\eta} = 0$, ovvero a

$$U_{\xi\eta} = 0 . \tag{4.6.6}$$

La verifica diretta è immediata; tuttavia è più semplice osservare che, analogamente alla identità algebrica $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, così si ha anche l'identità operatoriale

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) , \tag{4.6.7}$$

perché è vero che $\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = 0$ (teorema di Schwarz). È allora spontaneo introdurre ξ ed η come sopra, e si verifica immediatamente che vale⁴²

$$\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} , \quad \frac{\partial}{c\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} = 2 \frac{\partial}{\partial \eta} ,$$

e dunque la (4.6.1) è equivalente alla (4.6.6). Si applica poi il Lemma 1 alla funzione $U(\xi, \eta)$. **Q.E.D.**

Come è ben noto, la funzione $f(x - ct)$ descrive una forma che trasla rigidamente verso destra con velocità c , e analogamente $g(x + ct)$ descrive una

⁴¹Per funzioni $u = u(x)$ di una sola variabile, l'analogia della relazione (4.6.5), ovvero $\frac{du}{dx} = F(x)$, è equivalente a $u(x) = f(x) + c$, dove f è una primitiva di F (ovvero tale che $f' = F$) e c una costante arbitraria. Nel nostro caso, si ha una funzione di due variabili $u = u(x, y)$ per cui vale la (4.6.5). Si lavora allora pensando a y come a un parametro, di cui si fissa un ben determinato valore. Dunque siamo ancora nel caso di una sola variabile, e per quanto appena detto la (4.6.5) risulta equivalente a

$$u = f(x) + c ,$$

dove la costante c può assumere valori diversi per ognuno dei valori del parametro y , ovvero è una funzione arbitraria di y ,

$$c = c(y) .$$

Possiamo poi, se si preferisce, denotare la funzione $c = c(\cdot)$ con la più familiare lettera g .

⁴²Da $x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $ct = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$ si ha $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial ct}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial ct} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial ct}$, e analogamente per $\frac{\partial}{\partial \eta}$.

forma che trasla rigidamente verso sinistra con velocità di modulo c (ovvero trasla sull'asse delle x con velocità $-c$). Infatti, la funzione f assume al variare del tempo t il medesimo valore in punti $x = x(t)$ per cui sia costante l'argomento della funzione stessa, ovvero in punti $x = x(t)$ tali che sia $x(t) - ct = \text{cost}$, sicché $\dot{x} = c$ (dunque, punti che si spostano con velocità costante c); analogamente per $g(x + ct)$. Si dice che le due famiglie di curve $x - ct = \text{cost}$, $x + ct = \text{cost}$ nel piano (x, t) sono *le caratteristiche* dell'equazione di d'Alembert (4.6.1).⁴³ Su ciò torneremo più sotto in relazione al problema di Cauchy.⁴⁴ Dunque è chiaro che l'equazione di d'Alembert (4.6.1) descrive fenomeni propagatori con velocità di modulo c .

Esercizio: invarianza dell'equazione di d'Alembert sotto trasformazioni di Lorentz. Per dimostrare il teorema precedente abbiamo eseguito un cambiamento di variabili, passando da (x, t) a $(x + ct, x - ct)$. Ora, in generale sotto un cambiamento di variabili avviene che una equazione cambia di forma, e anzi noi abbiamo proprio utilizzato questo fatto, eseguendo un cambiamento astuto che mettesse l'equazione in forma così semplice da potere essere integrata a vista. Ma possono esistere dei cambiamenti di variabili sotto i quali una equazione non cambia forma. Nel nostro caso, con un semplice esercizio si verifica immediatamente che l'equazione di d'Alembert non cambia forma se si esegue una trasformazione di Lorentz con parametro v , ovvero $(x, t) \rightarrow (x', t')$ con

$$x' = \gamma(x - vt), \quad t' = \gamma(t - vx/c^2), \quad (\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2})$$

(si pensi che c sia la velocità della luce, e v la velocità di traslazione di un secondo riferimento inerziale). Il fatto curioso è che questa osservazione fu compiuta ben prima del 1905, precisamente da Voigt in una pubblicazione del 1887 sui Göttingen Nachrichten (riguardante l'effetto Doppler nei corpi elastici), che Lorentz stesso cita nel suo libro *Theory of electrons*, dicendosi dispiaciuto del fatto che il lavoro di Voigt gli fosse sfuggito.⁴⁵ Dal punto di vista matematico, questa simmetria dell'equazione di d'Alembert sotto trasformazioni di Lorentz è la traduzione nell'ambito degli operatori differenziali della corrispondente identità sulla metrica, che si esprime come

$$c^2 t^2 - l^2 = c^2 t'^2 - l'^2,$$

⁴³Sarebbe questo il punto appropriato per illustrare l'equazione del trasporto. Si spera di discutere questo punto in una prossima versione delle dispense.

⁴⁴Si osservi per inciso che l'espressione della soluzione generale (4.6.2) ha senso anche per funzioni f e g che presentino delle discontinuità. Si dice che in tal caso si ha una *soluzione generalizzata* dell'equazione delle onde. Si può dire allora che *le caratteristiche trasportano le discontinuità*. In effetti, si può mostrare che è proprio il trasporto di discontinuità che deve essere considerato come la caratterizzazione matematica del fenomeno fisico della *popagazione di segnali*.

⁴⁵Infatti Lorentz stesso, in H.A. Lorentz, *Theory of electrons*, Dover New York, pag 198, dice: "In a paper "Über das Doppler'sche Princip" published in 1887 (Göttingen Nachrichten, pag 41) and which to my regret escaped my notice all these years, Voigt has applied to equations of the form (6) (cioè di d'Alembert) a transformation equivalent to the formulae (... di Lorentz). The idea of the transformation used above might therefore have been borrowed from Voigt and the proof that it does not alter the form of the equations of the ether is contained in his paper". Si veda anche R. Dugas, *Histoire de la Mécanique*, Editions du Griffon (Neuchatel, 1950).

dove

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad l'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Infine, facciamo presente che queste proprietà riguardanti le trasformazioni di Lorentz e l'equazione di d'Alembert sono, per lo spazio-tempo, l'analogo di ben note proprietà di invarianza della metrica e dell'equazione di Laplace sotto rotazioni nello spazio euclideo tridimensionale. Infatti sotto rotazioni si ha

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

e corrispondentemente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Veniamo ora al *problema di Cauchy* (o delle condizioni iniziali) per l'equazione di d'Alembert (4.6.1).

Ricordiamo che ad esempio per l'equazione di Newton $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ il problema di Cauchy consiste nel determinare la soluzione $x(t)$ soddisfacente le condizioni iniziali $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, dove x_0 e v_0 sono due numeri arbitrari (dati iniziali, ingl. *initial data*) rappresentanti la posizione e la velocità iniziali della particella. Conoscendo la soluzione generale $x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$ dipendente da due parametri a , b , si calcola $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b\omega$, e dunque l'imposizione delle condizioni iniziali comporta $a = x_0$, $b\omega = v_0$, e la soluzione del problema di Cauchy è $x(t; x_0, v_0) = x_0 \cos(\omega t) + (v_0/\omega) \sin(\omega t)$.

Per l'equazione di d'Alembert si procede in maniera del tutto analoga (proprio perché tale equazione non è altro che il sistema di equazioni di Newton per un sistema di un continuo di punti). Per l'incognita $u = u(x, t)$ che descrive la forma della corda al tempo t (e dunque la posizione della particella x -esima, per ogni x), le condizioni iniziali saranno allora $u(x, 0) = u_0(x)$, $u_t(x, 0) = v_0(x)$, dove $u_0(x)$, $v_0(x)$ sono due funzioni arbitrarie, che danno rispettivamente per ogni punto (individuato da x) la posizione e la velocità, ovvero descrivono la forma (o configurazione) e il campo di velocità iniziali della corda. Il problema che resta allora è di determinare le forme di f e g mediante i dati iniziali, ovvero mediante le funzioni u_0 , v_0 . Tale problema è risolto dal seguente

Teorema 2 *Il problema di Cauchy per l'equazione di d'Alembert monodimensionale,*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{4.6.8}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{4.6.9}$$

$$u_t(x, 0) = v_0(x), \tag{4.6.10}$$

dove u_0 , v_0 sono due arbitrarie funzioni (dati iniziali), ha la soluzione unica

$$u(x, t; u_0, v_0) = \frac{1}{2} [u_0(x - ct) + u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds. \tag{4.6.11}$$

Dimostrazione. Basta determinare le funzioni f, g che figurano nella soluzione generale $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$, imponendo le condizioni iniziali. Si ha così

$$f(x) + g(x) = u_0(x) \tag{4.6.12}$$

$$-cf'(x) + cg'(x) = v_0(x), \tag{4.6.13}$$

dove il simbolo ' denota derivata rispetto all'argomento. Integrando la seconda equazione tra un estremo arbitrario a ed x si ha allora per le due incognite f e g il sistema delle due equazioni

$$f(x) + g(x) = u_0(x) \tag{4.6.14}$$

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{c} \int_a^x v_0(s) ds + \alpha, \tag{4.6.15}$$

dove $\alpha = g(a) - f(a)$, e si è denotata con s la variabile (muta) di integrazione. Per somma e sottrazione segue allora

$$2f(x) = u_0(x) - \frac{1}{c} \int_a^x v_0(s) ds - \alpha \tag{4.6.16}$$

$$2g(x) = u_0(x) + \frac{1}{c} \int_a^x v_0(s) ds + \alpha. \tag{4.6.17}$$

Le forme di f e g come funzioni dei loro argomenti sono così definite, e per avere la soluzione basta allora valutare f in $(x - ct)$ e g in $(x + ct)$. Osservando

$$-\int_a^{x-ct} + \int_a^{x+ct} = \int_{x-ct}^a + \int_a^{x+ct} = \int_{x-ct}^{x+ct},$$

segue l'asserto.

Q.E.D.

Con riferimento alla Fig. 4.3, si vede pertanto che il valore della soluzione nel punto $P = (x, ct)$ del piano x, ct (spaziotempo) è determinato solo da una porzione dei dati iniziali $u_0 = u_0(x), v_0 = v_0(x)$, precisamente quella relativa ai valori di x nell'intervallo $(x - ct, x + ct)$ dell'asse x (definito da $t = 0$); in effetti essa è determinata dai valori di u_0 agli estremi e dai valori di v_0 su tutto tale intervallo.

Infatti, consideriamo ad esempio il termine $u_0(x - ct)$ che figura nella soluzione (4.6.11). Si deve ricordare che si ha $u_0(x - ct) = u(x - ct, 0)$, e quindi questo termine riguarda la funzione u ristretta all'asse delle x (corrispondente a $t = 0$). Importa tuttavia solo il valore che tale funzione assume nel punto di ascissa $x - ct$, ovvero nel punto $A = (x - ct, 0)$ del piano con coordinate x, ct . Ora, il punto A si ottiene dal punto $P = (x, ct)$ di tale piano "scendendo del tratto ct e spostandosi a sinistra per un tratto ancora uguale a ct ", ovvero si passa da P ad A muovendosi lungo la retta che passa per P ed è parallela alla bisettrice $x = ct$. Analogamente, per individuare il punto

⁴⁶Si ricordi $\frac{\partial}{\partial t} f(x - ct) = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial(x-ct)} \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} = -cf'(x - ct)$. Si valuta poi in $t = 0$.

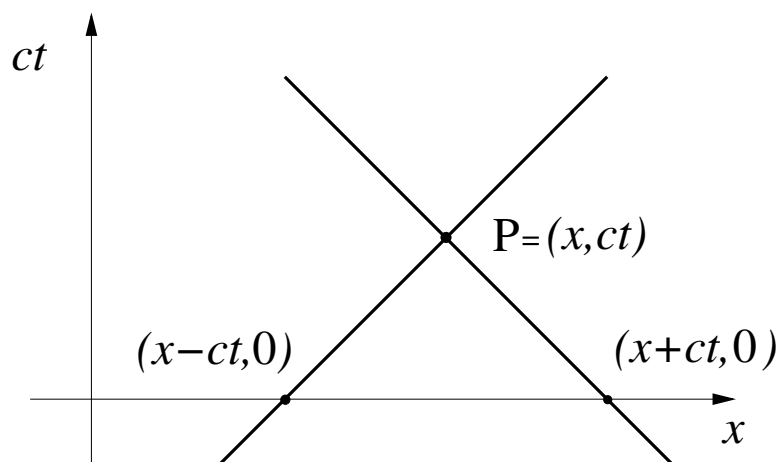


Figura 4.3: Analogo del cono di luce per la soluzione dell'equazione di d'Alembert. Il valore della soluzione nel punto $P = (x, ct)$ dello spaziotempo è determinato dai valori del campo e della sua derivata temporale nei punti entro la falda inferiore del cono di luce passante per P (passato), mentre esso influenza solo i punti entro la falda futura di quel cono di luce (futuro).

$(x + ct, 0)$, ci si muove sulla parallela all'altra bisettrice $x = -ct$. Se poi i dati iniziali fossero stati assegnati in relazione a un generico tempo $t_0 < 0$, si stabilirebbe analogamente che il valore della soluzione nel punto (x, ct) sarebbe determinato dai dati iniziali che si trovano, sull'asse $t = t_0$, all'interno o sul bordo dell'intervallo avente per estremi $x - c(t - t_0)$ ed $x + c(t - t_0)$, e il bordo sarebbe ancora determinato con l'analogo procedimento.⁴⁷⁴⁸ I valori dei dati iniziali fuori di tale intervallo contribuiscono invece a determinare il valore della soluzione in x a tempi maggiori di t : è questo un altro aspetto del carattere propagatorio dell'equazione di d'Alembert, che coinvolge le *linee caratteristiche* $x \pm ct = \text{cost.}$

⁴⁷In altri termini, pensando al caso in cui c è la velocità della luce e quindi il piano x, ct è una carta dello spaziotempo, possiamo dire che il valore della soluzione dell'equazione di d'Alembert nel punto $P = (x, ct)$ dello spaziotempo *dipende* dai valori che u ed u_t assumono entro la falda inferiore (passato) del cono di luce passante per il punto $P = (x, ct)$, o sul suo bordo. Per questo motivo, dal punto di vista analitico il cono di luce passato viene detto *dominio di dipendenza*.

⁴⁸Dunque, il valore della soluzione in (x, ct) dipende dai valori di u e di u_t nel dominio di dipendenza. Viceversa ci si può domandare su quale dominio dello spaziotempo abbia influenza lo stato della corda (i valori di u e u_t) nel punto $P = (x, ct)$. Si definisce *l'insieme di influenza* di $P = (x, ct)$ come l'insieme dei punti (x', ct') il cui dominio di dipendenza contiene (x, ct) . Si verifica immediatamente che il dominio di influenza di P è proprio la falda futura del cono uscente da P stesso. Infatti se un punto Q è esterno ad essa, è evidente che la falda del passato del cono uscente da Q non contiene P . Se viceversa ...

Nel caso di due o tre dimensioni spaziali, la discussione è alquanto più complicata e non viene qui riportata; la trattazione è molto semplice solo per soluzioni particolari corrispondenti a onde piane o onde sferiche.

Osservazione Conformemente a quanto già anticipato in una nota, l'espressione (4.6.11) della soluzione del problema di Cauchy ha senso anche per dati iniziali discontinui. Si ha in tal caso una *soluzione generalizzata* dell'equazione delle onde, descrivente la propagazione di segnali.

Osservazione (*Dipendenza continua dai dati iniziali.*) Poiché l'espressione (4.6.11) della soluzione fornisce esplicitamente la dipendenza dai dati iniziali (le funzioni u_0, v_0), è possibile controllare direttamente che nel caso dell'equazione di d'Alembert monodimensionale qui considerato la soluzione dipende con continuità dai dati iniziali. Anzi, la dipendenza è addirittura lineare. Così, se $u_0 + \delta u_0, v_0 + \delta v_0$ sono altri dati iniziali (con $\delta u_0, \delta v_0$ funzioni arbitrarie), si ha

$$u(x, t; u_0 + \delta u_0, v_0 + \delta v_0) - u(x, t; u_0, v_0) \quad (4.6.18)$$

$$= u(x, t; \delta u_0, \delta v_0) \quad (4.6.19)$$

$$= \frac{1}{2}[\delta u_0(x - ct) + \delta u_0(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \delta v_0(s) ds, \quad (4.6.20)$$

e da questo appare con tutta evidenza che, *per ogni t finito*, la differenza delle soluzioni tende a zero quando la differenza dei dati iniziali tende a zero.⁴⁹

4.7 Soluzione dell'equazione di d'Alembert: metodo della separazione delle variabili (o di Fourier) per la corda con estremi fissi; il problema dello spettro

Un metodo tecnicamente alquanto diverso per la soluzione dell'equazione di d'Alembert, e più in generale delle equazioni a derivate parziali lineari, è quello delle *serie di Fourier*.⁵⁰ Tale metodo si dice *metodo di separazione delle variabili*, e consiste tecnicamente nella ricerca di *soluzioni particolari* fattorizzate nel prodotto di funzioni di una sola variabile, sicché esso riduce il problema originario a un problema alle derivate ordinarie. Si ottengono in tal modo infinite soluzioni particolari (o elementari), e allora, nel caso in

⁴⁹Denotando con δu la differenza delle due soluzioni, e con $\|\cdot\|$ la norma del sup:

$$\|f\| = \sup_x |f(x)|,$$

si calcola esplicitamente

$$\|\delta u\| \leq \|\delta u_0\| + |t| \|\delta v_0\|.$$

Si noti tuttavia che la dipendenza continua dai dati iniziali (e dai parametri) è un fatto generico solo per le equazioni a derivate ordinarie, mentre è non generico per le equazioni a derivate parziali. Si veda a questo proposito il famoso *controesempio di Hadamard* per l'equazione di Laplace, illustrato in appendice.

⁵⁰Per domini limitati; altrimenti si hanno *integrali* di Fourier.

cui si considerino *equazioni lineari omogenee*, si ottiene la soluzione generale semplicemente per combinazione lineare delle soluzioni elementari ottenute. Ciò è dovuto ad una proprietà fondamentale delle equazioni lineari (omogenee) che si dice *principio di sovrapposizione*, e che in realtà è un teorema: se u_1 ed u_2 sono due soluzioni particolari di una equazione lineare (omogenea), allora ogni combinazione lineare $u = au_1 + bu_2$ è anch'essa soluzione. La proprietà anzi si estende al caso di infinite soluzioni, ad esempio un insieme numerabile: se le funzioni u_n , $n = 1, 2, \dots$ sono soluzioni, anche la serie $\sum_n c_n u_n$ è soluzione, purché i coefficienti c_n tendano a zero abbastanza rapidamente per $n \rightarrow \infty$ da garantire che la serie converga e sia derivabile termine a termine. Il caso più significativo è addirittura quello delle funzioni analitiche, per le quali i coefficienti c_n tendono a zero esponenzialmente al crescere di n , sicché in pratica tutto va come se ci fosse solo un numero finito piccolo di coefficienti non nulli. Questo fatto risulta essere di grande rilevanza per l'armonia musicale.

Vedremo che il metodo di separazione delle variabili conduce spontaneamente alla soluzione di un problema agli autovalori in uno spazio vettoriale di dimensione infinita. Si tratta anzi del primo caso nella storia dell'umanità in cui sia stato risolto un problema di tale tipo. Abbiamo ricordato sopra che cosa si intende per problema agli autovalori in \mathbb{R}^n . È assegnato un operatore lineare, e sappiamo che, in una fissata base, esso è definito da una matrice A . Questa matrice, applicata ad un generico vettore \mathbf{x} , lo trasformerà in un altro vettore $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Possono però esistere degli speciali vettori \mathbf{x} aventi la proprietà

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} ,$$

ovvero la proprietà che il vettore trasformato è parallelo a quello di partenza. Ognuno di questi speciali vettori viene chiamato *autovettore* (ingl. *eigenvector*) e il corrispondente numero λ viene chiamato *autovalore* (ingl. *eigenvalue*). Da un punto di vista fisico gli autovalori che si determineranno con il procedimento di separazione delle variabili sono particolarmente importanti, perché essi forniscono nel caso del problema di d'Alembert le possibili frequenze di vibrazione della corda e nel caso dell'equazione di Schrodinger le possibili energie del sistema studiato.⁵¹

Illustriamo dunque il metodo di separazione delle variabili nel caso dell'equazione di d'Alembert unidimensionale

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - u_{xx} = 0 , \quad (c^2 = \text{cost}) , \quad (4.7.1)$$

in cui l'incognita $u(x, t)$ è definita nel dominio $(x, t) \in [0, l] \times \mathbb{R}$, con *condizioni al contorno* di estremi fissi, precisamente condizioni di annullamento al bordo (o di Dirichlet)

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 . \quad (4.7.2)$$

⁵¹Proprio per questo motivo il famoso lavoro in cui Schrödinger eseguì il calcolo dei livelli di energia dell'atomo di idrogeno con la sua equazione (1925) ha il titolo significativo "*Quantisierung als Eigenwert Problem*", cioè quantizzazione come problema agli autovalori.

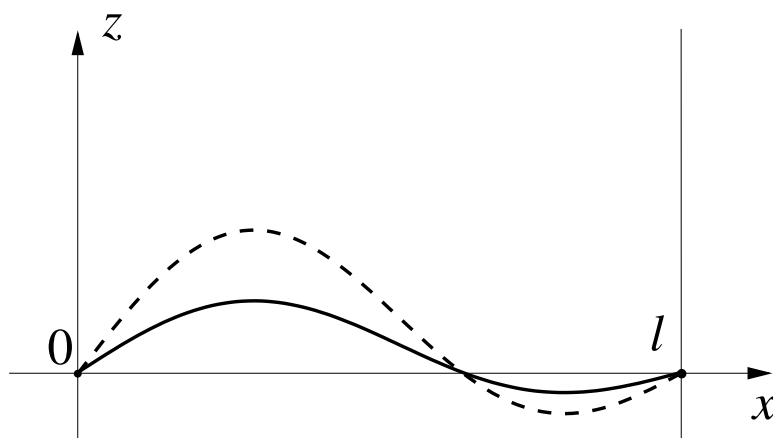


Figura 4.4: Onda stazionaria: ad ogni tempo t , la forma della corda (linea tratteggiata) è un multiplo (detto ampiezza) della forma al tempo iniziale (linea a tratto continuo). In particolare, i nodi e i ventri non si spostano. L'onda stazionaria della figura è stata ottenuta sovrapponendo il modo fondamentale ($n = 1$) e la prima armonica ($n = 2$), rispettivamente con coefficienti 1 ed 1.2.

a: Separazione delle variabili

Cominciamo allora col cercare se esistono *soluzioni particolari fattorizzate*, ovvero, nel nostro caso, soluzioni della forma (“ s ” sta per “spaziale”)

$$u(x, t) = s(x) q(t) . \quad (4.7.3)$$

Nel nostro problema, in cui una delle variabili è il tempo, tali soluzioni hanno il nome di *onde stazionarie*,⁵² perché la forma della corda a un tempo qualunque fissato si ottiene da quella al tempo t_0 moltiplicando tutte le altezze per un medesimo fattore indipendente da x , sicché (Fig. 4.4) al variare del tempo si vede la corda “gonfiarsi e sgonfiarsi” mantenendo le stesse posizioni dei nodi (punti x in cui $u = 0$) e dei ventri (punti x in cui il modulo di u è massimo). Si può dunque dire che la funzione $u(x, t) = s(x)q(t)$ ha una *forma* definita dalla funzione $s = s(x)$ e una *ampiezza* dipendente dal tempo definita dalla funzione $q = q(t)$.

Sostituendo la forma tentativa (“*ansatz*”) (4.7.3) nell'equazione (4.7.1)

⁵²Le soluzioni stazionarie non sono incompatibili con il fatto che la soluzione generale è della forma $f(x - ct) + g(x + ct)$, con onde *propagantis* a destra e a sinistra. Ad esempio si ha

$$\sin kx \cos \omega t = \frac{1}{2} [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] ,$$

e dunque si ha un'onda stazionaria che appare come sovrapposizione di due onde propagantis rispettivamente verso destra e verso sinistra. Un argomento generale verrà riportato più sotto.

otteniamo

$$\frac{1}{c^2} s(x) \ddot{q}(t) = s''(x) q(t) , \quad (4.7.4)$$

dove $\ddot{q}(t) \equiv \frac{d^2 q}{dt^2}(t)$, $s''(x) \equiv \frac{d^2 s}{dx^2}(x)$. Il modo classico di procedere è ora di dividere ambo i membri per la funzione $u = sq$, ottenendo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{q}}{q}(t) = \frac{s''}{s}(x) , \quad (4.7.5)$$

cioè la *separazione delle variabili* (il primo membro dipende solo da t , il secondo solo da x). Ciò richiede *necessariamente* che ambo i membri siano uguali ad una medesima costante, diciamo α (*costante di separazione*).⁵³ Dunque si ha

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{q}}{q}(t) = \frac{s''}{s}(x) = \alpha , \quad (4.7.6)$$

ovvero il sistema delle due equazioni⁵⁴

$$s'' - \alpha s = 0 , \quad \ddot{q} - \alpha c^2 q = 0 . \quad (4.7.7)$$

In questo modo, l'originario problema alle derivate parziali è stato ridotto al problema, più semplice, di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie.

b: Equazione spaziale, e problema agli autovalori

Cominciamo a considerare l'equazione spaziale $s''(x) - \alpha s(x) = 0$, che più precisamente, tenendo conto del dominio di definizione e delle condizioni al contorno (4.7.2), porta al problema

$$\frac{d^2}{dx^2} s(x) = \alpha s(x) , \quad 0 \leq x \leq l , \quad s(0) = s(l) = 0 . \quad (4.7.8)$$

Questa equazione coincide con quella del repulsore lineare per $\alpha > 0$ e con quella dell'oscillatore armonico per $\alpha < 0$, se si interpreta x come tempo; solo che ora essa è associata ad un problema con dati al contorno (detto anche *di Sturm–Liouville*) anziché ad un problema ai dati iniziali (*di Cauchy*). Quello che avviene è che l'equazione ha una duplice infinità di soluzioni sia per $\alpha > 0$ sia per $\alpha < 0$ sia per $\alpha = 0$, ma soltanto per un insieme numerabile di valori di α negativi (*autovalori*) si hanno soluzioni nonnulle

⁵³Infatti, più in generale, sia $f(x) = g(y) \forall x, y$. Allora, fissando un particolare valore di y , diciamo $y = y^*$, risulta che $g(y^*)$ ha un valore ben definito. La relazione $f(x) = g(y^*) \forall x$ mostra dunque che f non dipende da x , ovvero si ha $f(x) = \alpha$, e quindi anche $g(y) = f(x) = \alpha$.

⁵⁴Si possono ottenere le (4.7.7) anche direttamente dalla (4.7.4), considerando s ed s'' come due vettori nello spazio funzionale delle funzioni della variabile reale x ; allora dalla (4.7.4), pensando a t come a un parametro, si deduce che quei due vettori sono paralleli, cioè si ha $s'' = \alpha s$. Segue allora anche $\ddot{q} = \alpha c^2 q$.

(autofunzioni) soddisfacenti le condizioni al contorno; evidentemente le autofunzioni saranno determinate a meno di una costante moltiplicativa.⁵⁵⁵⁶

Si ha infatti il seguente

Teorema 3 *Gli autovalori del problema (4.7.8) sono*

$$\alpha_n = -k_n^2, \quad \text{dove } k_n = n\frac{\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.7.9)$$

con corrispondenti autofunzioni

$$s_n(x) = c_n \sin(k_n x), \quad (c_n = \text{cost}). \quad (4.7.10)$$

Dimostrazione. Per $\alpha = 0$ si ha $s''(x) = 0$, dunque $s(x) = ax + b$, e allora le condizioni $s(0) = s(l) = 0$ comportano $a = b = 0$, ovvero $s(x) \equiv 0$.

Per $\alpha > 0$, diciamo $\alpha = k^2$, la soluzione generale è $s_k(x) = a \cosh(kx) + b \sinh(kx)$ (si cercano funzioni le cui derivate seconde coincidano con le funzioni stesse, a meno di un fattore); essendo $s_k(0) = a$, la condizione $s_k(0) = 0$ comporta $a = 0$ e si resta con la soluzione $s_k(x) = b \sinh(kx)$; ma il seno iperbolico si annulla solo nell'origine, e dunque non si può soddisfare la seconda condizione $s_k(l) = 0$.

Per $\alpha < 0$, diciamo $\alpha = -k^2$, si ha la soluzione generale $s_k(x) = a \cos kx + b \sin kx$; allora è $s_k(0) = a$, e la condizione $s_k(0) = 0$ comporta $a = 0$ e si resta con $s_k(x) = b \sin kx$; dunque si ha $s_k(l) = b \sin kl$, e la condizione $s_k(l) = 0$ comporta $kl = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, ovvero $k = k_n \equiv n\pi/l$, $n \in \mathbb{Z}$. D'altra parte è $\sin(-n\pi x/l) = -\sin(n\pi x/l)$, e quindi per $n = -1, -2, -3, \dots$ si ottengono soluzioni multiple delle autofunzioni $\sin(n\pi x/l)$ relative a $n = 1, 2, 3, \dots$. **Q.E.D.**

Quanto alle costanti arbitrarie c_n , è conveniente scegliere

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{l}}, \quad (4.7.11)$$

perché in tal modo le autofunzioni s_n hanno la proprietà⁵⁷ $\int_0^l s_n^2(x) dx = 1$; si dice allora che esse sono *normalizzate*, cioè hanno lunghezza unitaria in un'opportuna norma, come preciseremo sotto.

Esercizio. Mostrare che, nel caso di condizioni al contorno

$$s(0) = 0, \quad s'(l) = 0$$

⁵⁵Si sottintende che si cercano soluzioni *non banali*, cioè non identicamente nulle.

⁵⁶Si deve riguardare all'equazione $s'' - \alpha s = 0$ come a un'equazione del tipo $As = \alpha s$, dove s è un vettore (in uno spazio funzionale) e A un operatore lineare; si tratta quindi della consueta equazione agli autovalori, solo in uno spazio vettoriale funzionale, anziché finito-dimensionale. Il problema agli autovalori (4.7.8) è il prototipo di una classe di problemi detti *problemi di Sturm-Liouville*.

⁵⁷Il calcolo è svolto più sotto.

(che sono rilevanti per gli strumenti a fiato), gli autovalori sono

$$\alpha_n = -k_n^2, \quad l k_n = (2n - 1) \pi/2 \quad n = 1, 2, \dots$$

c: Equazione temporale

Possiamo ora venire all'equazione per la parte temporale, ovvero per l'ampiezza, $\ddot{q} - c^2 \alpha q = 0$. Essendo già determinato $\alpha = -k_n^2$, si ha allora per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$ l'equazione

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0, \quad \omega_n = c k_n. \quad (4.7.12)$$

È questa l'equazione di un oscillatore armonico di pulsazione ω_n , con soluzione generale

$$q_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t. \quad (4.7.13)$$

Si osservi che le pulsazioni ω_n hanno la proprietà

$$\omega_n = n \omega^*, \quad \omega^* = \omega_1 = c \frac{\pi}{l}. \quad (4.7.14)$$

Questa proprietà, che la frequenza n -esima sia un multiplo intero della frequenza fondamentale ω_1 , è alla base dell'armonia.⁵⁸ Essa è vera per la corda, ma non, come vedremo, per la membrana.

L'autofunzione $s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin k_n x$, con $k_n = n \frac{\pi}{l}$, è caratterizzata dall'aver $n - 1$ nodi (oltre a quelli relativi ai due estremi $x = 0, x = l$). Evidentemente la funzione $\sin kx$ ha *lunghezza d'onda* (cioè periodo spaziale) λ definita da $k\lambda = 2\pi$, ovvero $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (k si dice *numero d'onde*); dunque la condizione di annullamento in $x = l$ (oltre che in $x = 0$), che fornisce gli autovalori k_n , si esprime anche nella forma $\lambda = \lambda_n = 2l/n$, ovvero nella forma ancor più espressiva

$$n \lambda_n = 2l, \quad (4.7.15)$$

dalla quale si legge che le lunghezze d'onda possibili sono tutte e sole quelle per cui *l'intervallo* $(0, l)$ è coperto esattamente da n semilunghezze d'onda, o ancora:⁵⁹

⁵⁸Ricordando l'espressione di c , ovvero $c = \sqrt{\tau/\rho}$, si ha allora

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

Dunque la frequenza cresce al crescere della tensione (si gira il "bischero" in senso opportuno), mentre decresce al crescere della densità (andando verso le corde più grosse) e decresce anche al crescere della lunghezza (si schiacciano tasti più lontani dal ponticello).

⁵⁹In effetti questa proprietà è in generale vera per ogni soluzione dell'equazione di d'Alembert soddisfacente le condizioni al contorno $u(0, t) = u(l, t) = 0$ per ogni t . Infatti, abbiamo già visto che ogni soluzione ha la forma $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ con f, g arbitrarie. Ma la condizione $u(0, t) = 0$ per ogni t comporta $f(-ct) + g(ct) = 0$

le autofunzioni devono essere periodiche di periodo $2l$ (oltre ad annullarsi nell'origine).

Il fattore temporale $q_n(t)$ (ampiezza dell'onda) è periodico di periodo $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ o frequenza $\nu_n = T_n^{-1} = \frac{\omega_n}{2\pi}$. La relazione $\omega = ck$ è allora equivalente a quella forse più familiare

$$\lambda\nu = c, \text{ ovvero } \frac{\lambda}{T} = c. \quad (4.7.16)$$

Osservazione: Relazione di dispersione. Si osservi che la relazione $\lambda\nu = c$ (ovvero $\omega = ck$) non è di natura generale per i fenomeni ondulatori, ma è valida solo per quelli retti dall'equazione di d'Alembert; in tal caso si verifica direttamente, sostituendo nell'equazione $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$, che la funzione $u(x, t) = \sin kx \cos \omega t$ (o anche la funzione $u(x, t) = \cos(kx - \omega t) = \text{Re } e^{i(kx - \omega t)}$) è soluzione solo se vale $\omega = ck$.⁶⁰ In generale, se si considera un fenomeno ondulatorio descritto da una funzione

$$u(x, t) = \text{Re } e^{i(kx - \omega t)}, \quad (4.7.17)$$

ogni assegnata relazione $\omega = \omega(k)$ viene detta *relazione di dispersione*. Ad esempio, si mostra immediatamente che per l'equazione (di Klein-Gordon) $u_{tt} - c^2u_{xx} - u = 0$ si ha la relazione di dispersione $\omega^2(k) = c^2k^2 + 1$.

Per comprendere il significato della relazione (4.7.16), si osservi che per ogni funzione della forma (4.7.17), avendo essa periodicità spaziale $\lambda = 2\pi/k$ e periodicità temporale $T = 2\pi/\omega$, è naturalmente definita la velocità

$$V = \lambda/T = \lambda\nu = \omega/k =, \quad (\nu = 1/T), \quad (4.7.18)$$

che è detta *velocità di fase*. Dunque la relazione (4.7.16) significa che, per le soluzioni dell'equazione di d'Alembert, la velocità di fase V è indipendente dalla lunghezza d'onda λ , e proprio uguale alla velocità caratteristica di propagazione c che entra nell'equazione.

Questo dunque avviene nel caso in cui ω è proporzionale a k . Se invece la relazione $\omega = \omega(k)$ è nonlineare (come nel caso della luce in un prisma), allora ogni frequenza si muove con velocità diversa e viene deviata in maniera diversa, ovvero si ha dispersione. Questo è il motivo per cui la relazione $\omega = \omega(k)$ si dice *relazione di dispersione*.

d: Soluzione generale, e problema di Cauchy

Abbiamo dunque ottenuto un'infinità di soluzioni particolari fattorizzate (*onde stazionarie, o modi normali di vibrazione*)

$$u_n(x, t) = (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) s_n(x), \quad (\omega_n = ck_n) \quad n = 1, 2, 3 \dots,$$

per ogni t , ovvero $g(x) = -f(-x)$ per ogni x , sicché la soluzione ha la forma $u(x, t) = f(x - ct) - f(-x - ct)$. Pertanto la seconda condizione al contorno, $u(l, t) = 0$ per ogni t , comporta $f(l - ct) = f(-l - ct)$ per ogni t , cioè f è periodica di periodo $2l$, e quindi la stessa proprietà vale per la soluzione u .

⁶⁰Infatti, sostituendo nell'equazione di d'Alembert si trova in ogni caso $(\omega^2 - c^2k^2)u(x, t) = 0$.

$$s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin k_n x \quad k_n = n \frac{\pi}{l}. \quad (4.7.19)$$

E poiché l'equazione (4.6.1) è lineare (omogenea), si ha che ogni combinazione lineare di soluzioni è soluzione, e otteniamo pertanto la forma generale di soluzione

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) s_n(x). \quad (4.7.20)$$

In realtà, quando si considera la funzione definita dalla (4.7.20) per n illimitato (cioè una serie), occorre dare condizioni sui coefficienti arbitrari a_n , b_n in maniera anzitutto che la serie converga, e poi che essa possa essere derivata termine a termine; ammetteremo qui che tali condizioni siano soddisfatte, e chiameremo la soluzione così ottenuta *soluzione generale*.⁶¹

Ci chiediamo ora se la soluzione generale permetta di soddisfare, mediante una scelta dei coefficienti arbitrari a_n , b_n , le condizioni iniziali di Cauchy

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad (4.7.21)$$

dove le funzioni $u_0(x)$, $v_0(x)$ (*dati iniziali*) sono "arbitrarie". Calcolando esplicitamente $u(x, 0)$, $u_t(x, 0)$ mediante la (4.7.20), si trova che le condizioni iniziali assumono la forma

$$\sum_{n \geq 1} a_n s_n(x) = u_0(x) \quad (4.7.22)$$

$$\sum_{n \geq 1} \omega_n b_n s_n(x) = v_0(x). \quad (4.7.23)$$

Ricordiamo che in \mathbb{R}^N , avendo assegnato una base di vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$, ogni vettore \mathbf{x} ammette una unica decomposizione, cioè è definita una N -upla di numeri reali x_1, \dots, x_N (componenti) tali che $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N x_n \mathbf{e}_n$. Se poi la base è ortonormale, cioè è definito un prodotto scalare $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ per ogni coppia di vettori,⁶² e per i vettori base si ha $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{nm}$, allora le componenti x_m si calcolano con la regola⁶³ $x_m = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_m$. Dunque si ha

$$\left(\mathbf{x} = \sum x_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{nm} \right) \Leftrightarrow \left(x_n = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{x} \right). \quad (4.7.24)$$

Così analogamente negli spazi vettoriali di dimensione infinita i cui elementi sono funzioni (spazi funzionali) si può anzitutto rappresentare un vettore (una funzione) come combinazione lineare infinita di vettori base (funzioni base). Ad esempio, per funzioni $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(0) = f(l) = 0$,

⁶¹Si noti che la combinazione lineare di due o più soluzioni stazionarie diverse non è essa stessa una soluzione stazionaria. Infatti ad esempio $\sin(\pi x/l) + \sin(2\pi x/l) = 2 \sin(\pi x/l) \cos(\pi x/l)$, mentre d'altra parte abbiamo dimostrato che se un'onda è stazionaria, ovvero per definizione è del tipo $u(x, t) = s(x)q(t)$, allora la "forma" $s(x)$ è necessariamente un multiplo di $\sin(n\pi x/l)$ con n intero positivo.

⁶²Ovvero una applicazione a valori reali che sia bilineare, simmetrica e definita positiva.

⁶³Infatti è $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_m = (\sum_n x_n \mathbf{e}_n) \cdot \mathbf{e}_m = \sum_n x_n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m) = \sum_n x_n \delta_{nm} = x_m$.

scriviamo $f = \sum c_n s_n$, dove le funzioni base sono le funzioni $s_n(x)$ definite da (4.7.19). Si verifica a vista che l'applicazione (f, g) , che per ogni coppia ordinata di funzioni produce un numero reale definito da

$$(f, g) \equiv \int_0^l f(x)g(x)dx, \tag{4.7.25}$$

è un *prodotto scalare* nel senso consueto (cioè è una applicazione a valori reali, con le proprietà di bilinearità, simmetria e definita positività), e si trasporta immediatamente a questo caso il modo sopra ricordato di calcolare i coefficienti dello sviluppo, perché i vettori base s_n risultano essere ortonormali. Infatti si ha il

Lemma 2 Con il prodotto scalare (4.7.25), le funzioni base $s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ costituiscono un sistema ortonormale, cioè si ha

$$(s_n, s_m) = \delta_{nm}; \tag{4.7.26}$$

così anche, per le funzioni \tilde{s}_n definite da $\tilde{s}_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\frac{n\pi}{l}x$, si ha la relazione di ortonormalità

$$(\tilde{s}_n, \tilde{s}_m) = \delta_{nm}.$$

Dimostrazione. Scriviamo come di consueto $k_n = n\frac{\pi}{l}$.

Caso $m = n$. Si osserva che vale⁶⁴

$$\int_0^l \sin^2(k_n x) dx = \int_0^l \cos^2(k_n x) dx,$$

e dunque, ricordando $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, si ha

$$\int_0^l \sin^2(k_n x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \sin^2(k_n x) dx + \int_0^l \cos^2(k_n x) dx \right] = \frac{1}{2} \int_0^l dx = \frac{l}{2}.$$

Caso $n \neq m$. Si ricorda che vale

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)].$$

Dunque per calcolare $\int_0^l \sin k_n x \sin(k_m x) dx$ si è ricondotti al calcolo di

$$\int_0^l \cos [(k_n \pm k_m)x] dx;$$

⁶⁴Infatti, $\sin^2(k_n x)$ e $\cos^2(k_n x)$ differiscono solo per una traslazione, e d'altra parte l'integrale di una funzione periodica su un periodo non dipende dall'estremo inferiore di integrazione.

ora, entrambi questi integrali sono nulli. Infatti è $\sin(k_n \pm k_m)l = 0$, perché $(k_n \pm k_m)l = (n \pm m)\pi$, un multiplo intero di π . Analogamente si procede per mostrare che

$$\int_0^l \cos(k_n x) \cos(k_m x) dx = 0 .$$

Q.E.D.

In tal modo, per tutte le funzioni $f = f(x)$ esprimibili come combinazioni lineari delle funzioni elementari (versori base) s_n , $n = 1, 2, \dots$,

$$f(x) = \sum_{n>0} a_n s_n(x) , \quad (4.7.27)$$

i *coefficienti di Fourier* a_n risultano determinati dalla formula

$$a_n = (s_n, f) \equiv \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \sin\left(n \frac{\pi}{l} x\right) dx . \quad (4.7.28)$$

Si ha pertanto la relazione analoga alla (4.7.24), ovvero

$$\left(f(x) = \sum a_n s_n(x) , (s_n, s_m) = \delta_{nm} \right) \Leftrightarrow \left(a_n = (s_n, f) \right) . \quad (4.7.29)$$

Resta poi da stabilire se “tutte” le funzioni f (definite in $0 \leq x \leq l$ e annullantisi sul bordo) possono rappresentarsi mediante lo sviluppo di Fourier (4.7.27). Su questo problema, detto della *completezza* del sistema di funzioni $\{s_n(x)\}_{n>1}$, che ha dato origine ad uno dei più interessanti capitoli della analisi pura, e che viene ampiamente trattato nel corso di Metodi Matematici per la fisica e di Analisi funzionale, non abbiamo qui tempo di trattenerci.⁶⁵

Ciò ammesso, ritornando al problema di Cauchy per l’equazione di d’Alembert monodimensionale $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, e ricordando le formule già trovate (4.7.22), (4.7.23), concludiamo allora che i dati iniziali $u_0(x)$, $v_0(x)$ permettono di determinare univocamente i coefficienti arbitrari a_n, b_n che figurano nella soluzione generale (4.7.20), ottenuta per sovrapposizione di soluzioni elementari stazionarie.

e: La corda come sistema di infiniti oscillatori armonici virtuali (modi normali di vibrazione): decomposizione spettrale

La soluzione dell’equazione di d’Alembert con il procedimento di Fourier permette anche di dare un’espressione particolarmente significativa alla energia della corda vibrante, che viene ad apparire formalmente come l’energia

⁶⁵Sebbene possa apparire a prima vista sconcertante, in quanto banalmente tautologica, la risposta consiste sostanzialmente nel definire lo spazio di interesse (o delle funzioni “buone”) come quello delle funzioni rappresentabili proprio con lo sviluppo di Fourier (4.7.27).

di un sistema di infiniti oscillatori armonici disaccoppiati (o indipendenti); circostanza questa che si potrebbe facilmente immaginare, quando si ricorda che le ampiezze $q_n(t)$ dei modi normali definite dalla (4.7.6) soddisfano proprio le equazioni di oscillatori armonici (4.7.12).⁶⁶ Ciò viene confermato dal seguente

Teorema 4 (della decomposizione spettrale) *L'energia E della corda vibrante con estremi fissi, che in termini del "campo" $u = u(x, t)$ è espressa come*

$$E = \frac{\rho}{2} \int_0^l (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx ,$$

con $c^2 = \tau/\rho$, si scrive anche nella forma

$$E = \sum_{n \geq 0} E_n , \quad E_n = \frac{\rho}{2} (\dot{q}_n^2 + \omega_n^2 q_n^2) , \quad (4.7.30)$$

in termini delle ampiezze q_n dei modi definiti da $u(x, t) = \sum_{n > 0} q_n(t) s_n(x)$, dove $s_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin k_n x$, $k_n = \frac{n\pi}{l}$, $\omega_n = ck_n$.

Dimostrazione. Con la $u(x, t)$ sviluppata in serie di Fourier come sopra, si ha

$$u_t(x, t) = \sum \dot{q}_n(t) s_n(x) , \quad u_x(x, t) = \sum q_n(t) s'_n(x) = \sum k_n q_n(t) \tilde{s}_n(x) , \quad (4.7.31)$$

dove $\tilde{s}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos k_n x$ e l'apice denota derivazione rispetto all'argomento. Si calcola allora (si ricordi la notazione $(f, g) = \int f(x)g(x) dx$)

$$\begin{aligned} \int_0^l u_t^2 dx &= (u_t, u_t) = \left(\sum_n \dot{q}_n s_n , \sum_m \dot{q}_m s_m \right) \\ &= \sum_{n,m} \dot{q}_n \dot{q}_m (s_n, s_m) = \sum_{n,m} \dot{q}_n \dot{q}_m \delta_{nm} = \sum_n \dot{q}_n^2 . \end{aligned}$$

Analogamente si trova

$$\int_0^l u_x^2 dx = \sum_n k_n^2 q_n^2 .$$

Dunque, ricordando $\omega_n = ck_n$, segue la (4.7.30).

Q.E.D.

Osservazione matematica. Le relazioni date sopra per esprimere $\int_0^l u_t^2 dx$ e $\int_0^l u_x^2 dx$ sono un caso particolare di una relazione generale che vale in ogni spazio

⁶⁶Questa circostanza è di fondamentale importanza, e si generalizza al caso delle vibrazioni della membrana, del suono, dei campi elettromagnetici... In un certo senso, tutta la teoria dei campi, classici e quantistici, si riduce per tale motivo allo studio di sistemi di oscillatori armonici debolmente accoppiati.

vettoriale munito di un prodotto scalare (spazio di Hilbert). Se (f, g) denota il prodotto scalare tra i vettori f ed g , e $\{s_n\}$ è una base ortonormale, allora da $f = \sum_n a_n s_n$, $g = \sum_n b_n s_n$ segue

$$(f, g) = \sum_n a_n b_n ,$$

e in particolare

$$\|f\|^2 \equiv (f, f) = \sum_n a_n^2 .$$

Queste relazioni sono generalizzazioni, a spazi vettoriali di dimensione infinita, di relazioni ben familiari nel caso di uno spazio vettoriale di dimensione finita N , cioè in \mathbb{R}^N munito del consueto prodotto scalare euclideo. Infatti, per ogni coppia di vettori $\mathbf{a} = \sum_n a_n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{b} = \sum_n b_n \mathbf{e}_n$ sviluppati su una base ortonormale $\{\mathbf{e}_n\}$ (tale cioè che $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{nm}$) si ha

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_n a_n b_n ,$$

e in particolare

$$\|a\|^2 \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_n a_n^2 ,$$

dove la lunghezza (o norma) di un vettore \mathbf{a} è stata denotata con $\|a\|$, ed è definita da $\|a\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$. Si tratta in effetti di una ben nota generalizzazione del teorema di Pitagora.

Osservazione fisica: decomposizione spettrale. Ricordiamo l'esperienza del prisma di Newton, in cui la luce bianca incidente su un prisma ne esce suddivisa in un fascio di raggi, ciascuno di un diverso colore. Sappiamo che ciò viene interpretato dicendo che la luce bianca è in effetti una sovrapposizione di onde aventi ciascuna una diversa frequenza e lunghezza d'onda: nel vuoto la velocità di propagazione è la medesima per tutte le frequenze, mentre nel vetro ogni frequenza ha una diversa velocità. Dunque, come sappiamo dal principio di Fermat (si veda il capitolo sui principi variazionali) ogni componente, caratterizzata dalla propria frequenza (cui corrisponde nell'osservatore la sensazione di un diverso colore) subisce nel vetro del prisma una rifrazione di un angolo diverso, e si forma in tal modo lo spettro dietro il prisma. Così, nel teorema 4 della decomposizione spettrale l'energia E della corda appare decomposta nella somma di energie di modi di oscillazione, ciascuno dei quali è caratterizzato da una frequenza (con una corrispondente lunghezza d'onda). Esistono rivelatori acustici (studiati particolarmente dal grande Helmholtz) che eseguono l'analisi spettrale, cioè per ogni frequenza forniscono la corrispondente energia. La decomposizione fornita dal teorema 4 è il prototipo di ogni decomposizione spettrale di questo tipo. Nel caso del campo elettromagnetico l'analogo procedimento venne compiuto prima da Rayleigh e poi da Jeans, in due articoli su *Nature* rispettivamente del 1900 e 1905. Una decomposizione analoga era stata fornita poco prima da Planck, ma con un procedimento molto diverso, di natura fisica alquanto più significativa. che non abbiamo qui il tempo di illustrare.⁶⁷

⁶⁷Nota per gli autori. Da completare:1) Ritrovare la serie di Fourier dalla soluzione ge-

BIBLIOGRAFIA

1. E. Persico, *Introduzione alla Fisica–Matematica*, Zanichelli (Bologna), Cap. 6
2. A. Sommerfeld, *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. 6, *Partial differential equations*
3. A.A. Tichonov, A.N. Samarskij, *Equazioni della Fisica–Matematica*, Mir (Mosca, 1981).
4. R. Courant, D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*, Wiley (New York, 1953), Vol. 2
5. W.A. Strauss, *Partial differential equations, an introduction*, J. Wiley (New York, 1992)
6. F. John, *Partial differential equations*, Springer (New York, 1982)
7. S. Salsa, *Equazioni a derivate parziali*, Springer (Milano. 2004)

nerale di d'Alembert, imponendo le condizioni al contorno. 2) serie di Fourier, 3) problema sulla retta infinita e integrale di Fourier 4) Esercizio: metodo di Fourier per l'equazione di d'Alembert tridimensionale nella scatola periodica, analogo con equazione del calore e particella libera quantistica. 5) Spettro mediante segnale temporale, col metodo di Planck, 6) tensore energia–momento

