

Capitolo 1

Le equazioni di Lagrange

1.1 Introduzione

Le equazioni di Lagrange (Parigi, 1787)¹ e le successive equazioni di Hamilton (Dublino, 1833) possono essere considerate sotto molti aspetti come una riscrittura delle equazioni di Newton (Cambridge, 1687) per un sistema di N punti materiali. Quello che viene messo in luce è che, pur essendo vero che le equazioni di moto assumono forma analitica diversa quando si scelgono coordinate diverse (ad esempio, nel caso di un solo punto, coordinate cartesiane o polari), tuttavia tali equazioni hanno un forma universale, che si ottiene con operazioni di derivazione da una unica funzione scalare, la funzione lagrangiana $L = T - V$, differenza di energia cinetica ed energia potenziale (ci riferiamo evidentemente al caso di forze dipendenti solo dalla posizione e derivanti da potenziale). E questo, non solo nel caso di punti senza vincoli (o liberi, come si dice), ma anche nel caso di punti vincolati (con vincoli cosiddetti “ideali o perfetti”), in cui le equazioni si ottengono con un procedimento che elimina “in maniera automatica” le reazioni vincolari. Infine le equazioni di moto nella forma di Lagrange hanno il pregio di mostrare a colpo l’esistenza di leggi di conservazione, almeno in casi che presentano delle evidenti simmetrie.

Oltre a presentare questi aspetti di comodità pratica, le equazioni di Lagrange costituiscono un essenziale progresso rispetto al più elementare formalismo newtoniano, in quanto risultano essenziali per formulare la **meccanica statistica** e per passare dalla meccanica classica alla **meccanica quantistica**. Questi due aspetti (rilevanza per la meccanica statistica e per la meccanica quantistica) sono messi in luce nella successiva formulazione hamiltoniana, discussa nel prossimo capitolo. La rilevanza per la meccanica statistica è dovuta al fatto che al fine di una discussione statistica è neces-

¹Giuseppe Luigi Lagrange era un torinese (di padre francese) che passò la seconda parte della sua vita a Parigi (che allora era forse il più grande centro culturale in Europa). Pare parlasse francese con un forte accento italiano.

sario assegnare ai movimenti delle probabilità in maniera coerente, e questo può farsi grazie ad una proprietà dinamica che appare evidente quando si dispone delle equazioni di Hamilton (si tratta del *teorema di Liouville*). La rilevanza per la meccanica quantistica consiste nel fatto che nel formalismo hamiltoniano viene messo in luce l'aspetto algebrico della cinematica e della dinamica (si veda la discussione sulle parentesi di Poisson) che viene utilizzata (seguendo Heisenberg, Born, Jordan e Dirac) per la formulazione della meccanica quantistica. Dunque, il passaggio dal formalismo newtoniano a quello lagrangiano ed hamiltoniano mette in luce delle fondamentali strutture geometriche ed algebriche della meccanica.

Un altro aspetto rilevante delle equazioni di Lagrange e di quelle di Hamilton è la loro strettissima connessione con i **principi variazionali**, di cui si parlerà in un capitolo successivo a quello sulle equazioni di Hamilton. Questa formulazione variazionale della meccanica è di grande valore euristico (cioè per “inventare” le teorie). Noi ad esempio ne faremo uso concreto nel fornire la formulazione relativistica della dinamica proprio mediante una formulazione variazionale, già nel caso della particella libera. In tal modo stabiliremo quale sia la buona lagrangiana e questo risultato ci fornirà come conseguenza la deduzione della famosa formula di Einstein $E = mc^2$. Non meraviglia quindi che anche la meccanica quantistica e soprattutto le teorie quantistiche dei campi vengano di consueto formulate in ambito lagrangiano o hamiltoniano o variazionale (si tratta del celebre metodo dell' **integrale di Feynman**).

Importanza storica delle equazioni di Lagrange. La presentazione delle equazioni di Lagrange data sopra è alquanto riduttiva. Si pensi che Newton (seguendo lo stile di Galileo, il quale a sua volta si rifaceva ad Archimede), presentava i suoi risultati in una forma di tipo “geometrico”. Lagrange, nel suo celebre libro *La mécanique analytique*, fu il primo a dare una presentazione sistematica di tipo analitico della meccanica. Per avere una idea del ruolo culturale svolto da tale libro, basti pensare al fatto che Maxwell, quando diede la prima formulazione delle sue leggi per il campo elettromagnetico, nel 1865 (quasi cento anni dopo il libro di Lagrange)², cominciò con lunghi discorsi, e quando infine pervenne a scrivere la prima formula, fece riferimento alla “equazione generale della dinamica” citando appunto la meccanica analitica di Lagrange (*Méc. Anal. II, 2, paragrafo 5*).

1.2 Brevissimi richiami sulle equazioni di Newton

Quando si tratta di cominciare qualcosa e si sa dove si vuole arrivare, di solito conviene non indugiare, e fare un salto. Qui l'obiettivo è di introdurre le equazioni di Lagrange partendo da quelle di Newton, e ci sembrerebbe opportuno indugiare prima a richiamare brevemente queste ultime, se non altro

²J.C. Maxwell, *Dynamical theory of the electromagnetic field*, Philos. Transactions, Vol. CLV, 459–512 (1865). Traduzione italiana a cura di S. D'Agostino, Teknos (Roma). Si veda la seconda pagina della Parte II

per fissare le notazioni. Bisogna parlare del principio secondo cui esistono i sistemi di riferimento inerziali, e dire poi che se su un corpo (assimilato a un *punto materiale* – ingl. *mass point* –, ovvero un punto dotato di massa) agisce una forza \mathbf{F} ,³ allora in un sistema inerziale “vale l’equazione di Newton”

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1.2.1)$$

dove \mathbf{a} è l’accelerazione del punto. Se poi si considera un sistema di N punti materiali, allora (incredibilmente, questo fatto non è chiaro a molti studenti), si assume che “valga l’equazione di Newton per ogni punto”, ovvero si assume che il moto sia descritto dal sistema di equazioni

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1, \dots, m_N\mathbf{a}_N = \mathbf{F}_N, \quad (1.2.2)$$

che scriviamo anche

$$m_k\mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k \quad (k = 1, \dots, N). \quad (1.2.3)$$

1. Il problema dei principi della meccanica: indugiare e fare il salto. Ora, il fatto è che se ci si interroga su come si possa definire “in maniera rigorosa” che cosa è un riferimento inerziale, che cosa sono le forze, e su problemi analoghi, ogni persona dotata di sensibilità si rende subito conto che sta entrando in un ambito in cui tutto diventa fluido.⁴ Questa situazione è ben descritta da un grande scienziato (Hermann Weyl) con le seguenti parole: “*All beginnings are obscure*”.⁵ Nel caso concreto della definizione di sistema inerziale e della definizione delle forze, questa situazione è benissimo illustrata dalla discussione critica di Poincaré nel suo celebre libro *La science et l’hypothèse*, libro che Einstein aveva a lungo meditato e molto amato. Ora, tutti questi problemi sono interessantissimi, ma bisogna avere chiaro che essi in qualche modo fanno parte di un altro ambito, e non bisogna correre il pericolo di restarne intrappolati. Un ottimo esempio di comportamento è quello di Boltzmann, Questi, quando nel discutere dei principi della meccanica testimonia di rendersi conto che la definizione di sistema di riferimento inerziale è in qualche modo circolare e potrebbe

³O un insieme di forze la cui somma vettoriale – detta anche *forza risultante* è \mathbf{F} .

⁴Ciò, d’altra parte, avviene anche per i fondamenti della matematica, come è ben chiaro soprattutto dopo i lavori di Gödel (circa 1930).

⁵H. Weyl, *Space, time, matter*, Dover (New York, 1952), pag. 10. Poi procede così: *Inasmuch as the mathematician operates with his conceptions along strict and formal lines, he, above all, must be reminded from time to time that the origins of things lie in greater depths than those to which his methods enable him to descend. Beyond the knowledge gained from the individual sciences, there remains the task of **comprehending**. In spite of the fact that the views of philosophy sway from one system to another, we cannot dispense with it unless we are to convert knowledge into a meaningless chaos.*

dubitarsi della sua consistenza, ne esce stimolandoci a salire sulle spalle dei giganti, e dice:⁶

... secondo lo spirito del nostro metodo, dobbiamo collegare le nostre considerazioni quanto più possibile al processo storico evolutivo della meccanica. Galileo ha trovato le semplici leggi di moto studiando il moto relativo *rispetto alla terra*. Seguendo il suo esempio ...

In altri termini, riguardo ai sistemi inerziali prendiamo senz'altro la definizione comunemente accettata, ovvero:

Definizione di sistema inerziale: un sistema di riferimento si dice inerziale se, rispetto ad esso, un punto non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.

Ma poi, di fronte alla difficoltà di controllare se un sistema concreto è inerziale, seguiamo Galileo, e per costruire le case o studiare il moto dei gravi o dei proiettili, prendiamo in pratica come sistema inerziale un sistema solidale con la terra – e non una giostra – (e come orologi quelli costruiti in un certo modo che potremmo descrivere in dettaglio). Se poi vogliamo studiare il moto dei satelliti che vanno su Marte, allora prendiamo come sistema inerziale un sistema avente origine nel Sole e assi solidali con “le stelle fisse”. Se poi vogliamo studiare il moto del Sole nella Galassia

Il problema dei principi della meccanica, analizzati in maniera storico-critica (i prototipi di trattazioni di questo tipo sono il libro di Mach e gli scritti di Poincaré)⁷ è un argomento di grandissimo interesse, che non abbiamo la possibilità di discutere in queste note. Vi dedicheremo però almeno qualche pagina poco più avanti, nella speranza di trasmettere al lettore almeno la sensazione che le grandi scoperte della fisica, di cui la scoperta della legge di caduta dei gravi e dell'equazione di Newton costituiscono i prototipi nella storia del mondo moderno, sono veramente affascinanti e costituiscono una grandissima invenzione concettuale e culturale, e non si limitano per niente alla semplice enunciazione di fatti. Naturalmente, nel discutere di queste cose, occorre fare attenzione a non rimanere intrappolati, indulgiando troppo su di esse. Confidiamo tuttavia che una lettura anche rapida delle poche pagine che vi dedicheremo più avanti possa comunicare allo studente la sensazione che maggiormente ci premeva di trasmettere, ovvero che già nella formulazione della legge di caduta dei gravi di Galileo, e poi nel suo compimento datone da Newton, ci troviamo di fronte ad una scoperta scientifica di eccezionale bellezza e grandiosità.

⁶L. Boltzmann, *Sui principi e le equazioni fondamentali della meccanica*, in L. Boltzmann, *Modelli matematici, fisica e filosofia*, Bollati Boringhieri (Torino 1999), traduzione italiana, a cura di C. Cercignani, di *Populaere Schriften*, Verlag von Johann Ambrosius Barth (Leipzig, 1905). Si veda la pag. 151 (e la pag. 139).

⁷E. Mach, *La meccanica nel suo sviluppo storico critico*, Trad. Ital. Boringhieri (Torino), H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, la Valeur de la science, *Science et méthode*, *Dernières pensées*, di cui esistono due traduzioni italiane.

2. L'equazione di Newton come equazione differenziale: il determinismo laplaciano. Vi è poi un altro aspetto che spesso resta in ombra nelle esposizioni elementari, e che qui vogliamo brevemente richiamare. Si tratta del fatto che l'equazione di Newton (ci riferiamo per semplicità al caso di un solo punto materiale, descritto in un sistema inerziale) $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ è non una identità, ma appunto una *equazione*, precisamente una equazione differenziale (del secondo ordine, in forma normale). Ora, una equazione ha anzitutto una incognita. Nelle equazioni algebriche del tipo $x^2 = 4$ l'incognita è un numero, il numero x il cui quadrato fa 4. Qui invece l'incognita è il *movimento* del punto, ovvero una funzione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) ,$$

e quindi l'equazione di Newton è anzitutto una **equazione funzionale**, nel senso che essa ha per incognita non un numero, ma una funzione (funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R}^3). Inoltre si tratta di una **equazione differenziale**, perché la funzione incognita $\mathbf{x}(t)$ vi appare anche attraverso le sue derivate, e si dice inoltre **del secondo ordine**,⁸ perché la derivata di ordine massimo che appare è la derivata seconda, ovvero la accelerazione $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{x}}(t)$ ⁹.

Secondo l'uso risalente a Newton, abbiamo qui denotato la derivata rispetto al tempo con un punto posto sopra la funzione considerata:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) , \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) \equiv \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}(t) .$$

Dunque si deve pensare alla equazione di Newton come scritta nella forma

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \tag{1.2.4}$$

o addirittura

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) \tag{1.2.5}$$

Ricordiamo che una funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ si dice soluzione della (1.2.4) se la relazione (1.2.5) vale per tutti i tempi t (*identicamente in t* , come anche si dice) o almeno in un intervallo di valori di t . Ricorderemo subito sotto gli esempi più elementari.

Un altro punto fondamentale, connesso alla circostanza che l'equazione di Newton è una equazione del secondo ordine, riguarda il cosiddetto

Principio di determinismo laplaciano: Ogni soluzione dell'equazione di Newton (1.2.4) con forza assegnata è univocamente individuata dalle **condizioni iniziali**

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$$

⁸Si dice *ordine*, e non *grado*, nome che si riserva alle equazioni algebriche.

⁹Si dice poi che l'equazione è *in forma normale*, perché l'equazione appare in forma "risolta rispetto alla derivata di ordine massimo: qui, derivata seconda = espressione contenente l'incognita e le sue derivate fino al primo ordine.

relative ai **dati iniziali** $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$ (posizione e velocità a un tempo iniziale t_0 assegnato; qui abbiamo preso $t_0 = 0$).

Il problema di Cauchy. Il problema di determinare la soluzione con assegnate condizioni iniziali viene detto “Problema di Cauchy”.

Dal punto di vista matematico, si tratta del **Teorema di esistenza e unicità** per le soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, che verrà discusso in un'altra parte delle note. In particolare, si deve sottolineare che i dati iniziali individuano una soluzione in generale solo entro un dominio limitato del tempo (si dice che si tratta di un risultato **locale nel tempo**). In alcuni casi significativi l'esistenza viene garantita per tutti i tempi.

Esempi¹⁰

- **Particella libera:** $\ddot{\mathbf{x}} = 0$; soluzione $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t$.
- **Moto dei gravi:** $\ddot{\mathbf{x}} = -g\mathbf{k}$; soluzione $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2}g\mathbf{k}t^2$; qui \mathbf{k} è il versore verticale diretto verso l'alto, e g l'accelerazione di gravità.
- **Oscillatore armonico (monodimensionale):** $\ddot{x} = -\omega^2 x$ con $\omega = \text{cost}$; soluzione $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + (v_0/\omega) \sin(\omega t)$.

È particolarmente significativo familiarizzarsi con il modo in cui Newton comprendeva che il moto è determinato da posizione e velocità iniziali, proprio in virtù dell'equazione considerata.¹¹ Egli faceva uso del metodo dello sviluppo in serie, che in seguito divenne il cosiddetto metodo di Cauchy–Kowalewska.

Intermezzo: il metodo di Newton, o di Cauchy–Kowalewska. Consideriamo l'esempio di equazione del primo ordine

$$\dot{x} = x$$

(si cerca una funzione $x = x(t)$ la cui derivata coincide con la funzione stessa) che tutti sappiamo avere per soluzione generale

$$x(t) = ce^t = x_0 e^t .$$

Evidentemente, l'equazione $\dot{x} = x$ non ha soluzione nell'ambito dei polinomi perché, se $x(t)$ è un polinomio di grado n , allora \dot{x} è un polinomio di grado $n - 1$. Allora Newton ricerca la soluzione in una classe più ampia di funzioni, quella dei “polinomi di ordine infinito”, ovvero delle funzioni definite da serie di potenze. Anzi, comincia addirittura col trascurare il problema della convergenza (questo lo farà in seguito verificando che la serie sia non solo convergente, ma anche derivabile termine a termine), e incomincia col determinare la “serie formale”, cioè la successione dei coefficienti $\{c_k\}$ nell'espressione formale

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots ,$$

¹⁰Per la dimostrazione, qualora non apparisse ovvia, si veda più avanti.

¹¹Facciamo qui riferimento agli scritti di Newton sul calcolo differenziale. Il metodo usato nei *Principia* è del tutto diverso, e verrà illustrato in un'altra parte delle note.

in modo che la serie (se poi dimostrata convergente e derivabile termine a termine), soddisfi l'equazione studiata. Si constata allora immediatamente (basta derivare, e valutare per $t = 0$) che le "costanti arbitrarie" c_n sono date secondo la nota regola dello sviluppo di Taylor (o di Mc Laurin), ovvero

$$c_0 = x(0) , c_1 = \dot{x}(0) , c_2 = \frac{\ddot{x}(0)}{2} \dots$$

Ora, sulla quantità $x(0)$ l'equazione che stiamo studiando non ci fornisce alcuna informazione, e quindi tale quantità deve essere assegnata in maniera indipendente (cioè arbitraria): si tratta della **condizione iniziale** $x(0) = x_0$ relativa all'arbitrario **dato iniziale** x_0 . Invece, l'equazione stessa fornisce l'informazione che vale $\dot{x}(t) = x(t)$ per ogni t , e pertanto $\dot{x}(0) = x(0) = x_0$, e dunque resta determinato $\dot{x}_0 \equiv v_0$. Analogamente, per derivazioni successive l'equazione fornisce l'informazione

$$x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(t) = \dots = x(t) , \quad \text{dove} \quad x^{(n)} \equiv \frac{d^n x}{dt^n}$$

sicché abbiamo

$$x^{(n+1)}(0) = x^{(n)}(0) = \dots = x(0) = x_0 ,$$

In tal modo, assegnato il dato iniziale x_0 , **l'equazione determina essa stessa tutti i coefficienti dello sviluppo in serie della soluzione**, e precisamente si ha

$$c_n = \frac{x_0}{n!} .$$

Dunque nello sviluppo in serie il coefficiente x_0 si fattorizza, e si ottiene la soluzione nella forma

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \equiv x_0 e^t .$$

La convergenza e la possibilità di derivare sotto il segno di serie vengono facilmente verificate. Si noti bene che nell'ultimo passaggio è proprio la funzione e^t che viene **definita** mediante la serie ivi scritta, ovvero

$$e^t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} ,$$

e in particolare il numero e viene definito come il valore che tale funzione assume per $t = 0$, ovvero mediante la relazione

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} .$$

Si dimostrano poi¹² tutte le varie proprietà della funzione e^t .

¹²In particolare si dimostra che la funzione e^t soddisfa la legge di composizione delle potenze, ovvero che

$$e^t e^s = e^{t+s} ,$$

e che il numero e ha la nota espressione

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

In effetti gran parte delle funzioni non elementari conosciute in matematica (e in fisica), ad esempio le funzioni di Bessel e le funzioni ellittiche, vengono definite proprio come soluzioni di certe equazioni differenziali con particolari scelte dei dati iniziali. In effetti, il procedimento ora descritto viene generalizzato in maniera alquanto semplice (magari, solo un poco laboriosa – soprattutto per le notazioni richieste) nel caso generale di una equazione di ordine n in forma normale

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) .$$

Si tratta del celebre teorema di Cauchy–Kowalewska (nella sostanza già noto a Newton), che garantisce che la soluzione è analitica se la funzione f è analitica.¹³

Esercizio. Mostrare che per le equazioni del secondo ordine le soluzioni sono individuate da due condizioni iniziali (tipicamente, il valore x_0 della funzione incognita e quello v_0 della sua derivata prima: $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$).

Esercizio. Mostrare che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono le soluzioni dell'equazione $\ddot{x} + x = 0$ relative rispettivamente ai dati iniziali $(0, 1)$ e $(1, 0)$. Il punto significativo è che si devono pensare tali funzioni come definite da certe serie, che risultano essere proprio quelle ben note (ovvero $\sin t = t - t^3/3! + \dots$, $\cos t = 1 - t^2/2! + \dots$).

3. Intermezzo storico–critico. La legge di Galileo della caduta dei gravi come anticipazione dell'equazione di Newton. Il ruolo della matematica nella formulazione delle teorie.

Nota didattica. Questo paragrafo costituisce un complemento, che può essere tralasciato.

Se si leggono i *Principia* di Newton si scopre che, nel passo in cui formula le sue celebri tre leggi, egli attribuisce le prime due a Galileo.¹⁴ Ricordiamo che la terza legge riguarda il principio di azione e reazione (di cui parleremo più avanti a proposito delle forze mutue tra due corpi), mentre le prime due in termini moderni corrispondono al postulare che in un sistema inerziale,¹⁵

¹³Si noti che, per quanto riguarda il metodo dello sviluppo in serie, la situazione è alquanto diversa nel caso delle equazioni a derivate parziali. Infatti in tal caso, indipendentemente da problemi di convergenza, non è neanche garantito in generale che l'equazione possa fornire i coefficienti dello sviluppo in serie. Tale fatto è alla base della classificazione delle equazioni alle derivate parziali in ellittiche, paraboliche e iperboliche. Si veda ad esempio E. Persico, *Introduzione alla Fisica Matematica*, Zanichelli (Bologna).

¹⁴Le citazioni sono riportate nelle note scritte per il corso per la Silsis, al quale rimandiamo.

¹⁵Le cose sono alquanto più complicate di quanto generalmente si crede. Solitamente si interpreta la prima legge come enunciante l'esistenza di sistemi inerziali, ma questo è assolutamente falso, perché Newton, nelle pagine precedenti, aveva del tutto messo in chiaro che egli postulava l'esistenza di uno spazio assoluto (!). Secondo noi (e, ci sembra, anche secondo Enriques), è proprio l'insieme delle prime due leggi che è equivalente alla legge $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Per comprendere questo fatto, è sufficiente andare a vedere il modo concreto in cui Newton usa le prime due leggi per dimostrare dei teoremi. Il primo teorema che egli dimostra, che chiarisce molto bene questo punto, è la conservazione del momento angolare nel moto centrale. Si veda anche F. Enriques, note aggiunte alla traduzione dei Principia.

per un punto soggetto a una forza \mathbf{F} , valga la legge di Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} . \quad (1.2.6)$$

Poiché Galileo si era limitato allo studio del moto dei gravi, è ragionevole pensare che, secondo Newton, Galileo aveva concepito che il moto debba essere descritto dall'equazione (1.2.6) nel caso particolare della forza costante

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -mg\mathbf{k} ,$$

dove \mathbf{k} è il versore verticale rivolto verso l'alto, e che il contributo di Newton stesso fosse consistito nel generalizzare tale legge al caso di forza arbitraria. Ora, è pur vero che, nel dire questo, Newton si comportava con una grande generosità verso Galileo, ma noi pensiamo che nella sostanza egli avesse ragione.

Che la scoperta di Galileo sia proprio questa (il moto dei gravi è retto da una equazione differenziale come quella di Newton, nel caso particolare di forza costante), non è in generale ben sottolineato, perché si tende a ridurre la scoperta di Galileo alla semplice affermazione che nel moto dei gravi l'accelerazione è costante, come se si trattasse solo di un fatto osservativo, da controllarsi sperimentalmente. Vogliamo mostrare che ciò non è vero, e che in questo ha ragione Newton.

A tal fine, diamo qui una rilettura del contributo di Galileo in termini moderni, dunque ammettendo che siano stati preliminarmente chiariti i fondamentali concetti di cinematica, secondo cui la velocità è la derivata rispetto al tempo della posizione, e l'accelerazione è la derivata della velocità.

Consideriamo il moto di un grave che cade verticalmente partendo da fermo. Si osserva che la velocità cresce man mano che il corpo scende,¹⁶ e ci si pone il problema di come questo fenomeno sia descritto quantitativamente, di trovare cioè secondo quale legge cresca la velocità man mano che il corpo scende. Galileo comincia a concepire che la velocità cresca proporzionalmente allo spazio percorso: quando il grave ha percorso una distanza r , la velocità v sarebbe data da

$$v = \alpha r , \quad (1.2.7)$$

dove α è una costante. Qui giunge la prima grande scoperta teorica di Galileo. A priori, una legge del tipo (1.2.7) appare come descrivente una innocente possibilità, eventualmente da confermarsi mediante osservazioni; nulla sembrerebbe impedire che tale legge possa essere "vera". E invece no. In luogo delle osservazioni Galileo usa un ragionamento, un puro ragionamento matematico, dal quale conclude che per descrivere il moto dei gravi (ma non per descrivere altri fenomeni – si veda più sotto) la legge $v = \alpha r$ è impossibile, cioè non consistente.

¹⁶Questo fatto qualitativo è benissimo illustrato da Copernico. Si veda la citazione riportata nelle note per la Silsis.

In termini moderni il ragionamento è il seguente. Ricordando che la velocità è la derivata rispetto al tempo della legge di movimento $r = r(t)$, ovvero $v = \dot{r}$, la legge $v = \alpha r$ prende la forma

$$\dot{r} = \alpha r ,$$

che ha ora l'aspetto di una equazione differenziale. Di questa abbiamo discusso la soluzione generale $r(t) = c e^{\alpha t}$, e sappiamo interpretare la costante arbitraria c in termini del moto $r(t)$ perché sappiamo che si ha $c = r(0) \equiv r_0$. Dunque la legge $v = \alpha r$ è equivalente al movimento

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t} ,$$

dove r_0 è lo spostamento iniziale. Ma per definizione lo spostamento al tempo zero è nullo: $r_0 = 0$, e dunque la legge $v = \alpha r$ è equivalente al moto $r(t) = 0$, secondo il quale il corpo non si sposta, che è un assurdo nel descrivere il moto dei gravi.¹⁷

Allora Galileo concepisce un'altra legge, l'altra legge più semplice che gli viene in mente, cioè che la velocità sia proporzionale al tempo trascorso (invece che allo spazio percorso), ovvero

$$v(t) = \alpha t .$$

Questa allora corrisponde all'equazione differenziale

$$\dot{r} = \alpha t , \tag{1.2.8}$$

la cui soluzione generale è ovviamente¹⁸ $r(t) = \alpha t^2/2 + c$, nella quale la costante arbitraria c compare ora additivamente anziché moltiplicativamente. Si constata subito che si ha $c = r(0) \equiv r_0$, sicché la soluzione si scrive

$$r(t) = \frac{\alpha}{2} t^2 + r_0 ,$$

e qui non vi è alcuna difficoltà nel fatto che sia $r_0 = 0$, perché corrispondentemente si trova il moto $r(t) = \alpha t^2/2$. Galileo poi controllò con varie astuzie sperimentali che tale legge è ben soddisfatta. Dunque trovò che la legge di caduta ideale (in assenza di attriti e resistenza dell'aria) è caratterizzata dal presentare una consistenza matematica e anche dall'essere la più semplice concepibile. Quest'ultimo fatto ha del miracoloso, e sembra essere

¹⁷Si noti che invece la legge $\dot{r} = \alpha r$ va benissimo per descrivere altri fenomeni, come tipicamente la legge di crescita delle popolazioni, in cui r rappresenta il numero di individui presenti in una popolazione. La derivata (il tasso di crescita) è ovviamente proporzionale alla popolazione, e se la popolazione inizialmente è nulla, resterà sempre nulla. Analogamente vale nel fenomeno del decadimento di materiale radioattivo, in cui la costante α è negativa.

¹⁸Basta determinare la primitiva del secondo membro, perché questo dipende solo da t , e non anche dall'incognita $x(t)$.

caratteristico di molte leggi fisiche fondamentali. Si possono trovare almeno due passi in cui anche Einstein afferma, facendo riferimento anche alla sua teoria della relatività generale, che appaia miracolosa la circostanza che le leggi fisiche fondamentali, oltre ad essere consistenti, siano anche molto semplici.

Il secondo passo compiuto da Galileo consiste poi nell'osservare che la legge $v(t) = \alpha t$ è limitata al caso particolare di velocità iniziale nulla. Si tratta di trovare la generalizzazione al caso di velocità iniziale arbitraria. Questo si ottiene osservando che la legge $v(t) = \alpha t$, quando la si derivi rispetto al tempo, conduce per l'accelerazione $a \equiv \dot{v}$ alla legge $a = \alpha$, ovvero conduce per la velocità all'equazione differenziale

$$\dot{v} = \alpha . \quad (1.2.9)$$

Questa si risolve immediatamente fornendo $v(t) = \alpha t + v_0$, la quale, ricorrendo $v = \dot{r}$, fornisce per il movimento $r(t)$ l'equazione differenziale

$$\dot{r} = \alpha t + v_0 .$$

Questa ha soluzione

$$r(t) = \frac{\alpha}{2} t^2 + v_0 t + r_0 ,$$

alla quale si riscontra che il moto è individuato dai dati iniziali di posizione e velocità.

Si potrebbe pensare di fare un altro passo, e prendere come legge di moto quella che si ottiene con una ulteriore derivazione rispetto al tempo, cioè $\dot{a} = 0$, ovvero che la derivata dell'accelerazione è nulla. Ora, questo fatto è una necessaria conseguenza delle ipotesi fatte (ovvero $(a = \alpha)$, perché in effetti per ipotesi l'accelerazione non dipende dal tempo, e quindi ha derivata nulla. Ma altra cosa è affermare che questa proprietà ($\dot{a} = 0$) è conseguenza della equazione di moto ($\dot{v} = 0$), e altra cosa è affermare che la relazione $\dot{a} = 0$ costituisca essa stessa l'equazione di moto, cioè che i movimenti siano tutti quelli che si ottengono integrando l'equazione $\dot{a} = 0$. Perché se la relazione $\dot{a} = 0$ viene interpretata come una equazione differenziale avente per incognita l'accelerazione $a = a(t)$, allora questa avrebbe come soluzione generale la funzione $a(t) = \text{costante}$, con un valore arbitrario della costante, mentre l'esperienza ci dice che nel moto dei gravi l'accelerazione ha un valore ben preciso, di circa 10 metri al secondo quadrato, e non arbitrario. Corrispondentemente, si trova che i movimenti hanno come elementi arbitrari solo la posizione e la velocità iniziali. Dunque in questo senso Galileo afferma che la legge del moto è quella per cui l'accelerazione ha un valore costante ben preciso, non come puro fatto fenomenologico, ma essenzialmente come corrispondente ad affermare che il moto è determinato da una equazione differenziale del secondo ordine, appunto l'equazione di Newton, e che nel caso particolare del moto dei gravi l'accelerazione ha un valore costante.

Per pervenire alla formulazione moderna, occorre compiere ancora due passi. Il primo passo consiste nel prendere come incognita (ancora nel caso del moto puramente verticale) non la distanza percorsa, ma (qui entra il contributo analitico dovuto alla geometria cartesiana) l'ascissa (con valori positivi, negativi o nullo) rispetto all'asse verticale, orientato ad esempio verso l'alto, sicché il moto è descritto da una funzione

$$z = z(t) .$$

La legge di moto si scrive allora

$$\ddot{z} = -g$$

dove g è la consueta notazione per l'accelerazione di gravità, e la soluzione è

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0z}t + z_0 ,$$

dove ora l'ascissa iniziale z_0 è un numero reale arbitrario.

Come secondo passo, si abbandona il vincolo di muoversi solo in verticale, e la posizione è un generico punto P nello spazio che, avendo fissata una origine O arbitraria, è individuato dal "vettore spostamento" $OP \equiv P - O \equiv \mathbf{x}$ (e qui, per pervenire alla notazione vettoriale attuale, bisogna attendere molto tempo, fino agli inizi del 900). Allora il movimento (l'incognita del problema) è una funzione a valori vettoriali

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) ,$$

e la legge di moto prende la forma

$$\ddot{\mathbf{x}} = -g\mathbf{k} ,$$

con soluzione

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{2}g\mathbf{k}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{x}_0 .$$

Che questa sia la soluzione, si può vedere direttamente in termini vettoriali, oppure prendendo le componenti lungo i tre assi cartesiani ortogonali, o equivalentemente moltiplicando scalarmente l'equazione di moto per i tre versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, sicché si ottengono le tre equazioni scalari

$$\ddot{x} = 0 , \quad \ddot{y} = 0 , \quad \ddot{z} = -g ,$$

L'equazione di moto (cioè l'equazione di Newton) ha dunque carattere vettoriale. In termini classici, questo fatto veniva descritto dicendo che si ha la "**composizine dei movimenti**" nelle varie direzioni. Nel nostro caso, il moto delle componenti nelle direzioni x ed y è indipendente dal moto della

componente verticale. Questo fatto comporta, nel caso dei gravi, come ben noto, che la traiettoria è una parabola.¹⁹

Nota storica. La scoperta della legge di caduta dei gravi da parte di Galileo può essere considerata la seconda circostanza in cui i moderni superarono, in ambito teorico, gli antichi. Il primo caso è quello della scoperta delle soluzioni delle equazioni algebriche di terzo e quarto grado, ottenute dalla scuola italiana tra Bologna, Brescia e Milano, da parte di Scipio del Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari. Come data di riferimento si può prendere il 1550, anno di pubblicazione della *Ars Magna*. Una circostanza notevole è che questo risultato ha richiesto di introdurre per la prima volta i numeri complessi (anche nel caso in cui le soluzioni siano reali, ma debbano essere espresse in termini dei coefficienti reali dell'equazione considerata). Una bella esposizione, di tipo elementare, si trova nel libro N.N. Kolmogorov, *Le matematiche*.

4. Lo spazio degli stati (o delle fasi): le variabili dinamiche. Dunque, poiché ogni soluzione dell'equazione di Newton risulta individuata da una coppia di vettori (posizione iniziale \mathbf{x}_0 e velocità iniziale \mathbf{v}_0), si capisce come per lo studio della dinamica di un punto materiale sia significativo considerare non solo lo spazio “fisico” \mathbb{R}^3 delle possibili posizioni P del punto (individuate, quando sia fissata un'origine O , da vettori $\overrightarrow{OP} \equiv \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$), ma si debba considerare anche lo spazio delle coppie ordinate di posizioni e velocità (essendo anche queste ultime dei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$). In altri termini, si considera lo spazio prodotto cartesiano $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ i cui punti sono le coppie ordinate \mathbf{x}, \mathbf{v} di posizioni e velocità. Questo spazio viene chiamato **spazio degli stati o spazio delle fasi**.²⁰

Fissata la forza, come una ben definita funzione di posizione e velocità (cioè del punto dello spazio delle fasi) ed eventualmente del tempo, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ il teorema di esistenza e unicità garantisce che esiste una e una sola soluzione dell'equazione di Newton che parte a un certo tempo t_0 da un arbitrario punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ dello spazio delle fasi: la soluzione risulta univocamente determinata sia per il futuro sia per il passato (almeno in un intorno del tempo iniziale t_0).

Le quantità di interesse fisico – dette **variabili dinamiche** –, come l'energia, le componenti del momento angolare, etc., sono funzioni a valori reali dello spazio delle fasi ed eventualmente del tempo, ovvero del tipo $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.

¹⁹Analiticamente, per dimostrarlo basta eliminare il tempo nelle espressioni di $z(t)$ ed $x(t)$ (scegliendo gli assi in modo che si abbia $y_0 = v_{y0} = 0$, e dunque $y(t) = 0$). È interessante vedere come procedeva Galileo in maniera del tutto equivalente, usando la definizione della parabola espressa nel modo classico, cioè senza il metodo analitico cartesiano. Si veda la quarta giornata delle *Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*.

²⁰In effetti, il secondo nome viene di solito riservato allo spazio in cui invece della velocità si considera la quantità di moto (ingl. *momentum*) $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, o una generalizzazione di questa.

Nota tecnica: l'equazione di Newton come equazione del primo ordine nello spazio degli stati. Nello studio delle equazioni differenziali è un procedimento comune riscrivere una equazione del secondo ordine come un sistema di due equazioni del primo ordine ambientate nello spazio degli stati. Nel nostro caso il procedimento consiste nel riscrivere l'equazione di Newton

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$$

come il sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) . \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Il punto sottile da capire è che la definizione della velocità $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ viene essa stessa a svolgere il ruolo di una equazione. Sono state raddoppiate le incognite, che ora sono le funzioni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, ma si sono anche raddoppiate le equazioni, perché è stata aggiunta l'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$. Lo spazio ambiente è ora, anziché lo spazio ordinario \mathbb{R}^3 , lo spazio degli stati \mathbb{R}^6 , un punto del quale è individuato da un vettore $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ a sei componenti, e l'incognita è il movimento $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ nello spazio degli stati.

Un modo del tutto equivalente di procedere è di considerare come variabile ausiliaria anziché la velocità \mathbf{v} la quantità di moto \mathbf{p} definita da

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} ,$$

sicché il sistema del primo ordine si scrive

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}/m \\ \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}/m, t) . \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Molto spesso questo fatto viene espresso dicendo che in termini della quantità di moto l'equazione di Newton assume la forma

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} .$$

Questo naturalmente è corretto, purché sia chiaro che si sta sottintendendo quanto detto appena sopra, ovvero che l'equazione $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ deve essere associata all'equazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}/m$.

Forse la necessità di queste precisazioni viene ad apparire estremamente chiara se si compie l'esercizio di scrivere un programma per integrare numericamente l'equazione di Newton. Allora sarà manifesto che, tranne che nel caso specialissimo di forza indipendente da \mathbf{x} e \mathbf{v} , non è possibile risolvere l'equazione $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ se non la si unisce con l'ulteriore informazione $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{p}/m$ (cioè se non si considera il sistema di quelle due equazioni).

Analogamente, per un sistema di N punti materiali si avrà uno spazio degli stati o delle fasi

$$\mathcal{F} = \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$$

i cui punti sono individuati dalle N -uple di vettori posizione $\mathbf{x}_1 \dots, \mathbf{x}_N$ e dalle N -uple di vettori velocità $\mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_N$, che danno la posizione e la

velocità (o la quantità di moto) di ciascun punto. Per lo spazio \mathbb{R}^{3N} delle posizioni di tutti i punti è classico il nome di **spazio delle configurazioni**.

Il sistema (1.2.2) delle N equazioni di Newton appare allora come una unica equazione del secondo ordine per il moto di un punto rappresentativo

$$X = (\mathbf{x}_1 \dots, \mathbf{x}_N)$$

nello spazio delle configurazioni, o una equazione del primo ordine nello spazio degli stati (o delle fasi). Naturalmente varrà ancora il teorema di esistenza e unicità, e ogni movimento sarà univocamente individuato dalla condizione di passare a un certo tempo t_0 per un arbitrario punto dello spazio delle fasi (cioè sarà determinato da condizioni iniziali che fissano le posizioni e le velocità di tutti i punti al tempo iniziale). Si capisce così il significato della celebre frase sul determinismo che Laplace, curiosamente, scrisse nel suo libro sulla probabilità (e proprio come frase conclusiva del libro), che dice pressappoco così:

“Se esistesse un Dio così perfetto da conoscere a un dato tempo le posizioni e le velocità di tutti i punti costituenti l’universo, allora Egli conoscerebbe tutto il passato e tutto il futuro dell’universo.”

Nota tecnica: il problema matematico della “regolarità” delle funzioni.

Nei corsi di analisi giustamente viene messo in luce come diverse proprietà matematiche che si possono dimostrare dipendono fortemente dalle cosiddette proprietà di regolarità che vengono assunte per le funzioni considerate: ad esempio le funzioni possono essere discontinue, oppure continue o derivabili solo k volte. Oppure si precisano i domini in cui certe funzioni sono definite. Queste naturalmente sono precisazioni interessantissime e talvolta essenziali. Noi qui comunque non ce ne occuperemo affatto, e considereremo sempre il caso più semplice possibile, che molto spesso è anche quello più significativo (almeno per cominciare). Dunque tutte le funzioni che considereremo saranno derivabili infinite volte, ed addirittura ammetteranno sviluppi in serie di potenze convergenti (funzioni analitiche). Analogamente non metteremo l’accento sulle proprietà che si richiedono per i domini di definizione (ad esempio, basterà pensare a domini aperti). Questa sarà la convenzione generale cui ci atterremo, e quando la dovessimo violare, ciò sarebbe soltanto perché la violazione corrisponderebbe a una situazione particolarmente significativa.²¹ Tenendo questo atteggiamento, imitiamo non solo i più grandi fisici teorici, ma anche i più

²¹Un esempio di grande interesse è quello dei “movimenti sottostanti” alle soluzioni dell’equazione del calore, perché tali movimenti risultano in nessun punto differenziabili. Ma allora questo fatto è lo specchio di una proprietà assolutamente generale, che riguarda le cosiddette “realizzazioni dei processi stocastici diffusivi”, e ciò significa allora che ci stiamo mettendo in un ambito specialissimo. Si noti che tale ambito è però di particolare interesse in meccanica quantistica, perché l’equazione di Schroedinger, che prende il posto dell’equazione di Newton, è strettamente connessa all’equazione del calore.

Un altro esempio interessantissimo, che riguarda i domini di definizione della funzioni, è quello dell’esistenza dell’energia potenziale per un campo di forze posizionale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ irrotazionale (cioè con $\text{rot } \mathbf{F} = 0$). In tal caso è garantita l’esistenza dell’energia potenziale, ovvero di una funzione scalare $V = V(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, solo se il dominio di

grandi matematici. Come esempio, riportiamo la seguente citazione dalla prima pagina di un celebre libro di Luigi Bianchi, in cui egli discute di certe funzioni z di certe variabili x e dice:²²

“Le variabili, come le funzioni, potranno essere reali o complesse; ma, anche se le nostre considerazioni saranno limitate nel campo reale, noi supporremo sempre in seguito che le funzioni siano estendibili al campo complesso e risultino funzioni *analitiche regolari* dei loro argomenti, in campi sufficientemente ristretti di variabilità per le x . Così, se $x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)}$ è un sistema di valori delle x nell’interno di detti campi, le funzioni z saranno sviluppabili in *serie di potenze* dei binomi $x_1 - x_1^{(0)}$, $x_2 - x_2^{(0)}$, ... , $x_n - x_n^{(0)}$, ed ammetteranno quindi derivate di tutti gli ordini sempre finite e continue.”

5. Il teorema dell’energia, e altri teoremi fondamentali. Cominciamo con il

a) Problema a un corpo, cioè quello di un sistema costituito da un solo punto materiale. Consideriamo dapprima il caso in cui il corpo è soggetto ad una forza \mathbf{F} generica, ovvero una forza dipendente a priori da posizione, velocità e tempo.²³ In un sistema inerziale vale dunque l’equazione di Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} .$$

Il teorema dell’energia nella sua forma più generale è allora quello che viene chiamato **teorema dell’energia cinetica** (nome classico: *teorema della forza viva*).²⁴

Teorema (dell’energia cinetica, o della forza viva). *Definita l’energia cinetica (o forza viva) T come*

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \equiv \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} , \quad (1.2.12)$$

definizione del campo di forze soddisfa a speciali condizioni (ad esempio è – come si dice – semplicemente connesso, cioè non ha “buchi”). Questa situazione, che sembrerebbe a prima vista costituire una curiosità, è invece di interesse fondamentale in aerodinamica. In tal caso il campo vettoriale di interesse è, invece del campo di forze, il campo di velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, e la presenza di un “buco” nel dominio di definizione descrive il fatto fisico che entro il dominio di definizione esiste un aereo. Il fatto che il dominio sia non semplicemente connesso è al cuore del calcolo della forza di portanza che sostiene l’aereo: si tratta della celebre formula di Kutta–Jukowsky.

²²L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Spoerri (Pisa, 1918).

²³O a un sistema di forze la cui somma vettoriale – o risultante, come anche si dice – sia \mathbf{F} .

²⁴Perché *forza viva* (in latino *vis viva*) è il nome classico per l’energia cinetica. Potrebbe suscitare meraviglia il fatto che fosse chiamata “forza” quella che noi oggi chiamiamo “energia”. Anche il classicissimo lavoro di Helmholtz del 1847 sulla conservazione dell’energia ha per titolo “*Über die Erhaltung der Kraft*”, cioè “*Sulla conservazione della forza*”.

allora lungo ogni soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dell'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ si ha

$$\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (1.2.13)$$

o equivalentemente

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dt . \quad (1.2.14)$$

La quantità $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ viene chiamata **potenza della forza**, mentre la quantità integrale $\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dt$ viene chiamata **lavoro della forza**. Dunque il teorema dell'energia cinetica asserisce che la derivata temporale (il tasso di crescita, ingl. *rate of growth*) dell'energia cinetica è uguale alla potenza della forza, o che l'incremento di energia cinetica è uguale al lavoro della forza.

Dimostrazione. Si moltiplicano ambo i membri dell'equazione di Newton scalarmente per \mathbf{v} , si ricorda $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ e si usa l'identità^{25 26}

$$\mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2\right) \equiv \dot{T}$$

In tal modo si ottiene subito la versione differenziale (1.2.13) del teorema. La corrispondente versione integrale (1.2.14) si ottiene poi banalmente integrando la prima nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) e che quindi si estende tra i punti $A = \mathbf{x}(t_0)$ e $B = \mathbf{x}(t_1)$.

Ulteriori formulazioni si ottengono poi introducendo condizioni particolari sulla forza. Il caso più significativo è quello di **forza posizionale**, in cui cioè la forza dipende solo dalla posizione, e non dalla velocità (e neanche dal tempo, ma vedremo poi che la dipendenza dal tempo porta a una banale generalizzazione). Ammettiamo dunque di avere, come si dice, un **campo di forze**, ovvero una legge che assegna una forza ad ogni punto

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) .$$

²⁵Si tratta della nota formula di Leibniz per la derivata di un prodotto – cioè sostanzialmente della formula di integrazione per parti – che vale non solo quando si considera il prodotto di due scalari, ma anche il prodotto scalare o il prodotto vettore di due vettori. Nel nostro caso basta leggere da destra a sinistra la relazione

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} .$$

²⁶Per quanto riguarda la dimostrazione della formula di Leibniz per il prodotto scalare o per il prodotto vettore, il modo più semplice è di scrivere il prodotto scalare in termini delle componenti, e di verificare la formula per il prodotto vettore considerando le singole componenti. A un livello più sofisticato (e intrinseco), si può fare riferimento alla bilinearità del prodotto scalare e del prodotto vettore, e alla definizione di differenziale come parte lineare dell'incremento.

In questo caso si controlla immediatamente che l'integrale che appare a secondo membro della (1.2.14) dipende dal movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ nell'intervallo (t_0, t_1) soltanto attraverso la corrispondente traiettoria (diciamola γ – lettera greca gamma), e non anche attraverso la legge oraria; si noti comunque che la legge oraria lascia almeno una traccia sulla traiettoria, perché le imprime un orientamento (una freccia). Si dice che in tal caso l'integrale a secondo membro è **l'integrale curvilineo della forma differenziale**

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz$$

(perché per un assegnato movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ si ha $\mathbf{v} dt = d\mathbf{x}$) e il teorema dell'energia cinetica prende dunque la forma

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} . \quad (1.2.15)$$

dove γ è la traiettoria (o curva) orientata definita dal movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ nell'intervallo t_0, t_1 .

Il caso ancora più significativo è poi quello che si dice **caso conservativo**, in cui, come anche si dice, “**la forza ammette potenziale**”, cioè esiste una funzione (scalare) $V = V(\mathbf{x})$ tale che ²⁷

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V , \quad \text{ovvero} \quad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} , \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} .$$

Questa condizione si esprime anche dicendo che la forma differenziale del lavoro è una forma esatta, cioè è il differenziale di una funzione (proprio della funzione $-V$):

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = -dV . \quad (1.2.16)$$

La funzione V viene detta **energia potenziale** (nome classico: *funzione delle forze*).

In generale, le tre componenti della forza, F_x, F_y, F_z sono tre funzioni di \mathbf{x} (cioè di (x, y, z)) completamente indipendenti, mentre qui si richiede la fortissima restrizione che esse siano le derivate parziali di **una sola** funzione. Ricordando il teorema di Schwarz sulle scambiabilità delle derivate parziali miste,²⁸ è immediato verificare che condizione necessaria affinché il campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ammetta potenziale è che si abbia $\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0$ con le analoghe relazioni che si ottengono ciclando $x, y,$

²⁷Sarebbe più spontaneo considerare, anziché la funzione V , il suo opposto $-V$. In tal caso l'energia (introdotta più sotto) sarebbe definita da $E = T - V$ anziché da $E = T + V$.

Si noti che moltissimi autori denotano con U la funzione che qui abbiamo chiamato V . Altri ancora denotano la nostra V con $-U$. Purtroppo non si è ancora stabilita una uniformità a questo proposito.

²⁸Ovvero,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

e così via.

z . In altri termini, si richiede che il campo vettoriale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ sia **irrotazionale**, cioè si abbia $\text{rot } \mathbf{F} = 0$.²⁹

La ragione per cui questo caso (di forza che ammette potenziale) viene detto “conservativo” è che in tal caso il teorema dell’energia cinetica prende la forma di una legge di conservazione di una quantità che viene chiamata **energia**, definita come somma di energia cinetica ed energia potenziale. Si ha infatti il

Teorema (dell’energia). *Per un punto soggetto a un campo di forze posizionali conservativo, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, lungo ogni soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dell’equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ si ha*

$$\dot{E} = 0$$

dove E è l’energia, definita come somma di energia cinetica ed energia potenziale:

$$E = T + V .$$

La dimostrazione può essere vista come una immediata conseguenza della regola di derivazione di una funzione composta (*chain rule*), secondo la quale si ha³⁰

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\frac{dV}{dt} \equiv -\dot{V} .$$

Dunque il teorema dell’energia cinetica $\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ prende la forma $\dot{T} = -\dot{V}$, ovvero, per la linearità della derivata, $\frac{d}{dt}(T + V) = 0$.

Naturalmente, al medesimo risultato si perviene considerando il teorema dell’energia cinetica nella sua forma integrale (1.2.15).³¹

Dunque la funzione $E(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ assume il medesimo valore su tutti i punti di una medesima orbita nello spazio delle fasi corrispondente a ogni particolare soluzione dell’equazione di Newton. Ogni variabile dinamica che

²⁹Ricordiamo che il campo vettoriale $\text{rot } \mathbf{F}$ è definito, per la componente x , da

$$(\text{rot } \mathbf{F})_x = \partial_y F_z - \partial_z F_y$$

e per le altre componenti in maniera analoga, **ciclando** su x, y, z . Qui si è usata la notazione

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} .$$

Si ha inoltre che la condizione di irrotazionalità, $\text{rot } \mathbf{F} = 0$, è anche sufficiente se il dominio di definizione del campo di forze è “semplicemente connesso”, ovvero non presenta “buchi”.

³⁰Naturalmente, qui si usa la consueta scrittura abbreviata per il prodotto scalare in coordinate cartesiane ortogonali, ovvero

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \equiv \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} .$$

³¹Infatti, evidentemente, se la forma differenziale del lavoro è il differenziale di una funzione, allora l’integrale curvilineo considerato dipende solo dagli estremi A e B , e non

goda di questa proprietà viene detta **costante del moto**. Una trattazione sistematica delle costanti del moto verrà data in ambito hamiltoniano.

Osservazione. Un modo del tutto equivalente ma significativo di procedere per verificare che l'energia è una costante del moto è il seguente.³² Si osserva che l'energia, come ogni variabile dinamica, è una funzione definita sullo spazio degli stati (o delle fasi), $E = E(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. D'altra parte, essendo assegnata la forza, per il teorema di esistenza e unicità in ogni punto dello spazio degli stati passa una unica curva definita come soluzione $\mathbf{x}(t)$ dell'equazione di Newton, sicché seguendo la soluzione l'energia $E(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$ diviene una funzione del tempo (funzione composta):

$$E(t) = E(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) .$$

Dunque, derivandola rispetto al tempo con la regola di derivata di funzione composta (*chain rule*) e ricordando $E = T(\mathbf{v}) + V(\mathbf{x})$, si ha

$$\dot{E} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{a} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} - \mathbf{F}) = 0 ,$$

proprio perché ci si muove *lungo soluzioni dell'equazione di Newton*, ovvero lungo curve dello spazio delle fasi corrispondenti a soluzioni dell'equazione $m\mathbf{a} - \mathbf{F} = 0$.

Connessione con il ritratto in fase (*phase portrait*). Abbiamo detto che una costante del moto è definita dalla proprietà di mantenere inalterato il proprio valore lungo ogni soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dell'equazione di Newton. Ora, ogni soluzione è determinata dai dati iniziali $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$, i quali a loro volta fissano il valore iniziale

anche dalla particolare curva γ percorsa, e dunque si ha

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = - \int_{\gamma} dV = V(A) - V(B) .$$

Ricordiamo a questo proposito che, dato un campo vettoriale $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, si può considerare come primitiva la proprietà che l'integrale curvilineo della corrispondente forma differenziale $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ lungo un cammino orientato γ dipenda dal cammino solo attraverso i suoi punti estremi A, B . Questa condizione è equivalente a richiedere che sia nullo l'integrale della forma differenziale lungo ogni cammino chiuso:

$$\oint \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0 .$$

Si dimostra poi che questa proprietà è equivalente alla proprietà che il campo ammetta potenziale. Si noti bene che stiamo qui considerando il caso in cui dominio di definizione della forza sia, come si dice, semplicemente connesso, ovvero senza "buchi".

In questo caso si ha dunque $T(B) - T(A) = V(A) - V(B)$ ovvero $T(B) + V(B) = T(A) + V(A)$. Si noti che in questa formulazione l'energia cinetica sembrerebbe essere una funzione del posto. Ciò è dovuto al fatto che si sta considerando una soluzione dell'equazione di Newton, che determina un particolare valore E_0 dell'energia, sicché la relazione $T + V = E_0$ si scrive anche $T = E_0 - V(\mathbf{x})$, e quindi è vero, che, lungo ogni soluzione dell'equazione di Newton, l'energia cinetica è funzione del posto (dipendente parametricamente dal valore fissato dell'energia).

³²In effetti, qui ci limitiamo a *verificare* che l'energia è una costante del moto, già conoscendone la definizione. Il metodo precedente (moltiplicare scalarmente l'equazione di Newton per la velocità) ci ha invece indotto a *concepire* l'energia come costante del moto.

E_0 dell'energia E . Pertanto, avendo fissato i dati iniziali e quindi anche il valore E_0 dell'energia, il teorema di conservazione dell'energia va letto nella forma

$$T + V = E_0 ,$$

dove E_0 è il particolare valore dell'energia fissato dai dati iniziali. È dunque significativo considerare nello spazio degli stati (o delle fasi) i sottoinsiemi definiti dalla condizione

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = c ,$$

che vengono detti **superfici di livello dell'energia**. Particolarmente significativo è il caso del moto sulla retta (o più in generale – si veda avanti – il caso di un solo grado di libertà). Infatti in tal caso lo spazio degli stati (o delle fasi) è bidimensionale, e le superfici di livello si riducono a curve (monodimensionali). Dunque tutto lo spazio delle fasi (bidimensionale) risulta essere stratificato (o fogliato, come si dice in geometria) in curve (monodimensionali) di livello dell'energia. Per ogni dato iniziale (posizione e velocità) risulta allora determinato un ben definito valore E_0 dell'energia, e allora il corrispondente moto $x(t), v(t)$ nello spazio delle fasi si svolge proprio sulla corrispondente linea di livello dell'energia, $E(x, v) = E_0$. In conseguenza, per determinare il movimento non è necessario risolvere l'equazione differenziale di Newton, ma basta tracciare la corrispondente curva di livello dell'energia. Il disegno che traccia le più significative curve di livello dell'energia nello spazio delle fasi viene detto *ritratto in fase* (ingl. *phase portrait*). Esempi significativi verranno discussi alla fine di questo capitolo,

Il **problema di determinare l'energia potenziale** $V = V(\mathbf{x})$ per un assegnato campo di forze conservativo è, nella maggior parte dei casi significativi, alquanto banale. L'osservazione di fondo è che, nel caso di un punto vincolato a una retta, in cui dunque la forza è una funzione reale di variabile reale, $F = F(x)$, è sempre vero che la forma differenziale del lavoro è il differenziale di una funzione:

$$F(x) dx = -dV .$$

Infatti, poiché ammetteremo sempre che le funzioni considerate siano regolari, e quindi in particolare integrabili, l'energia potenziale V è semplicemente la primitiva (cambiata di segno) della funzione F :³³

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad \text{ovvero} \quad F(x) = -V'(x) ,$$

Si noti che, evidentemente, l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva, che sceglieremo arbitrariamente.

³³In altri termini, la condizione che la forma differenziale $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$ sia esatta rappresenta una effettiva seria restrizione sui campi vettoriali solo nel caso di dimensioni maggiori o uguali a due, perché allora il campo deve soddisfare la condizione $\text{rot } \mathbf{F} = 0$ (ovvero $\partial_y F_z - \partial_z F_y = 0$ e così via). Ma questa condizione concerne le derivate parziali, e quindi non viene neppure ad essere concepibile nel caso monodimensionale.

Esempi:

$$\begin{cases} F(x) = c, & V(x) = -cx \\ F(x) = -kx, & V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \\ F(x) = c/x^2, & V(x) = c/x. \quad (x \neq 0) \end{cases} \quad (1.2.17)$$

Dunque, nel caso monodimensionale la forma differenziale del lavoro, come forma in una sola variabile, è sempre il differenziale di una funzione, e quindi l'energia potenziale esiste e viene immediatamente determinata.

Nel caso di un punto nello spazio, il metodo più comodo per determinare l'energia potenziale, quando sia assegnato un campo di forze conservativo, consiste nello scrivere in coordinate opportune la corrispondente forma differenziale $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ che esprime il "lavoro infinitesimo" o "lavoro elementare", e nel constatare che nei casi più significativi essa si riduce a una forma differenziale in una sola variabile, perché due coefficienti si annullano, sicché in sostanza ci si riduce al caso unidimensionale.

Esempi.

- Moto dei gravi: $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$, ovvero $F_x = F_y = 0$, $F_z = -mg$. Dunque si ha $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mg dz$, ovvero

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = -d(mgz)$$

e quindi $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = -dV$ con

$$V = mgz.$$

- Campo di forze *centrale a simmetria sferica*:³⁴

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(r) \frac{\mathbf{x}}{r},$$

$$V(r) = - \int_{r_0}^r f(\tilde{r}) d\tilde{r}, \quad \text{ovvero} \quad f = -V'.$$

Dimostrazione. Si osserva³⁵ $\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = r dr$ e dunque

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \frac{f(r)}{r} \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = f(r) dr,$$

³⁴È questo il caso in cui nel punto generico \mathbf{x} la forza $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è **centrale**, cioè diretta lungo la direzione che collega il punto con il centro delle forze (qui l'origine delle coordinate), ovvero è diretta come il vettore \mathbf{x} , o equivalenatamente è diretta come il versore (*unit vector*) \mathbf{x}/r (dove r è la distanza dall'origine, cioè la lunghezza del vettore \mathbf{x} , definita da $r^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$). Inoltre si suppone che l'intensità della forza, qui denotata con f , dipenda solo dalla distanza r e non dagli angoli ϑ , φ delle coordinate polari (forza **a simmetria sferica**).

³⁵Infatti, per la formula di Leibniz per la derivata (o per il differenziale) di un prodotto (formula di integrazione per parti) e per la definizione di r come lunghezza del vettore \mathbf{x} (ovvero, $r^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$) si ha

$$2\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = dr^2 = 2r dr.$$

sicché ci si è ridotti al caso monodimensionale con forza $f(r)$. In altri termini, passando a coordinate polari la forma differenziale del lavoro si scriverebbe in generale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = Q_r dr + Q_\vartheta d\vartheta + Q_\varphi d\varphi$$

con coefficienti (detti *forze generalizzate*) $Q_r, Q_\vartheta, Q_\varphi$ arbitrari; ma per forze centrali a simmetria sferica si ha $Q_\vartheta = Q_\varphi = 0$ e $Q_r = f(r)$. Dunque si ha

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = f(r) dr ,$$

come se fossimo in un caso monodimensionale, e pertanto l'energia potenziale coincide con la primitiva (cambiata di segno) dell'intensità f della forza.

Veniamo ora a una breve discussione riguardante **la quantità di moto** ed il **momento angolare** (nome classico: *momento della quantità di moto*).

Per quanto riguarda la **quantità di moto** (ingl. *momentum*)³⁶ $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, si è già commentato come l'equazione di Newton sia *sostanzialmente* equivalente alla legge

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} .$$

La corrispondente versione integrale³⁷

$$\mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \quad (1.2.18)$$

viene particolarmente utilizzata nello studio delle collisioni, e la quantità $\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt$ (uguale a $\mathbf{F} \cdot (t_1 - t_0)$ nel caso di forza costante) viene detta **impulso della forza**.

Di gran lunga più significativa è invece la considerazione del **momento angolare** (ingl. *angular momentum*). Occorrerebbe a tal fine illustrare come l'introduzione di questa quantità sia spontanea (e in effetti sia avvenuta storicamente) in relazione ai problemi in cui si considerano delle rotazioni (si pensi alla bilancia). Ciò è ben illustrato ad esempio nel celebre libro di Mach sulla meccanica. Tralasciando qui questa discussione, veniamo direttamente al cuore del problema. Si ha il

Teorema (del momento angolare). *Per un punto materiale soggetto a forza generica $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, lungo ogni soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dell'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ si ha*

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} , \quad (1.2.19)$$

³⁶Da non confondersi con *moment*, nome che si usa ad esempio per il momento di una forza o il momento della quantità di moto, che infatti viene tradotto con *moment of the momentum* (ma viene più comunemente chiamato *angular momentum*).

³⁷Si intende

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt$$

dove $\mathbf{x}(t)$ è una soluzione dell'equazione di Newton per la assegnata forza $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$.

dove \mathbf{L} e \mathbf{M} sono il momento angolare e il momento della forza, che sono definiti da³⁸

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{p} ,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{F} .$$

La dimostrazione è banalissima. Si moltiplica vettorialmente (ad esempio, a sinistra) l'equazione di Newton per \mathbf{x} e si usa una ovvia identità che è ancora nient'altro che la familiare regola di Leibniz per la derivata di un prodotto³⁹ (oltre alla proprietà che il prodotto vettore di due vettori paralleli è nullo: nel nostro caso, $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$).

Corollario (Conservazione del momento angolare per campi di forza centrali). *Per i campi di forza centrali il vettore momento angolare \mathbf{L} è una costante del moto, ovvero lungo ogni soluzione dell'equazione di Newton si ha*

$$\dot{\mathbf{L}} = 0 .$$

Infatti, per definizione un campo di forze è centrale se la forza nel punto \mathbf{x} è diretta come \mathbf{x} e quindi il momento della forza, come prodotto vettore di due vettori paralleli, è nullo, $\mathbf{M} = 0$. Più in generale, si dimostra immediatamente che se è nulla la proiezione del momento della forza lungo una direzione, allora è una costante del moto la componente del momento angolare lungo quella direzione.⁴⁰

Corollario (Per campi di forza centrali i moti sono piani). *Si consideri un punto soggetto a un campo di forze centrali. Allora per ogni soluzione dell'equazione di Newton la traiettoria giace in un piano passante per il centro delle forze e ortogonale al vettore momento angolare (costante).*

La dimostrazione che si trova su tutti i manuali è la seguente. Dalla definizione di prodotto vettore, sappiamo che il vettore $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ è ortogonale a ciascuno dei due fattori, in particolare al vettore \mathbf{x} . Ma la relazione di ortogonalità è simmetrica,

³⁸In queste definizioni, interviene il vettore \mathbf{x} , che esprime la posizione del punto considerato rispetto all'origine delle coordinate. Più in generale, si possono definire il momento angolare e il momento della forza rispetto a un punto O arbitrario, non necessariamente coincidente con l'origine delle coordinate. Tale punto viene detto anche "polo". Il teorema del momento angolare si generalizza facilmente al caso in cui il polo non sia fisso rispetto al sistema inerziale considerato.

³⁹Si ha infatti

$$\mathbf{x} \times \mathbf{a} \equiv \mathbf{x} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{v}) .$$

⁴⁰Si prenda l'asse z orientato lungo quella direzione. Allora è per ipotesi $M_z = 0$ e quindi

$$\dot{L}_z = 0 .$$

e dunque \mathbf{x} è ortogonale a \mathbf{L} . D'altra parte, in virtù del teorema del momento angolare, il vettore \mathbf{L} è costante. Dunque ad ogni tempo t il vettore $\mathbf{x}(t)$, dovendo essere ortogonale a un vettore costante, giace in un piano perpendicolare a quel vettore, e dunque giace in un piano costante. Questo piano è individuato dai dati iniziali $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$, che definiscono il vettore costante $\mathbf{L}_0 = \mathbf{x}_0 \times (m\mathbf{v}_0)$.

Un lettore che possieda una certa sensibilità potrebbe rimanere perplesso, giudicando questa dimostrazione senz'altro corretta, ma tuttavia non intuitiva. Ed in effetti avrebbe perfettamente ragione. Tanto è vero che Newton non si sarebbe mai sognato di dare una dimostrazione di questo tipo. La sua dimostrazione sarebbe sostanzialmente sulla linea del seguente argomento. I dati iniziali $\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0$ definiscono un piano, diciamolo Π_0 , nel quale si svolgerebbe il moto se non fosse presente la forza (anzi, la traiettoria sarebbe una retta, quella passante per \mathbf{x}_0 e diertta come \mathbf{v}_0). Ora, l'esistenza di una forza corrisponde all'esistenza di una accelerazione $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, e quindi, essendo $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, in un "tempuscolo" dt si ha una variazione (incremento vettoriale) di velocità $d\mathbf{v} = (\mathbf{F}/m) dt$. Dunque questo incremento di velocità $d\mathbf{v}$, essendo un vettore proporzionale alla forza, giace anch'esso nel piano Π_0 (perché per ipotesi la forza è centrale. e l'origine delle coordinate è stata scelta nel centro delle forze), e pertanto lo spostamento (incremento $d\mathbf{x}$ del vettore posizione \mathbf{x}) relativo al "tempuscolo" dt giace anch'esso nello stesso piano. In conseguenza, il "nuovo" vettore posizione $\mathbf{x}(t + dt) \simeq \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}dt$ giace anch'esso nel piano Π_0 . Questa descrizione richiederebbe delle precisazioni, sulle quali ritorneremo in un'altra parte delle note.

Proprio questo procedimento (ma con incrementi del tempo "piccoli" anziché infinitesimi) è sostanzialmente quello che viene utilizzato concretamente in tutti i procedimenti numerici che si usano per determinare delle soluzioni approssimate delle equazioni differenziali. In altra parte delle note illustreremo come il procedimento che Newton usava per le sue dimostrazioni teoriche è in effetti uno tra i più sofisticati procedimenti mai concepiti per calcolare concretamente su calcolatore le soluzioni approssimate dell'equazione di Newton.

Accenniamo ora ad una interessantissima

Relazione tra proprietà di simmetria e leggi di conservazione. Partiamo dal caso più semplice, ovvero l'equazione per la quantità di moto (sostanzialmente equivalente all'equazione di Newton) $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$, e consideriamone ad esempio la proiezione sull'asse delle x , ovvero $\dot{p}_x = F_x$. Ne deduciamo che, se $F_x = 0$, allora si ha che $\dot{p}_x = 0$. In altri termini, se $F_x = 0$, allora lungo le soluzioni dell'equazione di Newton si ha $p_x(t) = \text{costante}$, ovvero, come si dice, la componente p_x della quantità di moto è una costante del moto (si conserva, come anche si dice). Ma per forze posizionali conservative, in cui $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, la proprietà $F_x = 0$ è equivalente alla proprietà

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \text{ovvero} \quad V(x+h, y, z) = V(x, y, z) \quad \forall h,$$

cioè alla proprietà che V non dipende da x , ovvero che l'energia potenziale dipende effettivamente solo dalle variabili y, z : $V = V(y, z)$. Questa proprietà viene anche descritta dicendo che V è **invariante per traslazioni lungo l'asse delle x** , oppure che V **presenta una simmetria rispetto alle traslazioni lungo l'asse delle x** . Allo stesso modo si dimostra la

Proposizione. *Se l'energia potenziale V è invariante (o simmetrica) per traslazioni rispetto ad un asse, allora la componente della quantità di moto \mathbf{p} lungo quell'asse è una costante del moto.*⁴¹

Analogamente si procede per il momento angolare. Evidentemente, se $M_z = 0$ allora L_z è una costante del moto. Si tratta ora di potere eventualmente associare la proprietà $M_z = 0$ a qualche proprietà di simmetria dell'energia potenziale V . Dalla definizione di \mathbf{M} si constata immediatamente che la condizione $M_z = 0$ si scrive nella forma $x \frac{\partial V}{\partial y} - y \frac{\partial V}{\partial x} = 0$, che scriveremo anche nella forma

$$\left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}\right) V(x, y, z) = 0 . \quad (1.2.20)$$

Si presenta allora il problema analitico di leggere quest'ultima proprietà come una proprietà di invarianza o simmetria dell'energia potenziale $V(x, y, z)$. Ciò si ottiene subito operando un opportuno cambiamento di variabili, suggerito dalla natura stessa del problema. Basta ricordare che il momento angolare è fin dalle sue antiche origini un concetto connesso a problemi di rotazioni, e dunque l'ipotesi $M_z = 0$ suggerisce spontaneamente di passare a coordinate cilindriche relative all'asse z . Ovvero, la coordinata z non viene toccata, e si trasformano soltanto le coordinate x ed y sostituendole con le corrispondenti coordinate polari piane (r, φ) mediante le note relazioni

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi$$

(con $r \neq 0$). Un banalissimo calcolo mostra allora che si ha⁴²

$$x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

Dunque la condizione (1.2.20) prende la forma

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 , \quad \text{ovvero} \quad V(r, \varphi + h, z) = V(r, \varphi, z) \quad \forall h ,$$

la quale asserisce che V è invariante se si incrementa arbitrariamente l'angolo φ . In altri termini, L_z è una costante del moto se e solo se **l'energia potenziale V è invariante per rotazioni attorno all'asse z** , ovvero si ha $V = V(r, z)$.

Più in generale abbiamo la

⁴¹Basta prendere come asse delle x proprio quell'asse.

⁴²Infatti, per la regola di derivata di funzione composta, essendo $\varphi = \varphi(x, y)$ (e quindi in particolare $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$) si ha

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} .$$

Proposizione. *Se l'energia potenziale è simmetrica (o invariante) per rotazioni rispetto ad un asse, allora la componente del momento angolare \mathbf{L} lungo quell'asse è una costante del moto.*

Una situazione analoga, per cui l'esistenza di una costante del moto è connessa a una proprietà di simmetria dell'energia potenziale, si incontra anche nel caso dell'energia $E = T + V$. Infatti, il teorema dell'energia è stato dimostrato poco sopra nel caso in cui la forza (e quindi anche l'energia potenziale) è indipendente dal tempo, cioè nel caso in cui, invece di aversi (come avviene in generale) $V = V(\mathbf{x}, t)$, si ha $V = V(\mathbf{x})$ o, equivalentemente

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (1.2.21)$$

È facile rendersi conto (ma in ogni caso lo rivedremo più avanti in una forma più generale) che la (1.2.21) è condizione necessaria e sufficiente perché l'energia sia una costante del moto. Osserviamo ora che la condizione può esprimersi dicendo che l'energia potenziale è invariante (o simmetrica) per traslazioni temporali, cioè sotto il gruppo di trasformazioni $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}, t + h)$.

Abbiamo quindi la

Proposizione. *Se l'energia potenziale è simmetrica (o invariante) per traslazioni temporali, allora l'energia $E = T + V$ è una costante del moto.*

Proposizioni analoghe si dimostrano con altrettanta semplicità per sistemi di N punti materiali (comunque, una trattazione più generale verrà qui svolta nel capitolo sulle equazioni di Hamilton). Nel caso di N punti non vincolati, il ruolo di V sarà svolto dall'energia potenziale *totale* del sistema, e i ruoli di \mathbf{p} e \mathbf{L} verranno svolti dalla quantità di moto totale del sistema e dal momento angolare totale del sistema, i quali (\mathbf{p} e \mathbf{L}) vengono definiti *additivamente*, cioè per somma su tutti i punti materiali costituenti il sistema. Nel caso più generale, si richiederà la simmetria della hamiltonian del sistema.

Nota storico-critica. Abbiamo dunque visto come l'esistenza di costanti del moto (rispettivamente: componenti della quantità di moto, energia, componenti del momento angolare) siano connesse a proprietà di simmetria (o invarianza) dell'energia potenziale rispetto a certi gruppi di trasformazioni dello spaziotempo (rispettivamente: traslazioni spaziali, traslazione temporale, rotazioni). Sembra che proprietà di questo tipo non siano state osservate (almeno in maniera completamente esplicita) prima del 1918, quando apparve un celebre lavoro di Emmy Noether dedicato a questo problema, addirittura in un ambito più generale, quello della teoria dei campi.⁴³ Ciò è dovuto al fatto che, dopo i tempi classici, i gruppi

⁴³E. Noether, "Invariante Variationsprobleme", Göttingen Nachrichten 235-257 (1918). Per una traduzione inglese si veda M.A. Tavel, *Transport Theory and Statistical Mechanics*, 1, 183-207 (1971). E. Noether si era unita al gruppo degli allievi di Hilbert nel 1915, all'età di 33 anni. Si veda Nina Byers, "E. Noether's Discovery of the Deep Connection Between

di simmetria vennero introdotti per la prima volta solo nell'ottocento, prima da Evaristo Galois in relazione con le soluzioni delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto, e poi estesi dalla svedese Sophus Lie allo studio delle equazioni differenziali. Infine, questo punto di vista fu posto alla base della geometria da Klein nel suo celebre programma di Erlangen alla fine dell'ottocento. Solo dopo di allora si poté pervenire alla formulazione del teorema di Noether.

Un'altra importante osservazione è la seguente. Abbiamo visto sopra una associazione tra gruppi di trasformazioni dello spaziotempo e corrispondenti variabili dinamiche (esempio: traslazione lungo l'asse x , associata a componente x della quantità di moto). Vedremo più avanti, nel capitolo sulle equazioni di Hamilton, che, in un senso da precisarsi, quelle variabili dinamiche sono proprio i generatori delle corrispondenti trasformazioni, e questo avviene sia in ambito classico che in ambito quantistico. Nell'esempio appena citato, la componente x della quantità di moto è il generatore delle traslazioni lungo l'asse delle x . Analogamente, l'energia è il generatore delle traslazioni temporali, e la componente z del momento angolare è il generatore delle rotazioni attorno all'asse z .

b) Problema a N corpi. Se abbiamo un sistema di N punti materiali, si hanno per incognite i movimenti $\mathbf{x}_k(t)$ di tutti i punti $k = 1, \dots, N$. Questi soddisfano il sistema di N equazioni (vettoriali) del secondo ordine

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k \quad (k = 1, \dots, N)$$

equivalente al sistema di $2N$ equazioni (vettoriali) del primo ordine

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{p}_k/m_k, \quad \dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{F}_k \quad (k = 1, \dots, N)$$

in cui è stata introdotta la definizione di quantità di moto della particella k -esima $\mathbf{p}_k = m_k \mathbf{v}_k$.

Si introducono allora le definizioni di **quantità di moto del sistema**

$$\mathbf{p} = \sum_k \mathbf{p}_k \equiv \sum_k m_k \mathbf{v}_k$$

e di **momento della quantità di moto del sistema**

$$\mathbf{L} = \sum_k \mathbf{L}_k \equiv \sum_k \mathbf{x}_k \times \mathbf{p}_k .$$

Poiché tali quantità sono definite **additivamente** (cioè per somma sulle analoghe quantità relative ai singoli punti), e d'altra parte la derivazione è una operazione additiva, dal sistema di equazioni di Newton si ottengono immediatamente⁴⁴ le due equazioni

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}$$

Symmetries and Conservation Laws", Israel Mathematical Conference Proceedings Vol. 12 (1999).

⁴⁴La prima si ottiene semplicemente sommando membro a membro tutte le equazioni del sistema. La seconda si ottiene analogamente sommando le equazioni, avendo prima moltiplicato vettorialmente ciascuna di esse per il corrispondente vettore posizione \mathbf{x}_k .

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$$

dove sono state introdotte le due quantità

$$\mathbf{R} = \sum_k \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{M} = \sum_k \mathbf{M}_k \equiv \sum_k \mathbf{x}_k \times \mathbf{F}_k,$$

che si dicono rispettivamente **risultante delle forze** e **momento risultante delle forze**.

Di grandissima importanza è la ulteriore specificazione di queste relazioni che si ottiene facendo una ulteriore ipotesi sulle forze, cioè che **le forze interne siano a due corpi, soddisfino il principio di azione e reazione (terza legge di Newton) e siano centrali**. Ricordiamo cosa si intende con ciò. Anzitutto si ammette che la forza \mathbf{F}_k agente su ogni punto k del sistema possa essere decomposta nella somma (vettoriale) di una forza dovuta agli altri punti del sistema (**forza interna**), e una forza dovuta ad agenti esterni al sistema (**forza esterna**):

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{(int)} + \mathbf{F}_k^{(ext)}.$$

Poi si ammette che a sua volta la forza interna agente sul k -esimo punto possa essere decomposta nella somma di forze dovute singolarmente a ciascuno degli altri punti del sistema (**ipotesi delle forze a due corpi**):

$$\mathbf{F}_k^{(int)} = \sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{kj}.$$

Il principio di azione e reazione (**terza legge di Newton**) prende allora la forma

$$\mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_{jk},$$

mentre l'ipotesi delle forze centrali (e a simmetria sferica) si scrive nella forma

$$\mathbf{F}_{kj} = f_{kj}(r_{kj}) \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j}{r_{kj}}, \quad f_{kj} = f_{jk}, \quad (1.2.22)$$

dove

$$r_{kj} = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|$$

è la distanza tra i due punti k, j . Forze interne di tale tipo (ovvero, forze a due corpi, soddisfacenti il principio di azione e reazione, centrali a simmetria sferica) talvolta vengono dette **forze di tipo classico**.

Sulle forze di tipo non classico. L'unica forza fondamentale di tipo non classico è quella magnetica di Lorentz (addirittura dipendente dalla velocità della particella su cui essa agisce). La forza gravitazionale di Newton è centrale a simmetria sferica, e dunque di tipo classico. Si ha comunque la strana situazione che secondo la relatività generale tale forza non dovrebbe essere centrale, perché anche la gravità dovrebbe propagarsi con la velocità c della luce, e dunque la forza di gravità

dovrebbe essere valutata “al tempo ritardato”, nel senso familiare dell’elettromagnetismo⁴⁵. In altri termini, la forza esercitata da un “corpo sorgente” dovrebbe essere diretta verso il punto in cui “vediamo” il corpo, ovvero il punto in cui il corpo si trovava quando ha inviato la forza, e non nel punto in cui esso si trova nell’istante in cui riceviamo la forza. Ora, a causa del presentarsi di opportune compensazioni, come per primo osservato da Poincaré,⁴⁶ entro una approssimazione fortissima (almeno per quanto riguarda la meccanica celeste), si trova che “tutto va come se” la forza agisse istantaneamente, e quindi fosse centrale. È un fatto piuttosto curioso che una parte considerevole degli studiosi di meccanica celeste non siano coscienti di trovarsi nella situazione fortunata in cui, proprio in virtù di tale compensazione, essi possono comportarsi “come se ...” . Vi è poi un altro ambito interessante in cui è noto che la fenomenologia richiede di introdurre forze non classiche. Si tratta dei modelli microscopici delle forze di coesione nei cristalli, in cui ci si rende facilmente conto che sarebbe necessario considerare forze a due corpi non centrali o addirittura forze “a più corpi”. Si veda M. Born, *Problems of atomic dynamics*, Dover (New York, 2004), Parte II, Lecture 2, pag. 139. Forze a più corpi vengono considerate anche nell’ambito della fisica nucleare.

È allora un semplice esercizio dimostrare il seguente

Teorema (equazioni cardinali della dinamica). *Lungo le soluzioni del sistema di equazioni di Newton per un sistema di N punti materiali con forze di tipo classico nel senso sopra indicato si hanno le relazioni (rispettivamente, prima e seconda equazione cardinale)*

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}^{(ext)} , \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}^{(ext)} \quad (1.2.23)$$

dove $\mathbf{R}^{(ext)} = \sum_k \mathbf{F}_k^{(ext)}$ e $\mathbf{M}^{(ext)} = \sum_k \mathbf{M}_k^{(ext)}$ sono **il risultante e il momento risultante delle forze esterne**. La prima equazione cardinale si scrive equivalentemente nella forma (per molto aspetti più significativa)⁴⁷

$$m\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{R}^{(ext)} . \quad (1.2.24)$$

Qui $m = \sum_k m_k$ è la **massa totale del sistema** e \mathbf{a}_{CM} l’**accelerazione del baricentro (o centro di massa)** del sistema, $\mathbf{a}_{CM} = \ddot{\mathbf{x}}_{CM}$, dove \mathbf{x}_{CM} è la ben nota posizione del baricentro, definita come media ponderata della posizione dei punti del sistema:

$$m\mathbf{x}_{CM} = \sum_k m_k \mathbf{x}_k \quad (m = \sum_k m_k) .$$

⁴⁵Si veda A. Einstein, *The meaning of relativity*, Princeton University Press (Princeton, 1922).

⁴⁶H. Poincaré, *Sur la théorie de l’électron*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 21, 129–176 (1906), *Oeuvres*, IX, 494–550.

⁴⁷La nuova relazione si legge infatti nel modo seguente: Il baricentro di un sistema si muove come se fosse un punto in cui è concentrata tutta la massa del sistema, e che fosse soggetto ad una forza che è la somma vettoriale di tutte le forze *esterne* agenti sui singoli punti del sistema. Questa lettura non è però in generale del tutto appropriata. Si veda più avanti.

Corollario (Condizioni necessarie per l'equilibrio di un sistema). *Se un sistema si trova equilibrio (e dunque $\mathbf{a}_{CM} = 0$, $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$), necessariamente sono nulli il risultante e il momento risultante delle forze esterne*

$$\mathbf{R}^{(ext)} = 0, \quad \mathbf{M}^{(ext)} = 0$$

Esercizio (Eureka: dimostrazione della legge di Archimede). Tutti conosciamo la legge di Archimede (267–212 AC): *Un corpo immerso in un fluido subisce una spinta (una forza) verso l'alto uguale (in modulo) al peso del liquido spostato.* In molti libri di scuola secondaria, questa legge viene dedotta da una legge più generale chiamata legge di Stevino. In tal modo si perde il concetto che la legge di Archimede possa essere compresa senza fare alcun calcolo, come conseguenza immediata di una idea centrale, che si concepisce in un momento di illuminazione.⁴⁸ È questo forse quello che deve essere accaduto ad Archimede stesso, se deve avere senso la leggenda secondo la quale, avendo concepito in un attimo la sua legge, egli balzò fuori dalla vasca da bagno esclamando *Eureka* (ho trovato).

Possiamo immaginare che l'idea fosse la seguente.⁴⁹ Anche se non aveva a disposizione la dinamica (opera del suo "allievo" Galileo e di Newton), Archimede forse sapeva che per aversi equilibrio il risultante delle forze esterne deve essere nullo. Consideriamo ora, all'interno di un fluido (l'acqua della vasca da bagno di Archimede), una regione Ω del fluido come nostro sistema. Questo sistema (porzione di fluido entro la regione Ω) è costituito da un certo numero N di punti del fluido (le molecole, diremmo oggi, o l'analogo di Epicuro) e subisce l'azione dei punti esterni dell'acqua, percepita come pressione sul bordo di Ω . Inoltre si ha la forza peso (oggi diremmo, dovuta all'attrazione della Terra). Abbiamo quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^{(ext)} = \text{peso del fluido contenuto nella regione } \Omega \\ \quad + \text{risultante delle forze di pressione superficiali,} \end{array} \right. \quad (1.2.25)$$

e il problema consiste nel fatto che sembra difficile valutare il risultante delle forze superficiali di pressione. Ma se si è capito che per aversi equilibrio deve essere nullo il risultante delle forze esterne, allora questo è equivalente (è questa l'intuizione, che si capisce *in un momento*) ad affermare che il risultante delle forze di pressione bilancia l'altra forza esterna, che è il peso del liquido *contenuto* nella regione considerata Ω . Quindi sappiamo quanto vale il risultante delle forze di pressione esercitate dal fluido esterno alla regione Ω : è uguale (in modulo) al peso del fluido contenuto nella regione Ω considerata. Resta poi un ultimo punto: cosa succede se la regione Ω è occupata da un corpo (quello di Archimede) "che sposta il fluido", invece che dal fluido. Si osserva che le forze di pressione che la parte di fluido che si trova

⁴⁸Anche Heisenberg riferisce che ebbe una illuminazione (*Erleuchtung*) quando, nella isoletta in cui si era riparato a causa della febbre da fieno, ebbe l'intuizione della legge di moltiplicazione che lo condusse alla sua formulazione della meccanica quantistica.

⁴⁹Nel suo celebre libro sulla meccanica (si veda I, VI, 4), Mach attribuisce a Stevino (1548–1620) l'argomento riportato sotto. L'argomento originale di Archimede non ci è del tutto noto, perché il suo trattato sui corpi fluttuanti ci è pervenuto solo parzialmente. Una versione del ragionamento originale di Archimede fu data da Commandino, ed è riportata nel libro di Mach.

all'esterno di una superficie esercita su ogni porzione di quella superficie (e quindi anche il risultante delle forze di pressione su tutta la superficie), dipende solo da come è fatta la superficie, e non da che cosa vi è contenuto (dell'altro fluido, oppure il corpo di Archimede). È così dimostrato il principio di Archimede.

Osservazione (L'equazione del moto del baricentro in generale non è "chiusa"). La relazione (1.2.24) per il moto del baricentro viene di solito enunciata dicendo che *il baricentro si muove come se fosse un punto in cui fosse concentrata tutta la massa del sistema, e soggetto ad una forza uguale al risultante delle forze esterne*. Questo è sostanzialmente vero, ma non completamente. Il punto delicato sta nel fatto che in generale il risultante delle forze eaterne è funzione delle posizioni di tutti i singoli punti del sistema,

$$\mathbf{R}^{(ext)} = \mathbf{R}^{(ext)}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) ,$$

e quindi la relazione (1.2.24) non è in generale una equazione "chiusa" nella variabile \mathbf{x}_{CM} . In altri termini, non si può determinare $\mathbf{x}_{CM} = \mathbf{x}_{CM}(t)$ se prima non si determina il movimento di tutti i punti, risolvendo il sistema completo delle equazioni di Newton. Tuttavia l'equazione per il baricentro risulta essere una equazione "chiusa" in alcuni casi speciali, particolarmente significativi, tipicamente quello in cui il risultante delle forze esterne dipende solo dalla posizione del centro di massa o addirittura sia costante (come avviene per il moto dei gravi).

Veniamo infine al problema dell'energia. Si ha il

Teorema (Potenziale delle forze interne). *Per forze interne di tipo classico (definite da (1.2.22)), il lavoro elementare delle forze interne è un differenziale esatto, e si ha*

$$\sum_k \mathbf{F}_k^{(int)} \cdot d\mathbf{x}_k = -dV^{(int)} ,$$

dove

$$V^{(int)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \neq j \\ 1 \leq k, j \leq N}} V_{kj}(r_{kj}) ,$$

essendo V_{kj} una primitiva, cambiata di segno, di f_{kj} , ossia tale che $f_{kj} = -\frac{dV_{kj}}{dr_{kj}}$.⁵⁰

Dimostrazione. Poiché per ipotesi si considerano forze a due corpi, si potrà suddividere la somma che dà il lavoro elementare nella somma dei contributi di ogni coppia, e dunque basta considerare il caso di una sola coppia (problema a due corpi). Si deve allora considerare il vettore

$$\mathbf{r}_{kj} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j$$

⁵⁰Si noti che si deve sommare su tutte le coppie, e quindi una coppia k, j con $k \neq j$, ad esempio la coppia 12, va contata una sola volta. Ma si può anche lasciare scorrere i due indici liberamente (purché diversi tra di loro), sicché una coppia viene contata due volte, e a questo fatto è dovuto il fattore 1/2.

e si osserva che vale (essendo $\mathbf{F}_{jk} = -\mathbf{F}_{kj}$)

$$\mathbf{F}_{kj} \cdot d\mathbf{x}_k + \mathbf{F}_{jk} \cdot d\mathbf{x}_j = \mathbf{F}_{kj} \cdot d(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) = \mathbf{F}_{kj} \cdot d\mathbf{r}_{kj} .$$

Quindi ci si è ridotti formalmente al problema ad un solo corpo soggetto a forza centrale a simmetria sferica, che ben conosciamo.

Esempi.

- Due punti su una retta con forze mutue dovute a una molla lineare (di lunghezza propria nulla). Se x_1, x_2 sono le ascisse che danno le posizioni dei due punti, e K è la costante della molla, abbiamo allora

$$F_{12} = -K(x_1 - x_2) , \quad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$$

- $N + 2$ punti su una retta, con i punti estremi fissi a una distanza data L , con forze tra punti adiacenti (forze “a primi vicini”, ingl. *nearest neighbor forces*) dovute a molle lineari. Sia $k = 0, 1, \dots, N + 1$ l'indice dei punti. È chiaro che esiste una configurazione di equilibrio, in cui tutti i punti adiacenti sono ugualmente distanziati. Denotiamo lo spostamento dalla posizione di equilibrio del punto k -esimo con x_k (essendo $x_0 = x_{N+1} = 0$). Allora l'energia E è data da

$$E = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}m\dot{x}_k^2 + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2}K(x_k - x_{k-1})^2 .$$

- Sistema planetario con N pianeti nell'approssimazione in cui il Sole sia fisso (nell'origine delle coordinate). Se G è la costante di gravitazione universale, si ha

$$V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = -\frac{1}{2} \sum_{k,j}^{k \neq j} G \frac{m_k m_j}{r_{kj}} - \sum_k G \frac{m_k m_S}{r_k} ,$$

dove m_S è la massa del Sole, m_k quella del k -esimo pianeta ed $r_k \equiv \|\mathbf{x}_k\|$ la sua distanza dal Sole.

- Atomo di Elio (ancora nell'approssimazione di nucleo fisso). Denotiamo con $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ i vettori posizione dei due elettroni, e con e la carica dell'elettrone. Si ha allora

$$V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{r_{12}} .$$

c) Problema a 2 corpi. Di particolare interesse è il problema a 2 corpi, in assenza di forze esterne, in cui il sistema delle equazioni di Newton è

$$m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) , \quad m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}) .$$

Già sappiamo allora che, essendo $\mathbf{R}^{(ext)} = 0$, il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme. Ma ci interessa poi conoscere il moto di ciascuno dei due corpi rispetto ad un sistema solidale col baricentro, e ancor più il moto di uno dei due corpi rispetto all'altro (si pensi al caso Sole–Pianeta, in cui si trascuri l'azione degli altri pianeti). Ci interessa dunque conoscere $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ dove $\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ può essere chiamato il vettore della posizione relativa del punto 1 rispetto al punto 2. In altri termini, introduciamo il cambiamento di variabili

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \rightarrow (\mathbf{x}_{CM}, \mathbf{r})$$

con

$$m\mathbf{x}_{CM} = m_1\mathbf{x}_1 + m_2\mathbf{x}_2, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad (m = m_1 + m_2).$$

Si ha allora il

Teorema (Problema dei due corpi). *Per un sistema di due corpi soggetto soltanto a forze interne, soddisfacenti il principio di azione e reazione, si ha*

$$\ddot{\mathbf{x}}_{CM} = 0, \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}),$$

dove μ è la **massa ridotta** definita da

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{ovvero} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

La dimostrazione è immediata. Come già sappiamo, l'equazione per il baricentro si ottiene dalle due equazioni di Newton sommandole membro a membro. Quella per il moto relativo si ottiene analogamente sottraendole membro a membro, avendole prima divise rispettivamente per m_1 e m_2 .

Nota (Sul significato della massa ridotta). L'equazione per il moto relativo del punto P_1 rispetto al punto P_2 ha l'aspetto della consueta equazione di Newton, solo con la differenza che vi appare la massa ridotta μ anziché la massa “vera” m_1 . D'altra parte si osservi che in tal caso (studio del moto relativo) il moto non è descritto rispetto ad un sistema inerziale, perché riferito al punto P_2 anziché al baricentro. Ci dovremmo allora attendere di dovere introdurre, come è ben noto, delle forze apparenti. In questo caso avviene invece che “tutto va come se” il sistema di riferimento fosse inerziale, pur di pagare il prezzo di sostituire la massa vera con la massa ridotta.

Nota per gli autori. Aggiungere la discussione dei sistemi di forze equivalenti, come significativi per i corpi rigidi e non in generale.

1.3 Passaggio alle equazioni di Lagrange: esempi significativi

Diamo finalmente inizio alla trattazione riguardante le equazioni di Lagrange.⁵¹ Prima di dare una dimostrazione di come queste seguano dalle equazioni di Newton, cominciamo a familiarizzarci con esse.

a) Punto su una retta

Partiamo dalla seguente osservazione, relativa al più semplice esempio possibile, ovvero il moto di un punto su una retta, soggetto ad un campo di forze $F = F(x)$, o equivalentemente ad un'energia potenziale $V = V(x)$ (la primitiva di F cambiata di segno, $F = -V' \equiv -\frac{dV}{dx}$)⁵². In tal caso l'equazione di Newton ha la forma

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}, \quad (1.3.1)$$

e abbiamo già sottolineato che essa può essere pensata come una equazione del primo ordine nello spazio degli stati (ovvero, la definizione di velocità $\dot{x} = v$ prende essa stesso il ruolo di una equazione, e le incognite sono la coppia di funzioni $x = x(t)$, $v = v(t)$)

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \frac{d}{dt}(mv) = -\frac{dV}{dx}. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

L'osservazione (di verifica immediata) è allora che essa si può scrivere anche nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial x}, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

dove si è introdotta la funzione (detta lagrangiana) L , data da

$$L(x, v) = T(v) - V(x) \equiv \frac{1}{2}mv^2 - V(x), \quad (1.3.4)$$

ovvero *differenza* di energia cinetica T (con $T = (1/2)mv^2$) ed energia potenziale V (mentre, come è noto, l'energia E è definita come la loro somma, $E = T + V$). Qui ovviamente la lagrangiana, come l'energia, deve essere

⁵¹NOTA PER GLI AUTORI: mettere in appendice il primo metodo di Lagrange.

⁵²Con l'apice denotiamo la derivata di una funzione rispetto al suo argomento. Nel caso in cui la variabile indipendente sia il tempo, in luogo dell'apice usiamo invece (come già indicato) il simbolo tradizionale di un punto sopra la variabile considerata.

pensata come funzione (a valori reali) definita sullo spazio degli stati, i cui punti sono coppie ordinate (x, v) di posizione e velocità.

La verifica è banalissima, e sostanzialmente consiste nell'osservare che il primo membro dell'equazione di Newton (*ma*) ha una significativa espressione in termini dell'energia cinetica $T = (1/2)mv^2$, e poi anche della lagrangiana L . Tutto parte dalla identità

$$p \equiv mv = \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{2}mv^2 \equiv \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v}$$

(nell'ultimo passaggio si usa $L = T - V$ con V dipendente solo da x – ovvero $\frac{\partial V}{\partial v} = 0$), da cui segue

$$ma \equiv \frac{d}{dt}(mv) \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} .$$

Si osserva poi che anche il secondo membro dell'equazione di Newton ($-\frac{dV}{dx}$) si esprime immediatamente anch'esso in termini della lagrangiana, perché il termine T non dipende dalla variabile v e si ha dunque

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\partial L}{\partial x} .$$

Ciò conclude la dimostrazione.

Veniamo ora a un cambiamento di notazione, che compiamo seguendo la tradizione. Se riteniamo ben chiarito che posizione e velocità sono variabili indipendenti, definenti punti di uno spazio che abbiamo chiamato *spazio degli stati* (come contrapposto all'ordinario spazio delle posizioni – o delle configurazioni), poiché avviene che per un assegnato movimento $x = x(t)$ la velocità $v = v(t)$ è la derivata della posizione, $v(t) = \dot{x}(t)$, come appare esplicitamente nella prima delle (1.3.3), allora tale relazione viene sottintesa, e si denota semplicemente la velocità con \dot{x} , anche quando essa viene pensata come seconda componente dei vettori nello spazio degli stati, e dunque del tutto indipendente dalla prima. Pertanto, con questo abuso di notazione i punti dello spazio degli stati sono individuati da coppie (x, \dot{x}) , le variabili dinamiche si denotano con $f(x, \dot{x})$; in particolare per la lagrangiana si ha

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) , \quad (1.3.5)$$

e l'equazione di Newton nella forma di Lagrange diviene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 . \quad (1.3.6)$$

b) Punto nello spazio in coordinate cartesiane

Veniamo ora al moto $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ di un punto nello spazio, soggetto a un campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, sicché l'equazione di Newton si scrive nella forma vettoriale

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1.3.7)$$

(consideriamo qui il caso di forze indipendenti dalla velocità:⁵³ la forza potrebbe comunque dipendere anche dal tempo, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, e le considerazioni seguenti sarebbero sostanzialmente inalterate). Si pone allora il problema geometrico-analitico di passare dalla forma vettoriale (1.3.7) al corrispondente sistema di tre equazioni che si ottengono quando si scelgano delle coordinate arbitrarie. Il problema è semplicissimo in coordinate cartesiane, perché in tal caso ogni vettore viene decomposto sulla medesima base, ovvero la familiare base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, che è indipendente dal tempo, sicché l'operazione di derivazione di un vettore si trasporta banalmente sulle componenti; si ha pertanto

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \quad \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}, \quad (1.3.8)$$

e conseguentemente, proiettando sui tre assi (cioè moltiplicando scalarmente successivamente per $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$), dall'equazione vettoriale di Newton (1.3.7) si ottiene il sistema delle tre equazioni

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_y(x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_z(x, y, z) \end{cases}, \quad (1.3.9)$$

dove le componenti della forza sono definite da $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$.

Limitiamoci al caso più significativo, ovvero al caso dei campi di forze conservative, in cui cioè esiste una funzione $V = V(\mathbf{x})$ (energia potenziale) tale che $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, ovvero

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1.3.10)$$

Il fatto rilevante è ora che anche per la quantità di moto (o momento lineare, ingl. *momentum*) $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$ si hanno formule analoghe alla (1.3.10), ovvero le tre componenti di \mathbf{p} si ottengono per derivazione di una unica funzione scalare, l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Infatti si ha

$$m\dot{x} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \quad m\dot{y} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}, \quad m\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}}, \quad (1.3.11)$$

che potremmo compendiare nella relazione

$$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}}.$$

⁵³Il caso importante delle forze di Lorentz sarà discusso altrove.

Dunque, osservando che l'equazione vettoriale di Newton (1.3.7) è equivalente a $\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}$, è immediatamente verificato che il corrispondente sistema di equazioni (1.3.9) può essere scritto in forma lagrangiana, naturale generalizzazione della (1.3.6). Precisamente, introdotta la lagrangiana

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) = \frac{1}{2}mv^2 - V(\mathbf{x}), \quad (1.3.12)$$

le equazioni di Newton (1.3.9), per forze conservative (1.3.10), si scrivono nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.3.13)$$

con $n = 3$, dove si è introdotta la notazione tradizionale $q = (q_1, q_2, q_3)$ per le “coordinate libere”, ovvero $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$, e quindi anche $\dot{q}_1 = \dot{x}, \dot{q}_2 = \dot{y}, \dot{q}_3 = \dot{z}$.

Esercizio (Problema a N corpi in coordinate cartesiane). Si consideri il sistema delle equazioni di Newton

$$m_k \mathbf{a}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N), \quad (k = 1, \dots, N)$$

per un sistema di N punti materiali, e si descriva la posizione di ogni punto mediante **coordinate cartesiane ortogonali**. Ammettendo che il sistema di forze derivi da potenziale, cioè che esista $V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ tale che si abbia

$$\mathbf{F}_1 = -\text{grad}_1 V, \dots, \mathbf{F}_N = -\text{grad}_N V$$

(dove $\text{grad}_1 V = \mathbf{i} \frac{\partial V}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial V}{\partial y_1} + \mathbf{k} \frac{\partial V}{\partial z_1}$ e così via), si mostri che il sistema delle equazioni di Newton si può scrivere nella forma di Lagrange (1.3.13), dove T è l'energia cinetica (totale) del sistema, definita additivamente sulle particelle, ovvero definita da

$$T = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \dots + \frac{1}{2}m_N v_N^2.$$

c) Il moto centrale⁵⁴

Restiamo nel caso di un solo punto materiale. Fin qui, l'aver scritto le equazioni di moto in forma lagrangiana appare come una curiosità o una inutile complicazione. Le cose cambiano se consideriamo ora il caso in cui si introducano delle coordinate che non siano cartesiane, ad esempio coordinate polari o cilindriche.

⁵⁴NOTA PER GLI AUTORI. Ricordare il ruolo di C. Huygens (1629–1695) che stabilisce la formula per l'accelerazione nel moto circolare uniforme, con l'idea della composizione dei moti di Galileo (orbita parabolica nel moto dei gravi). Inoltre, egli generalizza l'idea di Galileo di proiettare l'equazione di moto su direzioni opportune. In Galileo, nel problema del piano inclinato (seguendo l'idea della statica) si proietta su una direzione fissa. Huygens nel problema del pendolo proietta su una direzione variabile. In ogni caso, ci si riduce all'idea dei lavori virtuali (Galileo, d'Alembert).

Ricordiamo che la scelta delle coordinate opportune, dettata in generale dal fatto che il sistema in studio presenti certe simmetrie, è un passo essenziale per poter procedere alla soluzione di problemi concreti; in generale, se non si fa uso di una scelta adeguata del sistema di coordinate i moti appaiono complicatissimi e incomprensibili (si pensi per esempio al passaggio da Tolomeo a Copernico, consistente essenzialmente in una conveniente scelta del sistema di riferimento, ovvero delle coordinate).

Consideriamo dunque, come tipico esempio di problema con simmetria, quello del moto centrale a simmetria sferica, cioè quello in cui il campo di forze ha la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(r) \frac{\mathbf{x}}{r}, \quad r = \|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.3.14)$$

Assunto come origine del sistema di coordinate il centro del campo di forze, il campo è *centrale*, ovvero tale che in ogni punto \mathbf{x} la forza è diretta come \mathbf{x} stesso (e pertanto è proporzionale al versore (vettore di lunghezza unitaria) \mathbf{x}/r , mentre l'intensità $f(r)$ è funzione solo della distanza r dall'origine (ovvero si ha *simmetria sferica*). Come abbiamo già ricordato, in tal caso il campo ammette energia potenziale $V(r)$, cioè si ha $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, e l'energia potenziale V è nient'altro che la primitiva, cambiata di segno, dell'intensità f , ovvero si ha $f = -V'$. Sappiamo inoltre che, in virtù della conservazione del momento angolare \mathbf{L} , il moto si svolge nel piano (individuato dalla posizione iniziale \mathbf{x}_0 e dalla velocità iniziale \mathbf{v}_0) passante per l'origine e ortogonale al vettore \mathbf{L} .

Scegliamo dunque tale piano come piano dalle coordinate cartesiane x, y (sicché abbiamo $z(t) = 0$), e passiamo in tale piano alle coordinate polari piane r, φ , definite dalle note relazioni

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.3.15)$$

Più precisamente, la trasformazione di coordinate (1.3.15) è definita non in tutto il piano, ma nel piano privato dell'origine, ovvero bucato (ingl. *punctured plane*) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; ciò è dovuto al fatto⁵⁵ che l'angolo φ non è definito per $r = 0$.

La trattazione analitica del problema richiede ora che ogni vettore venga decomposto su una base che è naturalmente adattata alle coordinate polari, e che quindi non è assoluta, ma dipende dal punto \mathbf{x} stesso da cui il vettore è spiccato. Infatti, solo nel caso eccezionale delle coordinate cartesiane avviene

⁵⁵Dal punto di vista analitico, ciò corrisponde al fatto che il determinante Jacobiano della trasformazione, che si calcola immediatamente, risulta essere uguale ad r , sicché in $r = 0$ (dove il determinante Jacobiano si annulla) la trasformazione non è invertibile.

che la base è “la medesima in ogni punto”. Invece,⁵⁶ per ogni altro sistema di coordinate esiste in ogni punto \mathbf{x} una base naturale, in cui i vettori sono diretti lungo le “linee coordinate”, cioè le linee lungo le quali varia una sola delle coordinate; nel caso delle coordinate polari piane, si tratta dei raggi uscenti dall’origine e delle circonferenze aventi per centro l’origine. Nelle trattazioni elementari (ma non in quella lagrangiana, si veda più avanti) tali vettori base vengono anche presi normalizzati, cioè di lunghezza unitaria.

Nel caso delle coordinate polari piane tali vettori normalizzati (versori, ingl *unit vectors*) $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ sono evidentemente dati da⁵⁷

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi . \quad (1.3.16)$$

Si noti che durante un movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ si ha $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ e quindi “si muovono” anche i versori $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$, avendosi

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r , \quad (1.3.17)$$

come si vede pensando nella (1.3.16) $\varphi = \varphi(t)$ e derivando rispetto al tempo mediante il teorema della derivata di una funzione composta.⁵⁸ Si ottengono così le componenti radiali e trasverse di velocità e accelerazione:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi . \quad (1.3.18)$$

La prima infatti segue subito dalla ovvia relazione $\mathbf{x} = r \mathbf{e}_r$, sicché $\dot{\mathbf{x}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$, e analogamente la seconda si ottiene derivando la prima e usando le (1.3.17).

Il metodo analitico più semplice per ottenere le espressioni delle componenti radiale e trasversa della velocità e dell’accelerazione consiste nell’identificare il punto di coordinate cartesiane ortogonali (x, y) con il numero complesso

$$z = x + iy = r e^{i\varphi} .$$

Pensando tutte queste variabili come funzioni del tempo e derivando rispetto al tempo si ha $\dot{z} = \dot{r} e^{i\varphi} + i \dot{\varphi} r e^{i\varphi}$ ovvero (si ricordi $i = e^{i\pi/2}$)

$$\dot{z} = \dot{r} e^{i\varphi} + r \dot{\varphi} e^{i(\varphi+\pi/2)} .$$

⁵⁶Questo punto apparirà forse più chiaro in seguito, quando verranno ricordati i primi elementi di geometria differenziale delle superfici. Si capirà allora che i vettori base dipendono veramente dal punto, perché al variare del punto giacciono in piani (piani tangenti) diversi.

⁵⁷Infatti, nel punto di coordinate r, φ la linea coordinata r è inclinata dell’angolo φ sull’asse delle ascisse. Dunque il punto su tale linea con $r = 1$ ha componenti $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$ rispettivamente sugli assi x ed y . In tal modo viene determinata l’espressione analitica di \mathbf{e}_r . Per quanto riguarda \mathbf{e}_φ , questo è caratterizzato dall’essere ortogonale a \mathbf{e}_r e opportunamente orientato. Serve allora ricordare che, dato nel piano un vettore di coordinate cartesiane ortogonali (a, b) , esso è ortogonale a ogni vettore proporzionale al vettore $(-b, a)$ – basta a tal fine eseguire il prodotto scalare nel modo familiare.

⁵⁸Ad esempio, dalla definizione (1.3.16) di \mathbf{e}_r si ha

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\mathbf{i}(\sin \varphi) \dot{\varphi} + \mathbf{j}(\cos \varphi) \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(-\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi .$$

Il primo termine descrive un vettore spiccato dall'origine, avente lunghezza \dot{r} ed inclinato dell'angolo φ sull'asse delle x (dunque diretto come z); si tratta dunque del vettore $\dot{r}\mathbf{e}_r$. Analogamente il secondo termine corrisponde a un vettore di modulo $r\dot{\varphi}$ e inclinato di 90 gradi a sinistra rispetto al vettore radiale; si tratta dunque del vettore $r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$. Analogamente si procede per l'accelerazione, calcolando

$$\ddot{z} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e^{i\varphi} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})e^{(i\varphi+\pi/2)} .$$

In tal modo dall'equazione di Newton $m\ddot{\mathbf{x}} = f(r)\mathbf{e}_r$, proiettando sui due assi mobili adattati alle coordinate polari piane, si ottiene il sistema delle due equazioni

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r) \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0 . \end{cases} \quad (1.3.19)$$

Vediamo ora come si procede in questo caso con il metodo lagrangiano. Nel procedimento lagrangiano, tutto il problema analitico è ridotto a scrivere una sola funzione, la lagrangiana $L = T - V$, e questo è un calcolo che coinvolge solo le derivate prime (la velocità) e non anche le derivate seconde (l'accelerazione). Una volta scritta la lagrangiana, le equazioni di moto si ottengono poi con banali calcoli di derivate. Anzi, poiché la scrittura dell'energia potenziale V è banale (è assegnata $V = V(\mathbf{x})$, e quindi basta esprimere il vettore \mathbf{x} in funzione delle variabili scelte), il problema analitico è ridotto soltanto alla scrittura dell'energia cinetica T . Nel nostro caso delle coordinate polari piane, il calcolo si riduce alla verifica dell'identità

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 , \quad (1.3.20)$$

e questa può compiersi in due modi: con il metodo "forza bruta" o con il metodo astuto.

Il primo metodo consiste nel derivare rispetto al tempo il cambiamento di variabili (1.3.15) (pensando $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, usando la regola di Leibniz per la derivata del prodotto e la regola per la derivata di una funzione composta (*chain rule*), poi quadrando e sommando. Si ha così

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi , \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi ,$$

e dunque $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Il secondo metodo, per quanto ancora banale, è molto profondo e verrà ripetutamente usato in seguito. Si osserva che con la prima delle (1.3.18) la velocità è stata decomposta in due componenti \dot{r} , $r\dot{\varphi}$ su due versori ortogonali, e dunque per il teorema di Pitagora si ha $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Formalmente, ciò segue ricordando $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi$, e calcolando $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$; basta allora utilizzare la linearità del prodotto scalare e la *ortonormalità* dei due vettori base, ovvero $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = 1$, $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0$.

Il procedimento lagrangiano è ora banalissimo. Infatti si dimostra (come vedremo in un prossimo paragrafo) che in ogni sistema di coordinate il sistema delle equazioni di Newton ha sempre la stessa forma (1.3.13) di

Lagrange, sicché le equazioni si ottengono con semplici operazioni di derivazione. Nel caso qui considerato del moto centrale a simmetria sferica, si ha poi che una delle equazioni è particolarmente illuminante, perché avviene che la lagrangiana non dipende esplicitamente da una delle coordinate, ovvero φ . Si ha infatti

$$L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r), \quad (1.3.21)$$

sicché si ha subito $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$. D'altra parte si calcola immediatamente $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - V'(r)$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$, e dunque le due equazioni $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2$) divengono

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - V'(r) \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases} \quad (1.3.22)$$

Di queste, la prima equazione coincide evidentemente con la prima delle (1.3.19) ottenute con il procedimento elementare. L'equivalenza si ha anche per le seconde due, perché eseguendo nella seconda delle (1.3.22) la derivata rispetto al tempo con la formula di derivata di una funzione composta o *chain rule* (si ricordi che dipendono dal tempo sia r sia φ) si ottiene $m(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi}) = 0$, ovvero $mr(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$, ovvero si ha che è nulla l'accelerazione trasversale $a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$. Dunque anche le seconde equazioni dei due procedimenti coincidono. Ma la forma fornita dal procedimento lagrangiano è la più conveniente, perché essa ci dà direttamente una informazione in più; in effetti essa ci dice che esiste una quantità ("variabile dinamica", secondo un termine consueto) il cui valore, fissato dai dati iniziali, non cambia durante il moto, ovvero, come si dice, esiste una *costante del moto*. Nel nostro caso, la costante del moto è la quantità $mr^2\dot{\varphi}$, che ha il significato⁵⁹ di intensità (che denotiamo con il simbolo tradizionale l anziché L) del momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$.

Le due equazioni di Lagrange sono dunque

$$\begin{cases} m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - V'(r) \\ mr^2\dot{\varphi} = l_0, \end{cases} \quad (1.3.23)$$

dove con l_0 abbiamo denotato il valore di l determinato dai dati iniziali.

A questo punto sarebbe terminato il compito che ci eravamo proposti, ovvero di mostrare come le equazioni di moto in coordinate polari piane

⁵⁹Basta ricordare la relazione $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$, e la decomposizione(1.3.18) della velocità \mathbf{v} , oltre a $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = 0$, $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{k}$ (versore lungo l'asse z). In termini più classici, si ha qui la seconda legge di Keplero, ovvero la costanza della *velocità areolare* $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$, la quale è evidentemente proporzionale (attraverso il fattore $2m$) all'intensità del momento angolare \mathbf{L} .

vengono scritte in modo molto più semplice se si usa il metodo lagrangiano invece di quello elementare. Tuttavia, indugiamo ancora ad illustrare come si studiano le equazioni di moto, indipendentemente dal metodo usato per scriverle.

Possiamo procedere come nel caso dei sistemi di equazioni algebriche, e sostituire una equazione nell'altra in modo da "eliminare una delle variabili". Nel nostro caso, dalla seconda equazione si ottiene $\dot{\varphi} = \frac{l_0}{mr^2}$, che sostituita nella prima fornisce una equazione nella sola variabile r , ovvero $m\ddot{r} = \frac{l_0^2}{mr^3} - V'(r)$. E' utile poi osservare che si ha $\frac{l_0^2}{mr^3} = -\frac{d}{dr} \frac{l_0^2}{2mr^2}$ cosicché il sistema assume la forma

$$\begin{cases} m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} V_{l_0}^*(r), & V_{l_0}^*(r) = V(r) + \frac{l_0^2}{2mr^2} \\ \dot{\varphi} = \frac{l_0}{mr^2} . \end{cases} \quad (1.3.24)$$

Dunque l'equazione "chiusa" (in cui cioè compare una sola variabile) nella variabile r è quella che si avrebbe per un punto vincolato a muoversi su di una semiretta (coordinata $r > 0$), quando fosse soggetto, oltre che alla forza "vera" $f(r)$, con energia potenziale "vera" $V(r)$, anche ad una forza fittizia o "apparente" corrispondente ad una energia potenziale $l_0^2/(2mr^2)$ (detta energia potenziale centrifuga – si veda sotto), la quale dipende parametricamente dai dati iniziali attraverso il valore del momento angolare iniziale l_0 .

Intermezzo: il "potenziale centrifugo". La ragione del nome "potenziale centrifugo" si capisce subito. Infatti l'equazione chiusa nella variabile r , cioè la prima delle (1.3.24), è proprio quella che i principi della meccanica ci forniscono per un osservatore noninerziale (con coordinate cartesiane X, Y) che sia fisso nell'origine e il cui asse X ruoti in maniera tale da essere sempre "puntato" verso il punto di cui si studia il moto, sicché si ha $Y(t) = 0$. Si ha allora a che fare con un sistema che ruota di moto in generale non uniforme, il cui moto angolare è anch'esso una incognita del problema. Si hanno pertanto le ben note forze apparenti, di cui l'unica diretta come l'asse X è la forza centrifuga, di intensità $mr\dot{\varphi}^2$, dove $r = \|X\|$. La conservazione del momento angolare (seconda equazione di Lagrange) fornisce allora $\dot{\varphi}$ in funzione di r (dipendente parametricamente da l_0) – seconda delle (1.3.24) – e si ha quindi per la forza centrifuga l'espressione $l_0^2/(mr^3)$.

Consideriamo ora l'equazione "chiusa" nella sola variabile r , cioè quella relativa al moto fittizio monodimensionale per un punto soggetto a energia potenziale efficace $V_{l_0}^*(r)$. È allora ovvio che per tale moto monodimensionale è una costante del moto la corrispondente energia efficace

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{l_0}^*(r) . \quad (1.3.25)$$

È interessante osservare che la stessa conclusione si ottiene dalla conservazione dell'energia E dell'originale problema bidimensionale

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) . \quad (1.3.26)$$

Infatti quest'ultima assume la forma (1.3.25) quando vi si sostituisce $\dot{\varphi} = l_0/(mr^2)$ dalla seconda equazione di Lagrange (conservazione del momento angolare).

In conclusione, la prima equazione di Lagrange (del secondo ordine) può essere convenientemente sostituita dall'equazione che esprime il teorema di conservazione dell'energia, in cui venga sostituita la equazione di conservazione del momento angolare, e ci si riduce pertanto ad un sistema di due equazioni del primo ordine, dipendenti dai due parametri E_0, l_0

$$\begin{cases} (1/2)mr^2 + V_{l_0}^*(r) = E_0 \\ mr^2\dot{\varphi} = l_0 \end{cases} \quad (1.3.27)$$

Di queste, la prima appare come una equazione per un punto che si muove su una semiretta (con coordinata $r > 0$), soggetta al **potenziale efficace** (*ingl. effective potential*)

$$V_{l_0}^*(r) = V(r) + l_0^2/(2mr^2) .$$

Nota storico-critica: sui parametri nascosti. La circostanza che, attraverso leggi di conservazione, ci si riconduca a sistemi formalmente con un numero inferiore di “gradi di libertà” (ovvero di coordinate indipendenti) e che nel sistema “ridotto” appaiano dei termini di energia potenziale dovuti a termini di energia cinetica del sistema originario, è un fatto del tutto generale, e di notevole interesse concettuale. Risale infatti al grande Helmholtz (1850 circa) l'idea che l'energia potenziale dei sistemi che si osservano possa essere dovuta all'energia cinetica di variabili che non vengono osservate e che pertanto vengono dette variabili nascoste o parametri nascosti (ted. *verborgen*)⁶⁰. Questa idea dei parametri nascosti (*ingl. hidden parameters*) è stata molto discussa in relazione ai fondamenti della meccanica quantistica. Indipendentemente da queste osservazioni storico - concettuali, vedremo più sotto su un esempio concreto (e più in generale in un prossimo capitolo) come il procedimento lagrangiano permetta di ottenere a colpo, in maniera automatica, le forze apparenti nei sistemi noninerziali. Anche in tal caso avverrà che l'energia potenziale di certe forze (quelle apparenti) potrà essere ricondotta a termini di energia cinetica (nel sistema inerziale).

Dovrebbe dunque essere chiaro in che cosa consista il procedimento lagrangiano. Esso fornisce in maniera “automatica” le equazioni di moto nelle coordinate scelte, con il semplice procedimento di calcolare opportune derivate di una funzione, la langrangiana L , definita nello spazio degli stati; vedremo che questo procedimento corrisponde a proiettare l'equazione di Newton lungo le “linee coordinate”. Questo “procedimento automatico” di proiezione presenta anche un ulteriore grandissimo vantaggio quando si abbia a che fare con sistemi vincolati, almeno nel caso di vincoli “ideali” o perfetti. Illustriamo ora questo aspetto.

⁶⁰Si veda anche Landau Lifshitz, Meccanica, paragrafo 30.

d) Punto vincolato

Consideriamo il caso tipico di un punto vincolato a muoversi su una linea liscia o una superficie liscia. Con il termine “liscia” si intende che la “realizzazione fisica” del vincolo, ovvero il meccanismo che obbliga il punto a muoversi sulla linea o sulla superficie, è predisposto in maniera tale che il punto non possa abbandonare la linea o la superficie, mentre non venga opposto alcun impedimento al suo scorrimento lungo la linea o la superficie. Questa circostanza viene descritta assumendo che il vincolo eserciti sul punto una forza, detta **reazione vincolare** e da noi denotata con $\mathbf{F}^{(v)}$, che viene supposta *normale* alla linea o alla superficie. Si noti tuttavia che questa prescrizione non è sufficiente a determinare la reazione vincolare; infatti nel caso della superficie ne viene fissata la direzione ma non l'intensità; nel caso della curva non ne è nota neppure la direzione (si sa solo che la reazione vincolare giace nel piano normale alla linea tangente). Dunque la reazione vincolare rappresenta una *incognita* del problema, che occorre saper calcolare (ciò è ben noto agli ingegneri, che devono progettare le strutture in modo che possano sopportare le sollecitazioni fino ad un limite di tolleranza prefissato). Tuttavia il numero totale di incognite non cambia, e sia nel caso di un punto su una linea sia nel caso di un punto su una superficie è sempre uguale a tre, come per un punto libero (non vincolato). Infatti se il punto è libero le incognite sono le tre coordinate $x(t), y(t), z(t)$ in funzione del tempo. Se il punto è vincolato a una superficie, allora diminuisce di uno il numero di coordinate necessarie per fissare la sua posizione sulla superficie (ad esempio se il punto si trova su una superficie $z = f(x, y)$, allora solo le coordinate x, y sono “libere”), ma si aggiunge come incognita l'intensità $F^{(v)}$ della reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$, di cui è nota la direzione. Infine, se il punto giace su una linea, allora si ha una sola coordinata “libera” per fissare la posizione, ma restano altre due incognite per fissare il vettore $\mathbf{F}^{(v)}$, di cui si sa solo che giace nel piano normale alla linea (nel punto considerato).

Illustriamo ora su due semplicissimi esempi due circostanze:

- l'esistenza della reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ segue dall'aver postulato la validità dell'equazione di Newton,
- il vettore $\mathbf{F}^{(v)}$ non è noto a priori, ma è determinato dal movimento, cioè dai dati iniziali.

Il primo esempio è quello di una persona sostenuta da un pavimento. Già sappiamo che la persona (assimiliamola ad un punto) è soggetta alla forza peso $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$, e d'altra parte osserviamo che essa è ferma, e pertanto ha accelerazione nulla, $\mathbf{a} = 0$. Ora, abbiamo postulato che valga l'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{R}$, dove \mathbf{R} è il risultante (la somma vettoriale) di tutte le forze che agiscono sul punto. Ma poiché osservo che vale $\mathbf{a} = 0$, dall'equazione di Newton segue $\mathbf{R} = 0$. Dunque non può essere $\mathbf{R} = -mg\mathbf{k}$; in altri termini, oltre alla forza “attiva” $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$, deve esistere un'altra forza, $\mathbf{F}^{(v)}$, detta reazione vincolare, tale che (in questo caso con $\mathbf{a} = 0$) sia $\mathbf{F}^{(v)} = -\mathbf{F}$.

Il secondo esempio è quello di un punto vincolato ad una circonferenza liscia di raggio r in un piano orizzontale (sicché possiamo trascurare la forza peso, bilanciata da una reazione vincolare verticale). Dunque (esattamente come avviene per il moto dei pianeti attorno al Sole nel caso semplificato di moti su cerchi anziché su ellissi), osserviamo che il moto è circolare ed uniforme, il che comporta che in ogni istante il punto presenta una accelerazione verso il centro, di modulo $\omega^2 r$, dove ω è il valore costante di $\dot{\varphi}$. Se dunque postuliamo la validità dell'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{R}$, ne deduciamo che in ogni istante agisce sul punto una forza diretta verso il centro, la cui intensità $m\omega^2 r$ dipende dalla velocità iniziale v_0 attraverso ω (perché si ha $v_0 = \omega r$).

In tal modo speriamo di avere chiarito come per un punto vincolato a una superficie o a una linea liscia si postuli che valga l'equazione

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{(v)}, \quad (1.3.28)$$

dove \mathbf{F} è una assegnata “forza attiva”, mentre $\mathbf{F}^{(v)}$ è un'altra forza, detta “reazione vincolare”, che è incognita, di cui è noto soltanto che è normale alla superficie o alla linea stessa. Il problema consiste allora nel determinare il movimento $\mathbf{x}(t)$ mediante una equazione “pura”, in cui cioè sia stata eliminata la reazione vincolare. Tale equazione si ottiene semplicemente proiettando l'equazione di Newton (1.3.28) sul piano tangente alla superficie o sulla retta tangente alla linea, perché in tal modo la reazione vincolare dà contributo nullo. Questa equazione “pura” viene poi in linea di principio risolta determinando così il movimento $\mathbf{x}(t)$ e conseguentemente anche l'accelerazione $\mathbf{a}(t)$. In tal modo, essendo note ad ogni tempo sia l'accelerazione \mathbf{a} sia la forza attiva \mathbf{F} (perché questa è funzione nota di \mathbf{x} , che è conosciuto), se lo si desidera si può banalmente calcolare la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ mediante la relazione

$$\mathbf{F}^{(v)} = m\mathbf{a} - \mathbf{F}. \quad (1.3.29)$$

Quando ci si riferisce a questo procedimento, si dice di consueto che si sta utilizzando il *principio di D'Alembert*⁶¹.

In questo ambito il procedimento di Lagrange aggiunge soltanto una semplicissima prescrizione per ottenere le equazioni pure: basta scrivere la lagrangiana in termini delle “coordinate libere” ed eseguire le derivate secondo le (1.3.13), con l'indice $i = 1, 2, \dots, n$, dove n è il “numero dei gradi di libertà”, $n = 1$ per punto su linea, $n = 2$ per punto su superficie, $n = 3$ per punto libero.

Riportiamo dei semplicissimi esempi di sistemi vincolati.

d1) Punto su circonferenza nel piano orizzontale

⁶¹Si tratta in effetti di un principio che storicamente ha svolto un ruolo molto importante, al quale intendiamo dedicare la dovuta attenzione in un'altra parte di queste note

Si parte dalla lagrangiana nel piano, in coordinate polari, date dalla (1.3.21), ponendo $V = 0$. Il vincolo si esprime con la condizione $r = R$ (raggio della circonferenza), sicché $\dot{r} = 0$. Dunque l'unica coordinata libera è l'angolo φ e la lagrangiana è

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 . \quad (1.3.30)$$

Pertanto, essendo $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}$, l'equazione di Lagrange è $\ddot{\varphi} = 0$ ovvero $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = \text{cost}$, con soluzione $\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0$.

Allo stesso risultato si perviene anche utilizzando il teorema di conservazione dell'energia (che, come vedremo, è conseguenza delle equazioni di Lagrange). In questo caso, essendo $V = 0$, si ha $E(\varphi, \dot{\varphi}) = L(\varphi, \dot{\varphi}) = T(\varphi, \dot{\varphi})$, e dunque dal teorema dell'energia si ottiene

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 = E_0 , \quad (1.3.31)$$

dove E_0 è il valore dell'energia, determinato dai dati iniziali; dunque $\dot{\varphi} = \text{cost}$.

d2) Pendolo semplice (punto su una circonferenza in un piano verticale.)⁶²

L'energia cinetica è la stessa del caso precedente. L'energia potenziale è data da mgz dove z è l'altezza (direzione positiva verso l'alto). Se contiamo l'angolo φ in senso antiorario a partire dalla verticale discendente, si ha $z = -mgR \cos \varphi$, e quindi

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + mgR \cos \varphi . \quad (1.3.32)$$

Si osserva ora che, in generale, se $L^* = \alpha L + \beta$ con due costanti α, β , allora le due lagrangiane L ed L^* producono le stesse equazioni di moto (perché nel calcolare le derivate il termine additivo β scompare, mentre il fattore moltiplicativo α si fattorizza). Quindi è comodo passare alla nuova lagrangiana che si ottiene dalla precedente dividendo per mR^2 , e che denotiamo ancora con L :

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \cos \varphi \quad (\omega^2 = g/R) . \quad (1.3.33)$$

L'equazione di Lagrange diviene allora

⁶²Talvolta questo esempio viene chiamato *pendolo matematico*. Il motivo è che in un pendolo "fisico" realizzato da un punto appeso ad un estremo di una catenella, fissata all'altro estremo, ogni punto della catena oscillerebbe con un periodo proprio, funzione crescente della distanza dal punto di sospensione. Se si tiene conto di questa situazione, la discussione diventa alquanto complicata ed interessante. A questo fatto venne data molta attenzione da Galileo.

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi \quad (1.3.34)$$

(che si riduce all'equazione dell'oscillatore armonico $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$ per piccole oscillazioni, $\sin \varphi \sim \varphi$). L'energia $T + V$ (divisa per mR^2 , che chiamiamo ancora con E) è invece data da

$$E = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi, \quad (1.3.35)$$

e per il teorema di conservazione dell'energia (che mostreremo essere conseguenza dell'equazione di Lagrange) l'equazione del secondo ordine (1.3.34) può essere sostituita dall'equazione del primo ordine (dipendente dal parametro E_0)

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi = E_0. \quad (1.3.36)$$

d3) Punto pesante su cono simmetrico rispetto all'asse verticale

È questo il nostro primo esempio di punto su superficie, qui la superficie

$$z = \alpha \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\alpha = \text{cost}). \quad (1.3.37)$$

Data la simmetria cilindrica del problema (ovvero simmetria per rotazioni intorno ad un asse, qui l'asse z) conviene passare a coordinate cilindriche: si tratta delle coordinate cartesiane, in cui le coordinate "orizzontali" x, y vengono sostituite dalle corrispondenti coordinate polari piane r, φ . Dunque, in virtù della nota formula (1.3.20) per l'energia cinetica in coordinate polari piane, l'energia cinetica $T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ assume in coordinate cilindriche la forma

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \quad (1.3.38)$$

D'altra parte il vincolo (1.3.37) assume una forma semplicissima in coordinate cilindriche (è proprio questo il motivo della loro scelta), ovvero

$$z = \alpha r, \quad (1.3.39)$$

che a sua volta comporta

$$\dot{z} = \alpha \dot{r}. \quad (1.3.40)$$

Ricordando che l'energia potenziale della forza peso è data da $V(z) = mgz$, ovvero $V(r) = mg\alpha r$, possiamo infine scrivere la lagrangiana $L = T - V$. Conviene anzi considerare la lagrangiana $\tilde{L} = L/m$, che per semplicità di notazione chiameremo ancora con L . Abbiamo dunque

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} [(1 + \alpha^2) \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] - g\alpha r. \quad (1.3.41)$$

A causa della simmetria del problema si ha evidentemente $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ e quindi la seconda equazione di Lagrange fornisce la legge di conservazione $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$, ovvero

$$r^2\dot{\varphi} = l_0 . \quad (1.3.42)$$

(conservazione della proiezione del momento angolare lungo l'asse z)

La prima equazione dà invece

$$(1 + \alpha^2)\ddot{r} = r\dot{\varphi}^2 - g\alpha , \quad (1.3.43)$$

o anche, sostituendo $\dot{\varphi} = l_0/r^2$ dalla legge di conservazione (1.3.42) del momento angolare,

$$(1 + \alpha^2)\ddot{r} = -\frac{dV_{l_0}^*}{dr} ; \quad V_{l_0}^*(r) = \frac{l_0^2}{2r^2} + g\alpha r . \quad (1.3.44)$$

Questa a sua volta può essere sostituita dal corrispondente teorema dell'energia

$$\frac{1}{2}(1 + \alpha^2)\dot{r}^2 + V_{l_0}^*(r) = E_0$$

dove la costante E_0 è determinata dai dati iniziali. Come nel caso del moto centrale, l'energia corrispondente al moto fittizio monodimensionale coincide con quella dell'originale problema bidimensionale $T + V = E_0$, quando si esprima il termine $\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2$, che figura nell'energia cinetica nel caso bidimensionale, attraverso la legge di conservazione (1.3.42) del momento angolare.

d4) Vincolo mobile: punto su asta rotante uniformemente in un piano orizzontale

In un piano orizzontale, in virtù di qualche meccanismo esterno, un'asta ruota di moto assegnato uniforme (velocità angolare $\dot{\varphi} = \omega = \text{cost}$) e ad essa è vincolato un punto P , attratto da una molla ideale verso un punto Q fisso sull'asta, a distanza R da O . L'unica coordinata "libera" è la distanza r del punto P da O (figura 1.1). È comodo allora usare coordinate polari piane r, φ , perché allora r risulta l'unica coordinata "libera", mentre l'esistenza del vincolo viene descritta analiticamente dalla condizione $\varphi = \omega t$ ($\omega = \text{cost}$). Il noto procedimento della meccanica elementare per scrivere l'equazione di moto consiste nel passare a un sistema di riferimento non inerziale solidale con l'asta e nel tener conto delle forze apparenti (oltre a quella "reale" della molla). Si noti bene che esiste anche una reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ normale all'asta. Occorre quindi considerare l'equazione di Newton come una equazione nel piano (con le sue forze apparenti), e proiettare poi tale equazione lungo l'asta. Risulta che si hanno due forze apparenti: quella di Coriolis,

ortogonale all'asta e bilanciata dalla reazione vincolare, e la familiare forza centrifuga lungo l'asta, di intensità $m\omega^2 r$ (con corrispondente energia potenziale $-(1/2)m\omega^2 r^2$).

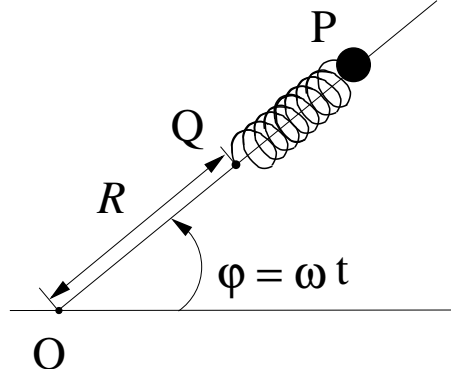


Figura 1.1: Punto P vincolato a un'asta ruotante uniformemente

Con il metodo lagrangiano tutto questo è compiuto automaticamente. Si usano le coordinate polari piane, sicché la lagrangiana di partenza è ancora la (1.3.21). Si esprime poi il vincolo nella forma $\varphi = \omega t$, da cui $\dot{\varphi} = \omega$ e si osserva $V = V(r) = \frac{1}{2}k(r - R)^2$. Si ha dunque un solo grado di libertà con coordinata libera r , e lagrangiana

$$L(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - \frac{1}{2}k(r - R)^2 \quad (1.3.45)$$

o, se si preferisce,

$$L(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - V^*(r), \quad V^*(r) = \frac{1}{2}k(r - R)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (1.3.46)$$

L'equazione di moto è pertanto

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}V^*(r), \quad (1.3.47)$$

o anche

$$m\ddot{r} = -k(r - R) + m\omega^2 r. \quad (1.3.48)$$

Si vede dunque, in conformità con una precedente osservazione, che l'energia potenziale della forza apparente centrifuga deriva da un termine cinetico dell'originale problema nel sistema di riferimento inerziale.

Si osservi inoltre come il carattere del moto dipenda in maniera essenziale dal segno di $k - m\omega^2$.

Indipendentemente da questo fatto, che è connesso alla particolare scelta del potenziale "vero" $V(r) = \frac{1}{2}k(r - R)^2$, questo esempio è interessante, dal punto di vista analitico, anche in relazione al teorema dell'energia. Infatti,

dalla (1.3.47) si ha evidentemente che è una costante del moto l'energia del problema fittizio monodimensionale

$$E = \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + V^*(r) . \quad (1.3.49)$$

D'altra parte, questa energia del problema fittizio monodimensionale (che chiameremo *energia generalizzata* o *integrale* – cioè costante del moto – di *Jacobi*), non coincide affatto con l'energia $T + V$ dell'originale problema bidimensionale (la differenza è nel segno del termine $\frac{1}{2}m\omega^2r^2$). Come vedremo più avanti, l'esistenza dell'integrale di Jacobi è garantita da un teorema generale dell'energia per le equazioni di Lagrange; da tale teorema apparirà poi determinata anche la relazione generale tra l'integrale di Jacobi e la forma dell'energia del problema originale. Risulterà che l'integrale di Jacobi differisce dall'energia del problema originale proprio in casi, come quello del presente esempio, di punti su superfici mobili o riferiti a sistemi noninerziali. L'esempio più importante è quello del celebre problema ristretto (circolare) dei tre corpi, di interesse fondamentale per la meccanica celeste.

Esercizio. Calcolare la potenza (lavoro per unità di tempo) esercitata dal motore che mantiene in moto rotatorio uniforme l'asta dell'esempio discusso sopra.

Esercizio. Scrivere la lagrangiana e le equazioni di moto per un punto in un piano riferito ad assi ruotanti uniformemente attorno all'origine. Questo esercizio, che sarà ripreso in un'altra parte delle note, è necessario ad esempio per la trattazione del cosiddetto *problema ristretto (circolare piano) dei tre corpi*, di considerevole interesse per la meccanica celeste.

1.4 Prime nozioni della teoria locale delle superfici (o varietà)

Nel prossimo paragrafo daremo la dimostrazione delle equazioni di Lagrange in tre passi: dapprima considereremo il caso di un punto su una superficie fissa, perché questo caso particolare permette di illustrare tutti gli elementi fondamentali del problema. Poi passeremo al caso di un punto con vincolo mobile. Infine tratteremo il caso generale di N punti con n gradi di libertà.

Dobbiamo dunque premettere qui alcuni cenni sulla descrizione analitica delle superfici. Ciò ci servirà per mettere in luce alcuni aspetti generali di cui faremo uso anche nel capitolo sulla relatività. Una superficie in \mathbb{R}^3 viene solitamente definita mediante una equazione, ovvero, come si dice, *in forma implicita*; ad esempio, la superficie sferica di raggio R è definita dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (luogo dei punti la cui distanza dall'origine vale R). Più in generale si avrà una equazione del tipo $f(\mathbf{x}) = 0$, ovvero

$$f(x, y, z) = 0 . \quad (1.4.1)$$

Questa rappresentazione è *globale*, ovvero descrive tutta la superficie. Essa impone un vincolo sulle coordinate, perché in generale due di esse possono essere scelte liberamente in un aperto di \mathbb{R}^2 e l'altra viene allora determinata in conseguenza. Si perviene in tal modo alla nozione di *rappresentazione parametrica locale* o di *carta locale*.

Ad esempio, nel caso della sfera di raggio $R = 1$ la calotta nord è definita da $z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, essendo il punto (x, y) "libero" nel cerchio unitario $x^2 + y^2 < 1$. Si dice allora che si è data una *rappresentazione parametrica locale* o una *carta locale*; ci sono due parametri liberi (coordinate libere) in un aperto $U \subset \mathbb{R}^2$ ed è data un'applicazione (una funzione) dalla carta U nello spazio ambiente \mathbb{R}^3 , che dà esplicitamente il punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ della parte di superficie considerata (calotta nord). Qui si tratta dell'applicazione che manda $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$ in $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3$. Dunque questa è una rappresentazione *locale*, perché fornisce solo una porzione di superficie. Analogamente si dà un'altra carta per la calotta sud. E, ancora, queste due carte non bastano, perché le rappresentazioni da esse fornite non sono appropriate per descrivere movimenti oscillanti attorno all'equatore (si deve continuamente saltare da una carta all'altra). Conviene allora introdurre altre carte, ad esempio le calotte est ed ovest rappresentate da $x = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$.⁶³

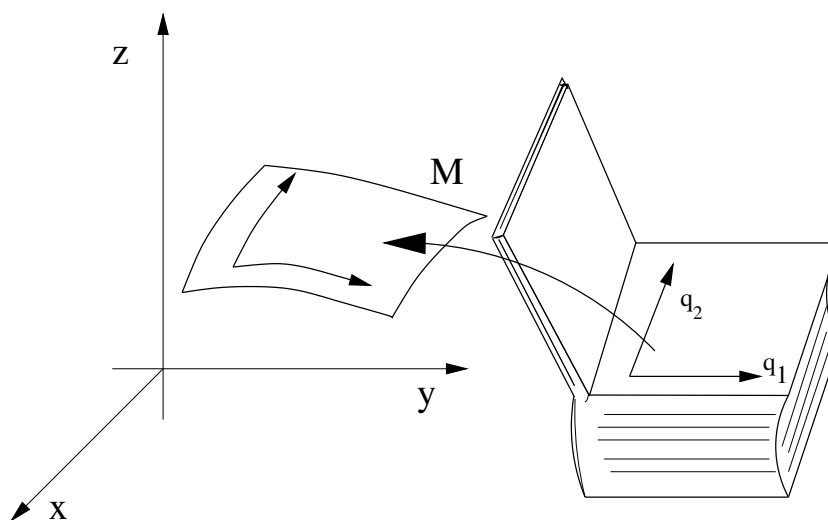


Figura 1.2: Carta locale di un atlante, e formula di immersione

Negli esempi di carte locali considerati sopra, le coordinate "libere" sulle carte erano due coordinate dello spazio ambiente. Più in generale, si dice che si ha una rappresentazione parametrica locale o una **carta locale** quando è

⁶³Tuttavia, è possibile rappresentare la sfera con due sole carte. La scelta più semplice è quella della proiezione stereografica, ad esempio sul piano equatoriale, proiettando (prima carta) dal polo nord, e poi (seconda carta) dal polo sud.

assegnata una funzione $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{x} = F(q), \quad q = (q_1, q_2), \quad (1.4.2)$$

dove U è un aperto di \mathbb{R}^2 , senza che q_1, q_2 siano necessariamente delle coordinate cartesiane. Con un abuso di linguaggio, denoteremo la funzione F con \mathbf{x} , ovvero scriveremo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q), \quad q = (q_1, q_2). \quad (1.4.3)$$

In effetti, affinché la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$ descriva propriamente una superficie bidimensionale, si richiede, sulle sue derivate parziali, una condizione che verrà illustrata più sotto (indipendenza lineare dei corrispondenti vettori coordinati). Chiameremo la rappresentazione (1.4.3) “**formula di immersione**”, perché fornisce una formula esplicita (o parametrica) locale che porta dalla carta, con coordinate $q = (q_1, q_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$, alla superficie immersa nello **spazio ambiente** \mathbb{R}^3 , come illustrato nella figura 1.2. La figura si riferisce ad una superficie bidimensionale, cioè con $q \in U \subset \mathbb{R}^2$. Ma evidentemente si può pensare al caso generale $q \in U \subset \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Nel caso $n = 1$ si ha una curva. Nel caso $n = 3$ si ha semplicemente un cambiamento di variabili: il punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (o equivalentemente l'insieme delle sue coordinate cartesiane x, y, z) è espresso in funzione di altre coordinate q_1, q_2, q_3 , ad esempio cilindriche o polari.

Esempio: rappresentazione parametrica della sfera. Consideriamo una sfera di raggio R , rappresentata implicitamente, in coordinate cartesiane ortogonali, dall'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Questo “vincolo” assume una forma particolarmente semplice se si introducono le familiari coordinate polari definite dalla distanza dall'origine ρ e dagli angoli θ (theta) e φ (phi, leggi fi), che noi scegliamo rispettivamente come colatitudine (cioè il complementare della latitudine) e longitudine, (si veda la figura 1.3), sicché il passaggio dalle coordinate cartesiane a quelle polari è definito da

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Infatti, in tali coordinate il “vincolo” $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ assume la semplicissima forma $\rho = R$, e la formula di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2)$ prende la forma (con $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$)

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

Osserviamo che la rappresentazione parametrica della sfera mediante la formula di immersione (1.4.4) è effettivamente una rappresentazione locale, cioè non rappresenta tutta la sfera, ma solo un sottoinsieme aperto, ovvero la sfera privata dei poli nord e sud. La ragione è la medesima per cui nel piano le coordinate polari sono definite solo al di fuori dell'origine, perché l'angolo non è definito quando il raggio è nullo. Qui allo stesso modo, fissati il raggio R e la colatitudine θ (dunque su un

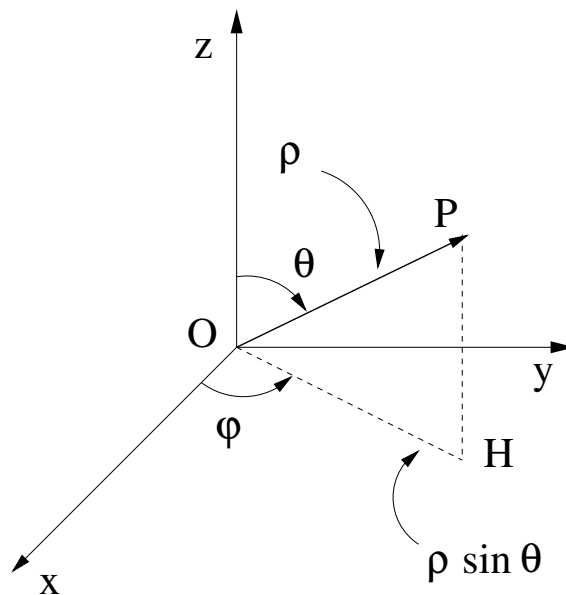


Figura 1.3: Coordinate polari nello spazio

parallelo), l'angolo φ (che fornisce le coordinate x ed y) non è definito quando il raggio ($R \sin \theta$) del meridiano è nullo, cioè nei poli nord e sud.

Per descrivere parametricamente una superficie si dovrà disporre di un insieme (un *atlante*) di carte locali. Nel seguito ci limiteremo al caso in cui sia fissata una carta, con la corrispondente formula di immersione (1.4.3) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$.

Ricordiamo ora le nozioni di **linee coordinate** e di **vettori coordinati**. Poiché a ogni punto q della carta U corrisponde un solo punto P sulla superficie M , avviene allora che ad ogni linea su U corrisponderà una linea sulla superficie $M \in \mathbb{R}^3$. Le linee su M che corrispondono alle linee $q_1 = \text{cost}$ oppure $q_2 = \text{cost}$ si dicono **linee coordinate** (cioè linee lungo le quali varia una sola delle coordinate).

Ad esempio, se la superficie (o varietà) M è il piano $z = 0$ e la carta è data dalle coordinate polari piane $(q_1, q_2) = (r, \varphi)$, allora le linee coordinate r sono i raggi uscenti dall'origine, e le linee coordinate φ sono le circonferenze aventi per centro l'origine. Nel caso della sfera riferita a coordinate polari θ e φ (figura 1.3), le linee coordinate θ sono i meridiani, e le linee coordinate φ sono i paralleli. Per il seguito sarà utile ricordare che, sulla sfera di raggio R , i paralleli sono cerchi di raggio $R \sin \theta$, come si legge dalle prime due relazioni della (1.4.4).

Veniamo ora ai **vettori coordinati**: dato un punto $P \in M$ di coordinate $q = (q_1, q_2)$ nella carta assegnata $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$, sono detti vettori coordinati i

vettori

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2) .$$

Questi sono due vettori dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 , spiccati dal punto $P \in M$ e tangenti alle linee coordinate q_1, q_2 e pertanto sottendono (ingl. *span*) il piano tangente alla varietà M nel punto P (tradizionalmente denotato con il simbolo $T_P M$).

Quel che si è appena detto dovrebbe essere sufficientemente chiaro. Diamo comunque alcune spiegazioni o illustrazioni. Diamo per scontato che si sappia che se è assegnato un movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, allora la velocità $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ è un vettore che al tempo t è tangente alla traiettoria nel punto $\mathbf{x}(t)$.

Ora, il movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, come applicazione da un aperto $I \subset \mathbb{R}$ ad \mathbb{R}^3 , dal punto di vista della teoria delle superfici è nient'altro che una superficie di dimensione uno (una linea, appunto la cosiddetta *traiettoria*, in cui il parametro q ha un significato particolare, ovvero il tempo). Allo stesso modo, se si ha una superficie bidimensionale M con coordinate locali $q = (q_1, q_2)$, e ne fissiamo una, diciamo $q_2 = q_2^*$, allora al variare di q_1 si ha una linea $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2^*)$ parametrizzata esattamente allo stesso modo in cui il movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dà una rappresentazione parametrica della traiettoria. Ma allora l'analogo della velocità $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ è proprio il vettore $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_1}$, in cui ovviamente si ha una derivata parziale perché ora si hanno due coordinate e la seconda, q_2 , è stata fissata al valore q_2^* . Dunque è chiaro che le espressioni $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$, $i = 1, 2$, rappresentano due vettori tangenti alle due linee coordinate nel punto $P \in M$ considerato. Nel caso di "buone" coordinate per superfici bidimensionali, avverrà che i due vettori coordinati in P sottendono lo spazio tangente $T_P M$, e questo richiede ovviamente che tali vettori siano linearmente indipendenti (cioè siano non nulli e abbiano direzioni diverse). Si capisce così come per una adeguata definizione di carta locale si richieda esplicitamente che la funzione di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$ abbia la proprietà che i vettori coordinati $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ siano linearmente indipendenti (e dunque la matrice jacobiana $\frac{\partial x_l}{\partial q_j}$ abbia rango massimo). È questa la proprietà che si richiede sulla formula di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$, cui si era accennato più sopra. È facile mostrare che l'indipendenza lineare dei vettori coordinati si traduce in una interessante proprietà analitica, ovvero: introdotta la matrice

$$g_{ik} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} , \quad (1.4.5)$$

si ha

$$\det g_{ik} \neq 0 . \quad (1.4.6)$$

Questa proprietà, che utilizzeremo tra l'altro per passare alle equazioni di Hamilton, verrà qui discussa in un successivo paragrafo, in cui verrà illustrato come la matrice g_{ik} definisca la metrica (cioè il prodotto scalare) naturale sulla varietà M .

Diamo almeno un esempio di vettori coordinati, considerando il caso del piano $z = 0$ riferito a coordinate polari piane r, φ . In questo caso la formula di immersione (si confronti la (1.3.15)) è

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = \mathbf{i}r \cos \varphi + \mathbf{j}r \sin \varphi = r(\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi), \quad (1.4.7)$$

e i due vettori coordinati sono

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = r(-\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi), \quad (1.4.8)$$

ovvero

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \mathbf{e}_r \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = r\mathbf{e}_\varphi, \quad (1.4.9)$$

se $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ sono i corrispondenti vettori normalizzati (versori, ingl. *unit vectors*) impiegati nelle trattazioni elementari (e qui nel paragrafo 2).

Esercizio: Calcolare i vettori coordinati relativi alle coordinate polari sulla sfera (1.4.4).

Avendo dunque richiamato le nozioni di carta locale $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$ di una superficie, e di vettori coordinati $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$, veniamo ora alla descrizione dei movimenti (figura 1.4).

Un movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ è per definizione una funzione che ad ogni tempo $t \in I \subset \mathbb{R}$, dove I è un aperto in \mathbb{R} , associa un punto $P \in \mathbb{R}^3$; nel nostro caso esso associerà un punto $P \in M \subset \mathbb{R}^3$. Fissata la carta locale mediante la funzione di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$, per assegnare il movimento basterà assegnare la funzione $q = q(t)$ – ci si muove sulla carta dell'atlante – e il movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sulla superficie immersa nello spazio ambiente sarà poi dato dalla funzione composta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q(t))$. Quindi la velocità $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ sarà data (per il teorema di derivata di una funzione composta o *chain rule*) da

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \dot{q} \quad (\equiv \sum_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i). \quad (1.4.10)$$

Questa relazione ci dice che, se il punto mobile passa per $P \in M$, allora la sua velocità \mathbf{v} giace nel piano tangente $T_P M$, in quanto essa appare come combinazione lineare dei vettori coordinati $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ che lo sottendono; di più, se il moto è espresso nella carta dalla legge $q = q(t)$, allora le componenti della velocità sulla base dei vettori coordinati (*base coordinata*) sono proprio le derivate $\dot{q}(t)$ di $q(t)$.

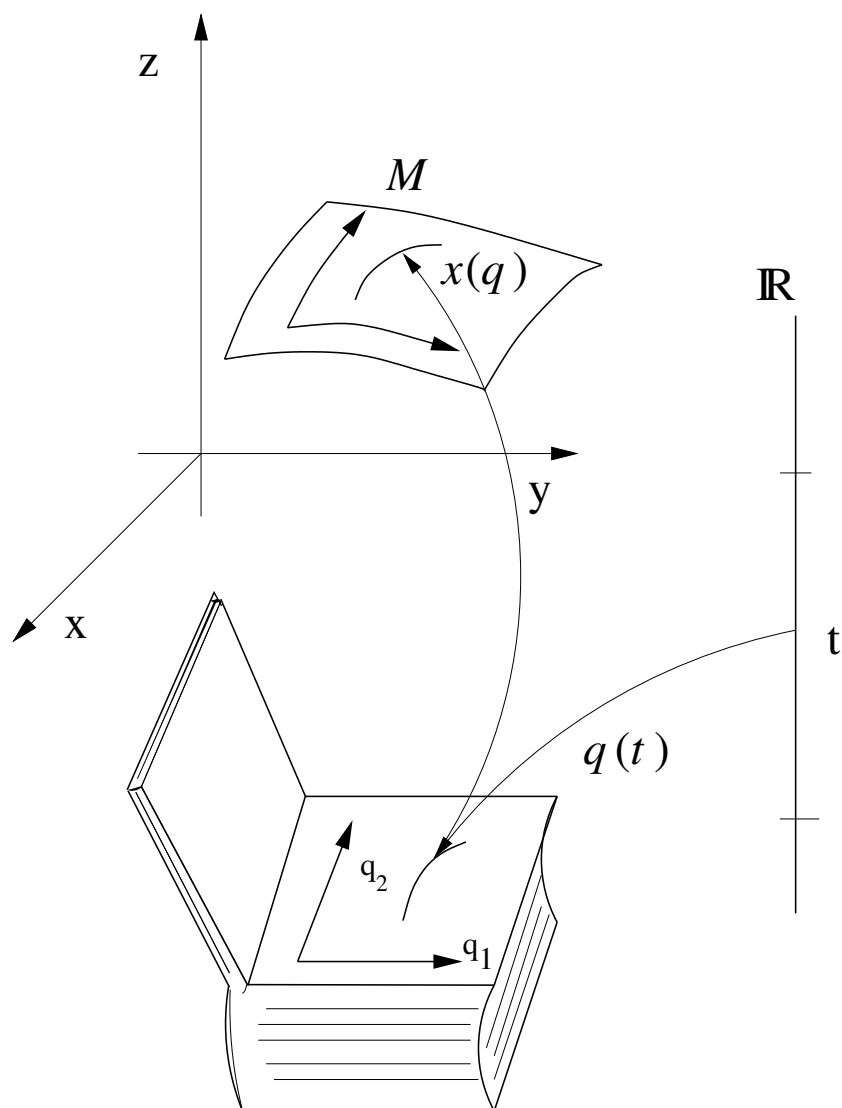


Figura 1.4: Il movimento come funzione composta $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q(t))$

Si potrebbe ora procedere analogamente anche per l'accelerazione $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, determinando lo sviluppo del vettore \mathbf{a} come combinazione lineare dei vettori della base coordinata del tipo $\mathbf{a} = \sum_i a^i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ con opportuni coefficienti a^i (in generale, esiste anche una componente dell'accelerazione normale alla superficie, che qui però non ci interessa); si giungerebbe così, in maniera naturale, alla introduzione di alcuni enti fondamentali della geometria differenziale noti con il nome di "simboli di Christoffel". Tralasciamo qui questa

interessante deviazione sulla geometria differenziale. Infatti, per una deduzione elementare delle equazioni di Lagrange basta invece (come si vedrà nel prossimo paragrafo) ottenere l'espressione della proiezione ortogonale dell'accelerazione sulla base coordinata, o più precisamente (prescindendo dalla normalizzazione dei vettori base) basta procurarsi l'espressione dei prodotti scalari $a_i := \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2$).⁶⁴

Si ha la

Proposizione 1 (formula del binomio lagrangiano) . Vale

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots n), \quad (1.4.11)$$

con $v^2 \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, o equivalentemente, in termini dell'energia cinetica $T = \frac{1}{2}mv^2$,

$$m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad (i = 1 \dots n), \quad (1.4.12)$$

Dimostrazione. L'idea centrale è di esprimere il primo membro in termini di derivate della velocità. A tal fine si compiono due passi. Ricordando $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, il primo passo consiste nell'utilizzare la formula di integrazione per parti $\frac{df}{dt} \cdot g = \frac{d}{dt}(fg) - f \cdot \frac{dg}{dt}$, sicché il primo membro viene espresso come la differenza di due opportuni termini, in cui figura la velocità in luogo dell'accelerazione. Il secondo passo consiste poi nell'utilizzare un Lemma (la cui dimostrazione è riportata subito sotto), che permette di sostituire $\partial \mathbf{x}$ con $\partial \mathbf{v}$, sicché ci si riduce a espressioni del tipo (si veda sotto) $\mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v}$; infine, usando

$$\mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v} = \partial \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \equiv \partial \left(\frac{1}{2} v^2 \right),$$

ci si riduce a espressioni contenenti solo derivate dell'energia cinetica (a meno del fattore m). Si ha in effetti

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} &\equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

Q.E.D.

⁶⁴In geometria differenziale, è consueto chiamare le quantità a^i (indice in alto) con il nome di componenti *contravarianti* del vettore \mathbf{a} , mentre le quantità a_i (indice in basso) vengono dette componenti *covarianti*. Si ha coincidenza, ovvero $a_i = a^i$, solo nel caso speciale in cui la base sia ortonormale, cioè costituita da vettori normalizzati (di lunghezza unitaria) e mutuamente ortogonali; questo è proprio quello che avviene nel caso delle coordinate cartesiane ortogonali. Nel seguito, tuttavia, useremo sempre gli indici in basso e non insisteremo su questa distinzione, tranne che in una parte del capitolo sulla relatività.

Nella dimostrazione del teorema si è fatto uso del seguente

Lemma 1 Valgono le relazioni⁶⁵

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad (i = 1 \dots n). \quad (1.4.13)$$

Dimostrazione. La prima segue immediatamente dalla espressione (1.4.10) della velocità, $\mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i$. Infatti la (1.4.10) dice che \mathbf{v} è funzione lineare di \dot{q}_i , e quindi la derivata di \mathbf{v} rispetto a \dot{q}_i è proprio il corrispondente coefficiente. Per la seconda, osserviamo che dalla (1.4.10) segue (si usa la formula per la derivata di una funzione composta (*chain rule*), ricordando che $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ è funzione di q , a sua volta funzione di t)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}.$$

Q.E.D.

Naturalmente, quando si sia fissata una carta con la corrispondente formula di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$, da cui $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \dot{q}$, l'energia cinetica T dovrà essere pensata come funzione delle q e delle \dot{q} , dunque

$$T = \sum_{i,k} a_{i,k}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (1.4.14)$$

dove ovviamente i coefficienti a_{ik} sono dati da

$$a_{ik} = \frac{m}{2} g_{ik} = \frac{m}{2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}. \quad (1.4.15)$$

Dunque, avendo fissato una carta è possibile calcolare esplicitamente i coefficiente a_{ik} . In particolare, tuttavia, molto spesso essi vengono determinati in maniera ovvia. Così tutte le volte che le linee coordinate si tagliano ortogonalmente la forma quadratica (1.4.15) risulta essere diagonale, cioè si ha $a_{ik} = 0$ per $i \neq k$; inoltre, v^2 si ottiene dal teorema di Pitagora usando le note espressioni per le componenti della velocità. Ad esempio, nei casi comunissimi di coordinate cartesiane, cilindriche o polari, si ha

$$\begin{cases} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 + (\rho^2 \sin^2 \theta) \dot{\varphi}^2) \end{cases} \quad (1.4.16)$$

⁶⁵Queste due relazioni si ricordano facilmente. Nella prima, sotto i segni di derivata parziale si mettono, invece di \mathbf{x} , q (secondo membro), le loro derivate temporali \mathbf{v} , \dot{q} . Nella seconda, si afferma che si possono commutare (scambiare) due derivate: $\frac{\partial}{\partial q} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q}$.

Il caso delle coordinate cilindriche è già stato discusso. Quello delle coordinate polari è compreso in maniera analoga, osservando che lungo le linee coordinate θ (i meridiani) ci si muove su cerchi di raggio ρ , sicché la componente della velocità è $\rho\dot{\theta}$, mentre lungo le linee coordinate φ (i paralleli) ci si muove su cerchi di raggio $\rho \sin \theta$, sicché la componente della velocità è $(\rho \sin \theta)\dot{\varphi}$. È importante che queste formule siano comprese fino ad apparire ovvie.

Nota: Connessione con la metrica. Si trova che lo stabilire la forma analitica dell'energia cinetica, come fatto sopra, è equivalente a stabilire la forma analitica del prodotto scalare (o della metrica, come anche si dice) in coordinate arbitrarie nello spazio ambiente o su una superficie. Ad esempio, la notazione tradizionale per la metrica nello spazio ambiente in coordinate cartesiane, cilindriche o polari, corrispondente alle espressioni sopra date per l'energia cinetica, è

$$\begin{cases} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \\ &= d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + (\rho^2 \sin^2 \theta) d\varphi^2 . \end{cases} \quad (1.4.17)$$

Il significato di queste notazioni viene qui spiegato in un prossimo paragrafo.

1.5 Le equazioni di Lagrange

A questo punto la deduzione delle equazioni di Lagrange risulta banale.

a) Sistema costituito da un punto (libero o su superficie o linea fissi)

Cominciamo dal caso del punto su una superficie rappresentata localmente in una carta con formula di immersione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q) , \quad q = (q_1, \dots, q_n) . \quad (1.5.1)$$

Nel caso della superficie, che qui avremo in mente, il numero n dei gradi di libertà è $n = 2$. Ma quanto si dirà vale anche per i casi $n = 1$ (punto su una linea) e $n = 3$ (punto libero).

Si ammette dunque che valga l'equazione di Newton (o piuttosto di Newton–d'Alembert)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{(v)} , \quad (1.5.2)$$

dove \mathbf{F} è la “forza attiva”, funzione conosciuta di \mathbf{x} , mentre $\mathbf{F}^{(v)}$ è la “reazione vincolare” che, come già spiegato, deve essere pensata come una incognita del problema, di cui è noto soltanto che in ogni punto è ortogonale alla superficie (o alla linea). Nel caso $n = 3$ (punto libero) si ha $\mathbf{F}^{(v)} = 0$.

Si ha allora il problema di dedurre dall'equazione vettoriale di Newton (1.5.2) n equazioni quanto (tante quanti sono i “gradi di libertà”), nelle quali non appaia la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$.

Questo si ottiene subito osservando che i vettori coordinati $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$, $i = 1, \dots, n$ sono tangenti alla superficie, cioè normali alla reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$, ovvero si ha

$$\mathbf{F}^{(v)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1 \dots n) . \quad (1.5.3)$$

Le equazioni utili sono dunque quelle che si ottengono moltiplicando scalarmente l'equazione di Newton (1.5.1) per $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$, ovvero

$$m\mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n) . \quad (1.5.4)$$

Il primo membro viene poi rielaborato con la formula del binomio lagrangiano (1.4.12), mentre per il secondo membro, nel caso di forze derivanti da potenziale, in cui cioè

$$\mathbf{F} = -\text{grad } V , \quad (1.5.5)$$

si ha $\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q}$, e dunque, per il teorema di derivata di una funzione composta (*chain rule*),

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n) . \quad (1.5.6)$$

Pertanto le equazioni di Newton proiettate sulle linee coordinate, ovvero le (1.5.4), si riscrivono nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n) . \quad (1.5.7)$$

Si introduce infine la funzione lagrangiana $L = L(q, \dot{q})$ definita da

$$L = T - V , \quad (1.5.8)$$

e si osserva $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (perché V non dipende dalle velocità \dot{q}).

Abbiamo dunque dimostrato il

Teorema 1 *Si consideri un punto libero oppure su una superficie liscia oppure su una linea liscia, la cui posizione sia rappresentata in una carta locale $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$ da coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$ (rispettivamente con $n = 3$, $n = 2$, $n = 1$). Allora i movimenti $q = q(t)$ sulla carta corrispondenti alle soluzioni dell'equazione di Newton*

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\text{grad } V + \mathbf{F}^{(v)} \quad (1.5.9)$$

(dove $\mathbf{F}^{(v)}$ è la reazione vincolare normale alla superficie o alla linea, $\mathbf{F}^{(v)} = 0$ per il punto libero) sono soluzioni delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n) , \quad (1.5.10)$$

essendo $L(q, \dot{q})$ la funzione lagrangiana, definita da $L = T - V$, dove T è l'energia cinetica e V l'energia potenziale.

□

Spazio ambiente e carta, invarianza in forma delle equazioni di Lagrange.

Vale la pena di osservare esplicitamente che le equazioni di Lagrange (1.5.10) e l'originaria equazione di Newton (1.5.9) vivono in spazi completamente diversi: l'equazione di Newton, di carattere vettoriale, vive nello spazio ambiente \mathbb{R}^3 , mentre **le equazioni di Lagrange (1.5.10) vivono nella carta delle coordinate q ; nelle equazioni di Lagrange non vi è più alcun riferimento esplicito allo spazio ambiente \mathbb{R}^3 .** Quando vengano risolte, esse forniscono un movimento $q = q(t)$ sulla carta e da questa si può poi risalire, tramite la formula di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$, al movimento $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(q(t))$ nello spazio ambiente, ed eventualmente calcolare la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}(t) = m\ddot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{F}(\mathbf{x}(t))$.

Dalla deduzione si osserva inoltre che se si sceglie una diversa carta con coordinate $q' = (q'_1, \dots, q'_n)$, allora anche nelle nuove variabili le equazioni di moto avranno sempre la forma di Lagrange (1.5.10) con q' al posto di q , con la sola avvertenza che la nuova lagrangiana si ottiene dalla precedente per sostituzione di variabili (e con la corrispondente sostituzione indotta sulle \dot{q}). Proprio questo è il procedimento che abbiamo seguito nel paragrafo (1.3), quando nel piano siamo passati dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari.

Spazio degli stati. Ricordiamo che nel caso del punto libero ($n = 3$) si deve considerare, oltre allo *spazio delle configurazioni* (cioè delle posizioni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$) anche lo spazio degli stati, coppie di posizione e velocità $(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^6$, e che le variabili dinamiche, ad esempio l'energia o la lagrangiana, devono essere pensate come funzioni dallo spazio degli stati \mathbb{R}^6 ad \mathbb{R} . Se ora un punto è vincolato ad una superficie bidimensionale $M \subset \mathbb{R}^3$, diremo che la superficie M è lo **spazio delle configurazioni** (cioè delle posizioni possibili). Ma si dovrà anche considerare lo **spazio degli stati** (denotato con TM e detto "fibrato tangente" di M) definito dalle coppie (\mathbf{x}, \mathbf{v}) con $\mathbf{x} \in M$ e $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M$ – si ricordi che $T_{\mathbf{x}}M$ denota lo spazio tangente a M nel punto \mathbf{x} . Dunque la lagrangiana $L = T - V$ è definita come funzione dallo spazio degli stati TM ad \mathbb{R} :

$$L : TM \rightarrow \mathbb{R} .$$

Ora, quando si fissa una carta locale per M , con formula di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q)$, allora, avendo fissato $\mathbf{x} \in M$, sul piano tangente $T_{\mathbf{x}}M$ viene assegnata automaticamente anche la base coordinata $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$, e quindi ogni vettore $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M$ viene individuato da una coppia $(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, qui $n = 2$ (mediante la formula $\mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i$). La lagrangiana L è dunque definita intrinsecamente su TM , e quando si sceglie una carta per M essa è rappresentata analiticamente da una funzione $L = L(q, \dot{q})$.⁶⁶

Tornando alle equazioni di Lagrange (1.5.10) e alla loro deduzione dalla equazione di Newton (1.5.2), vale la pena di osservare come, dal procedimento deduttivo, si verifichi immediatamente che esse possono essere espresse in una forma più generale, che comprende il caso in cui la forza attiva \mathbf{F}

⁶⁶Un purista indicherebbe con due simboli distinti la funzione L definita su TM e la sua rappresentazione analitica nella carta.

dipenda dalla velocità o anche dal tempo. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. In tal caso si introduce la *forza generalizzata* Q definita da

$$Q_i = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.5.11)$$

e allora le equazioni di Lagrange assumono la forma generale

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.5.12)$$

Il significato fisico della forza generalizzata Q_i appare chiaro quando si consideri il lavoro elementare δW della forza \mathbf{F} definito da $\delta W = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$, perchè si ha evidentemente

$$\delta W = Q dq \quad (\equiv \sum_i Q_i dq_i). \quad (1.5.13)$$

La forma generale (1.5.12) delle equazioni di Lagrange verrà utilizzata in relazione alla *forza di Lorentz* $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B})$ per una particella in campo elettromagnetico. Si mostrerà che anche in tal caso le equazioni di moto si deducono da una funzione lagrangiana, nonostante che la forza dipenda dalla velocità.

Mostriamo ora come le equazioni di Lagrange nella forma (1.5.10) forniscano il moto di un sistema anche in casi molto più generali di quello finora considerato (punto libero, o su superficie liscia o su linea). Il primo passo significativo è quello che tratta in maniera unificata sia il caso di un punto su superficie mobile sia il caso di un punto libero soggetto a una trasformazione di coordinate dipendente dal tempo. In questo caso si ha una significativa generalizzazione. Il passaggio invece a un sistema di N punti è sostanzialmente banale, e costituisce in effetti un semplice esercizio, che viene comunque riportato qui per completezza.

b) Punto vincolato a linea o superficie mobile, o trasformazione di coordinate dipendente dal tempo

Consideriamo anzitutto il caso di un punto vincolato a una linea o a una superficie mobile. Dal punto di vista analitico, questa situazione viene descritta come quella di un punto la cui posizione $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ sia individuata in una carta mediante una formula di immersione dipendente parametricamente dal tempo

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t) \quad (q = (q_1, \dots, q_n)) \quad (1.5.14)$$

Per $n = 1$ la relazione (1.5.14) descrive una situazione in cui il punto è vincolato ad una linea che si muove nello spazio con una legge determinata. Per comprendere questo, basta osservare ad ogni tempo t fissato (come

quando si scatta una fotografia) la (1.5.14) è proprio la funzione di immersione di una linea ben definita, e dunque ad ogni diverso tempo si ha una diversa linea. In altri termini, per $n = 1$ la (1.5.14) descrive una famiglia di curve (ciascuna parametrizzata dalla sua coordinata q) dipendente parametricamente dal tempo. Si ricordi l'esempio del punto su asta ruotante in un piano, illustrato nel paragrafo (1.3); in tal caso la coordinata libera q è la distanza r dall'origine e ad ogni tempo t si ha una diversa inclinazione definita dall'angolo $\varphi(t) = \omega t$. Analogamente per $n = 2$ si ha un punto su una superficie, della quale è assegnato il movimento (esempio, punto su una superficie sferica, di raggio $R = R(t)$ che varia nel tempo in maniera assegnata, come quando si gonfia un palloncino).

Superfici mobili come sottoinsiemi “fissi” dello spaziotempo. Vi è un altro modo particolarmente interessante di riguardare alla descrizione matematica delle superfici mobili, che è strettamente connesso al modo in cui viene introdotto lo spaziotempo in relatività. Più sopra, considerando il tempo t come un parametro che viene fissato di volta in volta, abbiamo descritto una superficie mobile come una famiglia di superfici bidimensionali $M_2 = M_2(t)$ dipendenti dal parametro t , ciascuna delle quali è un diverso sottoinsieme dello spazio ordinario \mathbb{R}^3 . Ma se si aggiunge il tempo come una quarta dimensione, e si viene a introdurre quello che viene chiamato **spaziotempo**, un punto del quale ha coordinate (x, y, z, t) , allora la famiglia di superfici sopra considerata appare come un'unica ipersuperficie tridimensionale M_3 nello spaziotempo, e le singole superfici bidimensionali $M_2 = M_2(t)$ si ottengono intersecando la ipersuperficie $M_3 \subset \mathbb{R}^4$ con un piano $t = \text{cost}$, e proiettando poi sullo spazio ordinario \mathbb{R}^3 . In tal modo si ottiene una “superficie mobile” in \mathbb{R}^3 . Questo punto verrà ripreso nel capitolo sulla relatività, e verrà descritto pittoricamente con un significativo “slogan” di Einstein stesso: *“il divenire nello spazio si manifesta come un essere nello spaziotempo”*.

Particolarmente interessante è il fatto che nel caso $n = 3$ la relazione (1.5.14) descrive una situazione alquanto diversa. Infatti, per $n = 3$ la funzione di immersione (1.5.14) descrive un cambiamento di variabili dipendente dal tempo; ad esempio, essa può descrivere una situazione in cui la posizione “assoluta” \mathbf{x} di un punto P è espressa in termini delle coordinate q relative ad un sistema di riferimento il cui moto rispetto al sistema “assoluto” è assegnato.⁶⁷ In effetti, una tale situazione si può presentare anche per $n = 2$ o $n = 1$ (cambiamento di variabili dipendente dal tempo, nel piano o sulla retta). Il caso significativo in cui il sistema di riferimento ruota uniformemente in un piano (è il caso della giostra) viene considerato ad esempio nello studio del cosiddetto problema ristretto (circolare, piano) dei tre corpi, di fondamentale interesse per la meccanica celeste (che verrà

⁶⁷Si hanno due sistemi di coordinate, di cui uno è inerziale e viene convenzionalmente chiamato “assoluto” o “fermo”; l'altro, che non è necessariamente inerziale, viene chiamato “in moto” o “relativo”. Allora il vettore $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ definente la posizione del punto rispetto al sistema assoluto, viene espresso in termini delle “coordinate relative” q , mediante relazioni dipendenti parametricamente dal tempo t .

discusso in un'altro capitolo).

Nei casi di punto vincolato con $n = 1$ o $n = 2$ si assumerà ancora che il vincolo sia liscio, il che si esprime richiedendo che, *ad ogni tempo fissato* t , la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ sia normale alla linea o superficie, come essa si presenta fotografata a quel tempo t . L'espressione analitica (cioè in formule) di questo principio è molto semplice, ed è precisamente ancora la stessa (1.5.3) che si aveva nel caso di vincolo fisso. Si osserva anzitutto che dalla formula di immersione (1.5.14) si ottiene ora per la velocità $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, anziché la relazione $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \dot{q}$, la relazione

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \quad (1.5.15)$$

e si osserva poi che, ad ogni tempo t , i vettori coordinati $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i}$ giacciono ancora nel piano tangente (alla superficie fotografata a quel tempo). E infatti, riferendosi all'esempio, la (1.3.16) afferma che la velocità è decomposta in una parte tangente alla superficie (fotografata a quel tempo) e una parte trasversa, che il punto possiede per il solo fatto che è la superficie stessa a muoversi (*velocità di trascinamento*). Dunque la lisciezza del vincolo si esprime ancora, come nel caso del vincolo fisso, mediante la condizione (1.5.3).

Il procedimento per ottenere le equazioni "pure" (in cui cioè "è scomparsa" la reazione vincolare) è dunque ovvio. Infatti, dall'equazione di Newton (1.5.2) segue ancora la (1.5.4). E' poi un semplicissimo esercizio verificare che vale ancora il lemma 1, e dunque la formula del binomio lagrangiano, sicché valgono ancora le equazioni di Lagrange (1.5.10). L'unico elemento da cui appare il fatto che stiamo ora trattando un caso più generale con formula di immersione (1.5.14) dipendente parametricamente dal tempo, è l'espressione analitica dell'energia cinetica $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2$, in quanto questa risulta essere una forma quadratica non omogenea. Infatti, sostituendo per \mathbf{v} la nuova espressione (1.5.15) si ottiene subito (ricordando $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$)

$$T = \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k + \sum_i b_i \dot{q}_i + c, \quad (1.5.16)$$

con coefficienti $a_{ik}(q, t)$, $b_i(q, t)$, $c(t)$ dati da

$$a_{ik} = \frac{m}{2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}, \quad b_i = \frac{m}{2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}, \quad c = \frac{m}{2} \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right\|^2. \quad (1.5.17)$$

Osservazione. Si noti che si ha

$$\det a_{ik} \neq 0. \quad (1.5.18)$$

Questa relazione infatti esprime la condizione che gli n vettori coordinati siano linearmente indipendenti, ovvero che le linee coordinate q_i ($i = 1, \dots, n$) si tagliano trasversalmente. La dimostrazione viene qui data in un prossimo paragrafo.

c) Sistema di N punti

Nota didattica. La deduzione che ora riportiamo delle equazioni di Lagrange per un sistema di N punti (vincolati, o in coordinate generali) può essere considerata come un **esercizio**, l'unica parte significativa del quale è forse la scelta della appropriata definizione di perfezione dei vincoli. Si suggerisce di scorrere rapidamente il testo.

L'ultima generalizzazione riguarda il caso in cui si ha a che fare con un sistema di N punti, eventualmente vincolati. Per semplicità di notazione consideriamo il caso di vincoli fissi, perchè l'ulteriore generalizzazione al caso dei vincoli mobili è banale come nel caso precedente.

Nel caso di N punti con vettori posizione $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ ciascuno in \mathbb{R}^3 , l'appropriato spazio ambiente è \mathbb{R}^{3N} . Si può dire che la "posizione" o **configurazione** del sistema è individuata dal vettore rappresentativo

$$X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N} . \quad (1.5.19)$$

Se poi il sistema è vincolato, ciò significa che il punto rappresentativo X deve giacere su una superficie (o varietà) $M \subset \mathbb{R}^{3N}$ avente una certa dimensione $n < 3N$. In altri termini, deve essere possibile esprimere localmente le posizioni $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ di tutti i punti (e quindi la posizione del vettore rappresentativo $X \in \mathbb{R}^{3N}$) mediante delle coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$ attraverso una formula di immersione

$$X = X(q) , \quad q = (q_1, \dots, q_n) . \quad (1.5.20)$$

Se invece il sistema non è vincolato, si ha $n = 3N$ e la (1.5.20) esprime le posizioni di tutti i punti mediante coordinate arbitrarie. La varietà M viene chiamata con il nome di spazio delle configurazioni. Si noti bene che le coordinate q non "appartengono" a nessuno degli N punti singolarmente, ma appartengono al sistema! Si pensi al caso tipico di un corpo rigido macroscopico,⁶⁸ in cui si ha $N \simeq 10^{23}$ mentre è $n = 6$. Dovrebbe allora

⁶⁸Consideriamo anzitutto il caso di un sistema di due punti la cui distanza è fissa. Allora si ha $N = 2$, $3N = 6$ e $n = 5$. Le cinque coordinate "libere" possono essere scelte come segue: 3 sono le coordinate cartesiane del baricentro, 2 le coordinate angolari che individuano la direzione (con verso) del vettore che dal punto 1 (o dal baricentro) porta al punto 2. Più in generale un corpo rigido è per definizione un sistema di N punti le cui mutue distanze sono fisse. La "configurazione" del corpo è allora determinata da $n = 6$ coordinate, di cui tre individuano la posizione di un suo punto scelto ad arbitrio (tipicamente, ma non necessariamente, il baricentro), e tre sono angoli (ad esempio i cosiddetti "angoli di Eulero") che definiscono la disposizione di un sistema di assi cartesiani

essere chiaro come, per descrivere il moto dl sistema, sia importante stabilire delle equazioni per le coordinate q sulla carta, dedotte dalle equazioni valide per i singoli N punti costituenti il sistema.

Assegnata la varietà M e una carta $X = X(q)$, sono ancora definite le linee coordinate su M e, in ogni suo punto X , sono definiti i vettori coordinati $\frac{\partial X}{\partial q_i}$ che sottendono il piano tangente $T_X M$. L'unione, rispetto a tutti i punti X , degli spazi tangenti $T_X M$ (cioè l'insieme delle coppie (X, V) con $X \in M, V \in T_X M$) viene detto **spazio degli stati**, e geometricamente **fibrato tangente di M** .

Il moto del sistema è ora regolato dal sistema delle equazioni di Newton (o Newton-d'Alembert)

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1^{(v)} \\ \dots \\ m_N \mathbf{a}_N = \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_N^{(v)} \end{cases} \quad (1.5.21)$$

dove $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N$ sono le forze attive agenti sui vari punti e $\mathbf{F}_1^{(v)}, \dots, \mathbf{F}_N^{(v)}$ le corrispondenti reazioni vincolari (incognite). Ammetteremo che la idealità o perfezione dei vincoli sia espressa da una condizione formalmente analoga a quella del caso di un punto su una superficie; la motivazione fisica verrà illustrata più sotto. Introdotto dunque il vettore rappresentativo delle reazioni vincolari

$$F^{(v)} = (\mathbf{F}_1^{(v)}, \dots, \mathbf{F}_N^{(v)}) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad (1.5.22)$$

e ricordando che i vettori coordinati $\frac{\partial X}{\partial q_i}$ ($i = 1, \dots, n$) sono tangenti alla superficie M , la condizione di perfezione dei vincoli si esprime dunque nella forma

$$F^{(v)} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.5.23)$$

Conviene ora introdurre altri vettori dello spazio ambiente \mathbb{R}^{3N} , ovvero il vettore rappresentativo delle forze

$$F = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad (1.5.24)$$

e il vettore P rappresentativo delle quantità di moto ⁶⁹

ortogonali solidali con il corpo, aventi origine nel punto scelto. La trattazione del moto del corpo rigido è svolta in un altro capitolo.

⁶⁹Sarebbe forse più spontaneo introdurre i vettori delle velocità e delle accelerazioni, ma conviene introdurre P a causa del fatto che ogni particella ha massa a priori diversa dalle altre.

$$P = (m_1 \mathbf{v}_1, \dots, m_N \mathbf{v}_N) = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \in \mathbb{R}^{3N}. \quad (1.5.25)$$

La notazione è un poco infelice, perché il simbolo P , che associamo a un vettore in \mathbb{R}^{3N} , ricorderebbe un punto piuttosto che un vettore. Ma il simbolo \mathbf{p} è già impegnato per il vettore (in \mathbb{R}^3) quantità di moto totale del sistema, definito da $\mathbf{p} = m_1 \mathbf{v}_1 + \dots + m_N \mathbf{v}_N$.

Con l'introduzione di tali vettori, il sistema delle equazioni di Newton (1.5.21) prende la forma di una equazione vettoriale nello spazio ambiente \mathbb{R}^{3N} analoga all'equazione di Newton $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{(v)}$ nello spazio ordinario \mathbb{R}^3 , precisamente

$$\dot{P} = F + F^{(v)}. \quad (1.5.26)$$

Da questa, per la perfezione del vincolo espressa dalla (1.5.23), si ottengono n equazioni "pure" (in cui cioè è scomparsa la reazione vincolare $F^{(v)}$) moltiplicando scalarmente per $\frac{\partial X}{\partial q_i}$:

$$\dot{P} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = F \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.5.27)$$

Vale ancora la formula del binomio lagrangiano (1.4.12) opportunamente generalizzata. Ovvero, per la (1.4.12) applicata ad ogni singolo punto, si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{p}}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} \\ \dots \\ \dot{\mathbf{p}}_N \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_N}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_N}{\partial q_i} \end{array} \right., \quad (1.5.28)$$

dove $T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2, \dots, T_N = \frac{1}{2} m_N v_N^2$ sono le energie cinetiche dei singoli punti. Dunque, essendo

$$\dot{P} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = \dot{\mathbf{p}}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial q_i} + \dots + \dot{\mathbf{p}}_N \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial q_i}, \quad (1.5.29)$$

si trova la formula generalizzata del binomio lagrangiano

$$\dot{P} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad (1.5.30)$$

dove

$$T = T_1 + \dots + T_N \quad (1.5.31)$$

è l'energia cinetica totale del sistema. Infine, se le forze derivano da potenziale, cioè se esiste $V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ tale che $\mathbf{F}_1 = -\text{grad}_1 V \equiv -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_1}, \dots, \mathbf{F}_N = -\text{grad}_N V \equiv -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_N}$, otteniamo

$$F \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (1.5.32)$$

e quindi valgono ancora le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.5.33)$$

con $L = T - V$ dove ora $T = T_1 + \dots + T_N$ è l'energia cinetica totale del sistema.

Possiamo quindi enunciare il

Teorema 2 *Per un sistema di N punti con vincoli perfetti, in una carta locale con coordinate $q = (q_1, \dots, q_n)$, i movimenti $q = q(t)$ sulla carta corrispondenti alle soluzioni del sistema di equazioni di Newton-d'Alembert $m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\text{grad}_1 V + \mathbf{F}_1^{(v)}$, \dots , $m_N \ddot{\mathbf{x}}_N = -\text{grad}_N V + \mathbf{F}_N^{(v)}$ sono soluzioni delle equazioni di Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.5.34)$$

in termini della lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ definita da $L = T - V$, dove $T = (1/2)(m_1 v_1^2 + \dots + m_N v_N^2)$ è l'energia cinetica totale del sistema e V la sua energia potenziale.

□

Resta da commentare la condizione di perfezione del vincolo espressa nella forma matematica (1.5.23), ovvero la condizione che il vettore $F^{(v)} = (\mathbf{F}^{(v)}_1, \dots, \mathbf{F}^{(v)}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, rappresentativo delle reazioni vincolari, sia ortogonale alla superficie delle configurazioni. Tale condizione si comprende meglio quando essa venga espressa in termini di lavoro totale delle reazioni vincolari. Infatti, ricordando che gli spostamenti infinitesimi compatibili con i vincoli si esprimono nella forma

$$dX = \frac{\partial X}{\partial q} dq \quad (\equiv \sum_1 \frac{\partial X}{\partial q_i} dq_i),$$

si ottiene l'espressione del lavoro totale elementare delle reazioni vincolari

$$\delta W = \mathbf{F}_1^{(v)} \cdot d\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{F}_N^{(v)} \cdot d\mathbf{x}_N = F^{(v)} \cdot dX,$$

e si osserva che esso si esprime nella forma

$$\delta W = F^{(v)} \cdot \frac{\partial X}{\partial q} dq \quad (\equiv \sum_i \left(F^{(v)} \cdot \frac{\partial X}{\partial q_i} \right) dq_i).$$

Questa espressione mostra che la condizione geometrica (1.5.23) di perfezione del vincolo è equivalente alla condizione che sia nullo il lavoro totale delle reazioni vincolari per ogni spostamento compatibile con il vincolo.

Diamo due significativi esempi. Il primo è quello di un sistema di due punti vincolati a restare a distanza fissata (come in un cristallo): come modello meccanico si pensi a due punti disposti agli estremi di un'asta di massa trascurabile. Si può pensare che le reazioni vincolari $\mathbf{F}^{(v)}_1, \mathbf{F}^{(v)}_2$ siano dirette come l'asta che congiunge i punti, ma sia poi $\mathbf{F}^{(v)}_2 = -\mathbf{F}^{(v)}_1$, per il principio di azione e reazione. E' facile vedere che per spostamenti generici compatibili con i vincoli le singole reazioni vincolari compiono lavoro non nullo, mentre è nullo il lavoro totale.⁷⁰

L'altro esempio è quello di un disco che rotola senza strisciare lungo una guida. E' questo un esempio di vincolo perfettamente scabro, anziché perfettamente liscio. In tal caso, come ben sanno gli automobilisti che devono fare partire una macchina su una superficie ghiacciata, la reazione vincolare $\mathbf{F}^{(v)}$ ha anche una componente tangente alla superficie.⁷¹ Il lavoro è però nullo, perchè la forza $\mathbf{F}^{(v)}$ è applicata ad un punto che non scorre, cioè ha istantaneamente velocità nulla.

1.6 Il teorema dell'energia generalizzata (o di Jacobi)

Il teorema dell'energia (in realtà, una sua generalizzazione) si ottiene in ambito lagrangiano con un procedimento che è una naturale generalizzazione di quello familiare della meccanica elementare. Si noti che una simile generalizzazione viene compiuta anche nel caso dell'equazione delle onde di d'Alembert, e in generale nella teoria dei campi, con un procedimento che porta a definire il tensore energia-impulso⁷².

Nel caso di un solo punto si considera l'equazione di Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ e la si moltiplica scalarmente per la velocità \mathbf{v} ; si osserva $\mathbf{v} \cdot m\mathbf{a} = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2}mv^2 = \dot{T}$ e si ha dunque $\dot{T} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Se poi \mathbf{F} deriva da un potenziale, $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, si ha anche⁷³ $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\dot{V}$ e dunque $\frac{d}{dt}(T + V) = 0$. Risulta allora spontaneo definire

⁷⁰Dalla formula generale per le velocità dei punti di un corpo rigido, si dimostra che il lavoro totale si esprime mediante il risultante e il momento risultante delle forze, che sono entrambi nulli per forze mutue che soddisfino il principio di azione e reazione e siano dirette lungo la linea congiungente i punti.

⁷¹Il fatto è che la componente tangenziale è proporzionale alla componente normale, e quindi per aumentare la componente tangenziale è conveniente aumentare quella normale, ad esempio facendo sedere delle persone sulla carrozzeria in corrispondenza delle ruote traenti. Sullo stesso principio si basa il rocciatore, che resta in equilibrio spingendo i piedi contro la parete, e quindi allontana la parte centrale del corpo dalla parete, anziché tenerla aderente.

⁷²Si veda D. Landau S. Lifshitz, Teoria dei campi.

⁷³Si fa uso qui di una delle formule impiegate infinite colte in queste note, ovvero la

l'energia $E = T + V$ e si ha il teorema di conservazione dell'energia $\dot{E} = 0$. Per quanto riguarda l'identità $\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} v^2$, si osservi come essa può essere pensata ottenuta dalla formula di integrazione per parti $f dg = d(fg) - gdf$ (in questo caso, si ha $f = g$).

Applichiamo l'analogo procedimento nel caso dell'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad (1.6.1)$$

ovvero, in componenti,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.6.2)$$

Moltiplichiamo quindi la (1.6.1) per \dot{q} (o equivalentemente, moltiplichiamo la (1.6.2) per \dot{q}_i e poi sommiamo sull'indice di componente i , come si fa per i prodotti scalari), sicché otteniamo

$$\dot{q} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \dot{q}. \quad (1.6.3)$$

Dalla formula di integrazione per parti

$$\dot{q} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \quad (1.6.4)$$

abbiamo allora

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}. \quad (1.6.5)$$

D'altra parte, per il teorema di derivata di funzione composta (si ricordi che si pensa di seguire un movimento $q = q(t)$ sicché anche $\dot{q} = \dot{q}(t)$ è una funzione nota del tempo, e $L = L(q(t), \dot{q}(t))$) si ha

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q}, \quad (1.6.6)$$

sicché la relazione (1.6.5) diventa

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{dL}{dt}. \quad (1.6.7)$$

In conclusione si ottiene la legge di conservazione

formula di derivat di funzione composta. Se $V = V(\mathbf{x})$ e $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, si considera la funzione composta $V(\mathbf{x}(t))$ e si ha

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \equiv \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} v_i \equiv \mathbf{v} \cdot \text{grad } V.$$

$$\dot{\mathcal{E}} = 0 , \quad (1.6.8)$$

dove si è introdotta l'energia generalizzata

$$\mathcal{E} := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L . \quad (1.6.9)$$

E' consueto dare il nome p alla quantità $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ e chiamarla *momento coniugato alla q* :

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad (\text{ovvero } p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , i = 1, \dots, n) , \quad (1.6.10)$$

sicché l'energia generalizzata $\mathcal{E}(q, \dot{q})$ assume la forma

$$\mathcal{E} = p\dot{q} - L \quad (\equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L) . \quad (1.6.11)$$

Una ulteriore generalizzazione si ha considerando il caso in cui la lagrangiana possa dipendere esplicitamente dal tempo (ciò avviene in generale nel caso di funzioni di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t)$) dipendenti esplicitamente dal tempo – vincoli mobili o passaggio a sistemi di riferimento non inerziali – oppure quando l'energia potenziale V dipende esplicitamente dal tempo). In tal caso, essendo $L = L(q, \dot{q}, t)$, pensando ancora a un movimento assegnato, sicché $q = q(t)$, $\dot{q} = \dot{q}(t)$, si ha in luogo della (1.6.6) la relazione

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} ; \quad (1.6.12)$$

quindi il secondo membro della (1.6.5) prende la forma

$$\frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t} , \quad (1.6.13)$$

e pertanto il teorema dell'energia generalizzata assume la forma

$$\dot{\mathcal{E}} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (1.6.14)$$

Abbiamo dunque dimostrato il seguente

Teorema 3 (dell'energia generalizzata, o di Jacobi.) *Per un sistema lagrangiano con lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ in una assegnata carta, per ogni movimento $q = q(t)$ soddisfacente le equazioni di Lagrange $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ si ha*

$$\dot{\mathcal{E}} = - \frac{\partial L}{\partial t} , \quad (1.6.15)$$

dove $\mathcal{E} = \mathcal{E}(q, \dot{q}, t)$ è l'energia generalizzata definita da

$$\mathcal{E} := p\dot{q} - L \quad \left(p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right). \quad (1.6.16)$$

In particolare, se la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ (ovvero, se la lagrangiana è invariante – o simmetrica – per traslazioni temporali), allora l'energia generalizzata \mathcal{E} è una costante del moto (integrale di Jacobi), ovvero si ha $\dot{\mathcal{E}} = 0$.

□

È di notevole interesse osservare che nella deduzione del teorema non si è fatto alcun uso della particolare forma che la lagrangiana L ha nei sistemi classici naturali, ovvero $L = T - V$ dove T è l'energia cinetica e V l'energia potenziale, ma si è usata solo la struttura della equazione di Lagrange con una lagrangiana arbitraria. Ciò è fondamentale in relatività, dove, come vedremo in un prossimo capitolo, per la particella libera la lagrangiana non coincide affatto con l'energia cinetica. L'energia verrà allora definita proprio come l'energia generalizzata \mathcal{E} , che potrà essere calcolata a partire dalla lagrangiana. La scelta della lagrangiana, a sua volta, verrà motivata con argomenti indipendenti, legati alla geometrizzazione dello spaziotempo connessa al principio di costanza della velocità della luce.

Limitiamoci ora al caso della meccanica classica (nonrelativistica), in cui la lagrangiana ha la forma naturale

$$L = T - V, \quad (1.6.17)$$

dove l'energia cinetica $T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \dots + \frac{1}{2}m_Nv_N^2$ è espressa nella carta considerata in funzione delle variabili q, \dot{q}, t . Come osservato nel paragrafo precedente, l'energia cinetica si presenta allora come una forma quadratica non omogenea (si vedano le (1.5.16, 1.5.17)⁷⁴ nelle variabili \dot{q} :

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (1.6.18)$$

$$T_2 = \sum_{i,k} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad T_1 = \sum_i b_i\dot{q}_i, \quad T_0 = c \quad (1.6.19)$$

dove i coefficienti $a_{i,k}$, b_i , c sono funzioni note di q, t , con

$$\det a_{ik} \neq 0.$$

⁷⁴Consideriamo il caso di un solo punto (la generalizzazione è poi ovvia). Basta ricordare la formula generale di immersione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q, t)$, sicché si ha $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$.

Ora, nella definizione dell'energia generalizzata \mathcal{E} appare la formazione $p\dot{q}$, ovvero $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q}$, e allora, per il celebre teorema di Eulero sulle funzioni omogenee⁷⁵, dalla (1.6.18) segue

$$p\dot{q} = 2T_2 + T_1 . \quad (1.6.20)$$

Dunque nel caso di lagrangiana naturale (1.6.17), (1.6.18), in virtù della (1.6.20) si ha

$$\mathcal{E} = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$$

e pertanto abbiamo dimostrato la

Proposizione 2 *Nei sistemi lagrangiani naturali con $L = T - V$, dove $T = T_2 + T_1 + T_0$ come definito sopra, l'energia generalizzata $\mathcal{E} = p\dot{q} - L$ assume la forma*

$$\mathcal{E} = T_2 + V^* , \quad V^* = V - T_0 . \quad (1.6.21)$$

In particolare, nel caso di funzioni di immersione indipendenti dal tempo, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(q), \dots, \mathbf{x}_N = \mathbf{x}_N(q)$, in cui si ha dunque $T = T_2$, l'energia generalizzata \mathcal{E} coincide con l'energia meccanica $\mathcal{E} = E := T + V$.

Quindi, nella stragrande maggioranza dei casi significativi l'energia generalizzata \mathcal{E} coincide con l'energia meccanica $E = T + V$. Come esempio di non coincidenza, $\mathcal{E} \neq E$, si può riconsiderare il caso del moto di un punto su un'asta che ruota di moto assegnato uniforme in un piano orizzontale (esempio d4 del paragrafo 3). In tal caso la formula di immersione (nel piano) dipende parametricamente dal tempo, perché è data da $x = r \cos \omega t$, $y = r \sin \omega t$, e nell'energia cinetica $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$ si riconosce $T = T_2 + T_0$ con $T_2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$, $T_0 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$. Si ha dunque l'energia generalizzata nella forma $\mathcal{E} = T_2 + V^*$ con $V^* = V - T_0 = V - \frac{1}{2}mr^2\omega^2$, che nel paragrafo 2 era stata ottenuta in maniera diretta attraverso l'equazione di moto.

1.7 I punti di equilibrio

Nell'evoluzione storica della meccanica svolse un ruolo fondamentale il cosiddetto "principio dei lavori virtuali", che cercheremo di illustrare in un

⁷⁵Per chi non ricordasse il teorema di Eulero, rammentiamolo nel caso di una sola variabile indipendente (la generalizzazione è ovvia): se $f(x) = x^2$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}x = 2x^2 \equiv 2f$; se $f(x) = x$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}x = x = f$; in generale, se $f(x) = x^n$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}x = nx^n \equiv nf$. Dunque, se $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = f_2 + f_1 + f_0$, allora $\frac{\partial f}{\partial x}x = 2\alpha x^2 + \beta x = 2f_2 + f_1$.

prossimo paragrafo. Tale principio riguardava la caratterizzazione dei punti di equilibrio di un sistema meccanico, e nel presente paragrafo ci limitiamo al problema analitico di caratterizzare i punti di equilibrio di un sistema dinamico lagrangiano.

La trattazione più significativa si compie nel caso particolare (ma ugualmente molto generale) del caso di un “sistema naturale indipendente dal tempo”, in cui cioè gli eventuali vincoli sono indipendenti dal tempo, come anche l’energia potenziale. In tal caso la lagrangiana ha la forma

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{ik} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - V(q) . \quad (1.7.1)$$

Ricerchiamo se esista una soluzione particolare di equilibrio, ovvero una soluzione $q(t) = q^*$ (ovvero $q_1(t) = q_1^*, \dots, q_n(t) = q_n^*$), dove q_i^* sono delle costanti. Naturalmente, ciò comporta $\dot{q} = \ddot{q} = 0$.

Si ha allora la

Proposizione 3 *Per un sistema lagrangiano “naturale indipendente dal tempo”, con lagrangiana (1.7.1), i punti q^* di equilibrio sono i punti stazionari (o critici) dell’energia potenziale, cioè i punti per cui*

$$\frac{\partial V}{\partial q_i}(q^*) = 0 , \quad (i = 1, \dots, n) .$$

Dimostrazione. La dimostrazione è banalissima. Si ricordi che le equazioni di Lagrange si scrivono anche nella forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i} , \quad (i = 1 \dots n) ,$$

e si osserva che nei punti di equilibrio il primo membro è nullo. Ciò è dovuto al fatto che per una soluzione di equilibrio è nulla l’accelerazione di tutti i punti materiali costituenti il sistema, $\mathbf{a}_k = 0$, ($k = 1, \dots, N$), e d’altra parte si ha la formula del binomio lagrangiano

$$m_k \mathbf{a}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_k}{\partial q_i}$$

(per semplicità si può pensare al caso $N = 1$; la dimostrazione si generalizza immediatamente al caso di N generico). Questa proprietà può essere verificata direttamente anche dalle equazioni di Lagrange.⁷⁶ **Q.E.D.**

⁷⁶Per semplicità di notazione, consideriamo il caso di un solo punto, con una sola coordinata libera. Si ha allora

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{d}{dt} (2a(q)\dot{q}) = 2a(q)\ddot{q} + 2a'(q)\dot{q}^2 = 0$$

se $\dot{q} = \ddot{q} = 0$.

In un altro capitolo delle note discuteremo la stabilità dei punti di equilibrio. Introdotta in una maniera alquanto naturale la definizione di stabilità, vedremo che sono stabili i punti di equilibrio in cui l'energia potenziale è un minimo, instabili gli altri.

1.8 Alcuni esempi

Riportiamo qui alcuni esempi di discussione delle equazioni di Lagrange per sistemi ad uno o due gradi di libertà. Quando, nel caso di due gradi di libertà, sarà possibile ridursi ad un problema “fittizio” a un grado di libertà, daremo la corrispondente “energia monodimensionale”, la quale ci permetterà poi di fornire una descrizione qualitativa del moto con la tecnica del “ritratto in fase”.

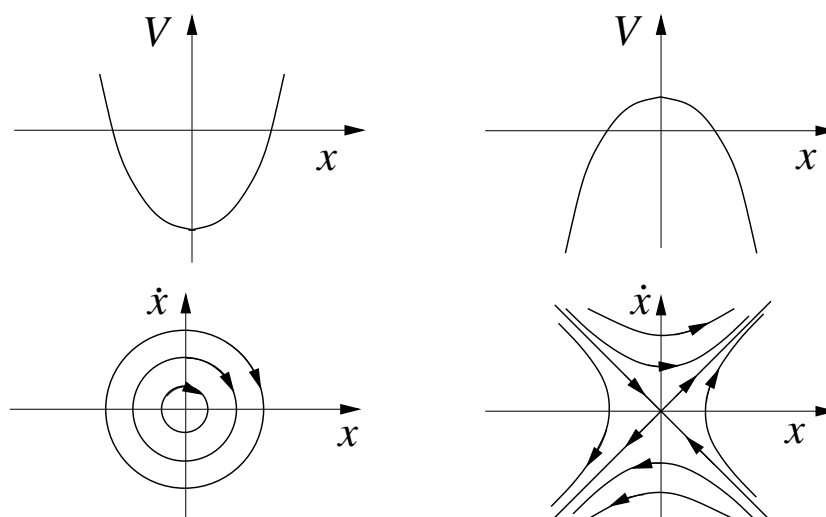


Figura 1.5: Esempi di energia potenziale e ritratto in fase: a sinistra, l'oscillatore armonico (caso del centro), a destra il repulsore lineare (sella o colle)

Un richiamo di tipo tecnico: descrizione qualitativa del moto per sistemi monodimensionali; il ritratto in fase. Ricordiamo che, per un sistema a un grado di libertà con coordinata x ed energia $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$, per ogni fissato valore E_0 dell'energia sono ammissibili solo quelle coordinate x per cui l'energia potenziale è minore o uguale di E_0 (perché l'energia cinetica è nonnegativa), ovvero sono ammissibili solo i punti dell'insieme $I_{E_0} := \{x \in \mathbb{R} : V(x) \leq E_0\}$. Dato poi un punto $x \in I_{E_0}$, anche la velocità \dot{x} è conosciuta (a meno del segno) perché $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E_0 - V(x)$. In tal modo è possibile, per ogni valore E_0 (nel codominio della funzione $E(x, \dot{x})$), tracciare la corrispondente curva di livello dell'energia, ovvero la

curva nel piano degli stati (x, \dot{x}) tale che $E(x, \dot{x}) = E_0$. La figura che si ottiene nel piano (x, \dot{x}) tracciando le più significative di tali curve viene chiamata *ritratto in fase* (ingl. *phase portrait*). Ad ognuna di tali curve si assegna anche una orientazione (cioè una freccia) con la ovvia regola: nel semipiano positivo superiore freccia a destra (infatti per definizione nel semipiano superiore si ha $\dot{x} > 0$, cioè la funzione $x = x(t)$ è crescente e quindi ci si muove verso destra), mentre nel semipiano inferiore ci si muove verso sinistra, e dunque freccia a sinistra.

Inoltre, come abbiamo visto, i punti di stazionarietà di V , ovvero i punti in cui $\frac{dV}{dx} = 0$, sono punti di equilibrio:⁷⁷ i minimi sono punti di equilibrio stabile, localmente assimilabili all'oscillatore armonico ($\ddot{x} = -\omega^2 x$), mentre i massimi sono punti di equilibrio instabile, localmente assimilabili al repulsore lineare ($\ddot{x} = +\omega^2 x$). I corrispondenti ritratti in fase (figura 1.5) si dicono rispettivamente (con una terminologia risalente alla tesi di Poincaré) *centro* e *sella* (o colle). Dai punti sella escono le *separatrici* che hanno un ruolo essenziale nel definire il ritratto in fase. Ponendo per comodità $\omega^2 = 1$, nel caso dell'oscillatore armonico (centro) si ha $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2)$ e le linee di livello sono cerchi. Per il repulsore lineare⁷⁸ si ha $E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - x^2)$ e le generiche linee di livello (per $E_0 \neq 0$) sono iperboli, mentre per $E_0 = 0$ si hanno le separatrici, coincidenti con le bisettrici $\dot{x} = \pm x$ (si deve pensare a quattro rami, che sono le semibisettrici escludenti l'origine, perché l'origine $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ corrisponde alla soluzione particolare $x(t) = 0$).

Il repulsore lineare è il prototipo di un potenziale che presenta un massimo (*barriera di potenziale*), mentre l'oscillatore armonico è il prototipo della *bucca di potenziale*. Infatti, sviluppando in serie l'energia potenziale attorno a un punto stazionario \bar{x} (con $V'(\bar{x}) = 0$), si ha, all'ordine più basso,

$$V(x) = V(x^*) + \frac{1}{2}V''(x^*)(x - x^*)^2 + \dots ,$$

e quindi, ponendo per semplicità di notazione $x^* = 0$, si ha un oscillatore armonico se $V''(x^*) > 0$, un repulsore lineare se $V''(x^*) < 0$.

⁷⁷Ricordiamo comunque questo fatto. Per l'equazione $m\ddot{x} = F(x)$ si dice **soluzione di equilibrio** una soluzione del tipo $x(t) = x^*$ (= costante). Si ha allora necessariamente $F(x^*) = 0$, ovvero x^* è punto di stazionarietà dell'energia potenziale:

$$\frac{dV}{dx}(x^*) = 0 .$$

Nel piano degli stati, o piano delle fasi, con coordinate (x, \dot{x}) , l'orbita del corrispondente movimento $x(t) = x^*, \dot{x}(t) = 0$ si riduce allora a un solo punto, sull'asse delle x , il punto $(x^*, 0)$.

⁷⁸Nel caso del repulsore lineare, $\ddot{x} = x$, ovvero $\dot{x} = v, \dot{v} = x$, la discussione si compie meglio passando alle coordinate $\xi = x+v$ (pronuncia csi), $\eta = x-v$ (pronuncia eta) (i nuovi assi sono ruotati di 45 gradi rispetto agli assi originali) perché il sistema si disaccoppia e diventa $\dot{\xi} = \xi, \dot{\eta} = -\eta$, con soluzioni $\xi(t) = \xi_0 e^t, \eta(t) = \eta_0 e^{-t}$, e le soluzioni con dati iniziali $(\xi_0, \eta_0) = (1, 0)$ oppure $(-1, 0)$, oppure $(0, 1)$, oppure $(0, -1)$ forniscono le quattro separatrici. Nel piano (ξ, η) le linee di livello sono le iperboli $\xi\eta = E_0$.

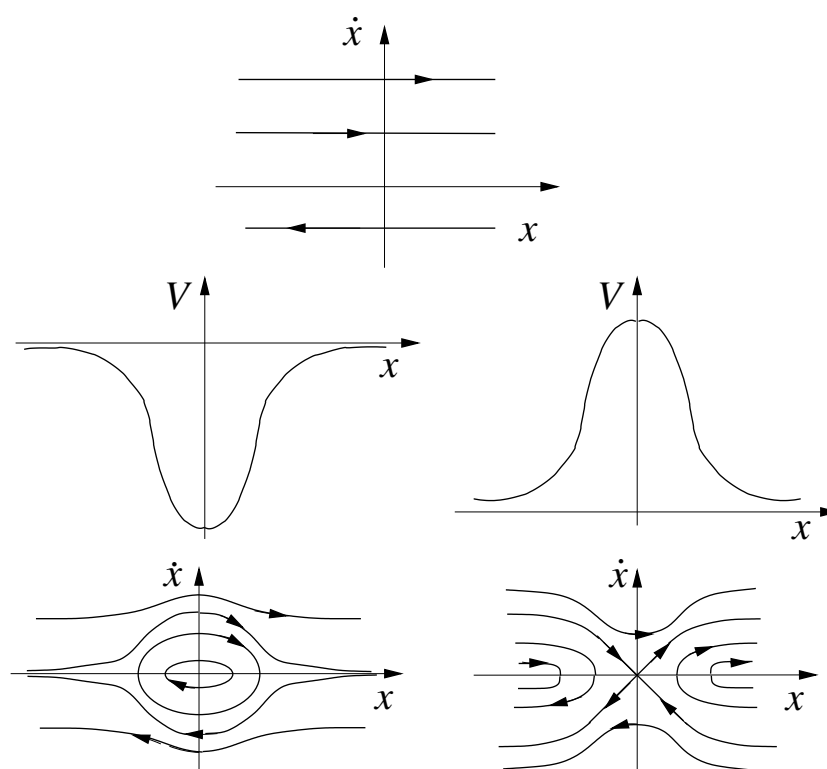


Figura 1.6: Particella libera (in alto), buca di potenziale (a sinistra) e barriera di potenziale (a destra)

Nei casi dell'oscillatore armonico e del repulsore lineare si hanno potenziali divergenti all'infinito. Si tratta però di casi eccezionali, perché tipicamente i potenziali di interesse fisico si annullano all'infinito, sicché a grande distanza la particella si muove come una *particella libera*. E' dunque importante avere presente anzitutto il ritratto in fase della particella libera (figura 1.6, in alto). Si ha in tal caso $V = 0$, $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, e le linee di livello dell'energia sono le rette $\dot{x} = \text{cost}$. Si noti che si tratta di un caso eccezionale (caso parabolico), perché presenta un *continuo di punti di equilibrio*, ovvero l'asse $\dot{x} = 0$, mentre genericamente i punti di equilibrio sono isolati.

Si deve pertanto pensare all'oscillatore armonico come alla descrizione locale di una *buca di potenziale* (figura 1.6, a sinistra), e al repulsore lineare come alla descrizione locale di una *barriera di potenziale* (figura 1.6, a destra). Nel caso della barriera di potenziale, si osservi come per energie minori del massimo di V si ha *riflessione*, mentre per energie maggiori del massimo di V si ha *trasmissione* (superamento della barriera), e infine a grandi distanze (dalla barriera o dalla buca) il moto tende a diventare uniforme ($\dot{x} = \text{cost}$, come anche nel caso della particella libera).

Nota: Utilizzazione analitica del teorema dell'energia per un sistema a un grado di libertà. Per un sistema a un grado di libertà (pensiamo tipicamente al caso di un punto su una retta), il teorema dell'energia permette di ricondurre la ricerca della soluzione analitica $x = x(t)$ "alle quadrature", ovvero al calcolo di un integrale, più una inversione. Infatti, dal teorema di conservazione dell'energia per un fissato valore E_0 dell'energia, $(m/2)(\dot{x}^2 + V(x)) = E_0$, si trova

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x))} .$$

Allora, i punti x^* in cui si annulla il secondo membro determinano i punti di equilibrio. Invece, in un aperto tra due punti di equilibrio, essendo $\dot{x} \neq 0$, la funzione $x = x(t)$ risulta invertibile, e risulta definita la funzione inversa $t = t(x)$ (tempo richiesto per giungere al punto x , partendo da un arbitrario punto x_0). Per il teorema della funzione inversa, è nota allora la derivata

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}},$$

e si ha, integrando,

$$t(x) - t(x_0) = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - V(x))}} .$$

Infine il movimento $x = x(t)$ si ottiene dalla funzione $t = t(x)$ con una inversione (quando se ne è capaci).

Dopo questi richiami sui ritratti in fase in problemi a un grado di libertà, veniamo ad alcuni esempi significativi.

a) Il moto centrale

Il caso del moto centrale è già stato discusso. Ci si mette nel piano passante per il centro delle forze e perpendicolare al vettore momento angolare \mathbf{L} (costante). Si riferisce il piano a coordinate polari r, φ , e si ha una energia potenziale $V = V(r)$. Dunque

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r) , \quad (1.8.1)$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) . \quad (1.8.2)$$

Si ha invarianza per rotazione, $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$, e dunque l'intensità l del momento angolare (momento $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ coniugato a φ) è una costante del moto

$$mr^2\dot{\varphi} = l_0 . \quad (1.8.3)$$

L'equazione in r può essere sostituita dall'integrale dell'energia. Si hanno dunque le due equazioni del primo ordine

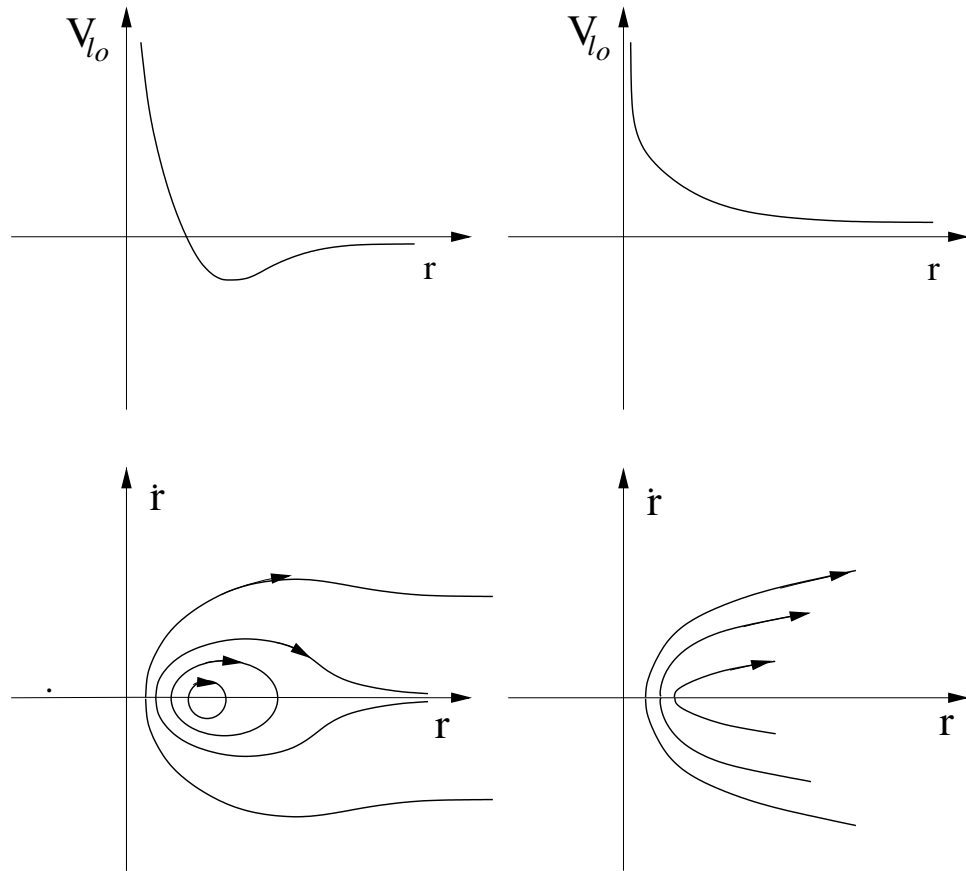


Figura 1.7: Potenziale efficace e ritratto in fase nei casi attrattivo (sinistra) e repulsivo (destra)

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E_0, \quad mr^2\dot{\varphi} = l_0,$$

dipendenti parametricamente dai valori E_0 dell'energia e l_0 dell'intensità del momento angolare, fissati dalle condizioni iniziali.

Sostituendo la seconda nella prima, ci si riduce in tal modo a un sistema fittizio monodimensionale (o meglio, su una semiretta, perché si ha $r > 0$), con energia

$$E(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{l_0}^*(r), \quad V_{l_0}^*(r) = V(r) + \frac{l_0^2}{2mr^2}. \quad (1.8.4)$$

Quando lo studio del moto monodimensionale abbia fornito il moto $r = r(t)$, allora dalla conservazione del momento angolare (1.8.3) si ottiene la legge $\varphi = \varphi(t)$ per banale integrazione:

$$\dot{\varphi} = \frac{l_0}{mr^2(t)} \equiv g(t) \quad (1.8.5)$$

con una certa funzione $g = g(t)$ assegnata. Dunque $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t g(s)ds$. Naturalmente, consideriamo qui il caso generale in cui sia $l_0 \neq 0$, perché altrimenti si ha $\dot{\varphi} = 0$, ovvero $\varphi(t) = \varphi_0$, e il moto è veramente monodimensionale; nel caso di potenziale $V(r)$ attrattivo, il punto (nel piano) cade sull'origine lungo una retta. Così farebbe anche la Luna rispetto alla Terra, se le condizioni iniziali non le avessero assegnato un momento angolare $l_0 \neq 0$ (cioè una velocità trasversa non nulla) che le impedisce di cadere. Formalmente ciò avviene perché il termine di energia cinetica $\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$ agisce, nel moto fittizio monodimensionalmente, come una barriera di potenziale di altezza infinita, che impedisce la caduta. Nel caso particolare in cui nel moto fittizio monodimensionale si abbia un punto \bar{r} di equilibrio, il corrispondente moto nel piano è circolare uniforme.

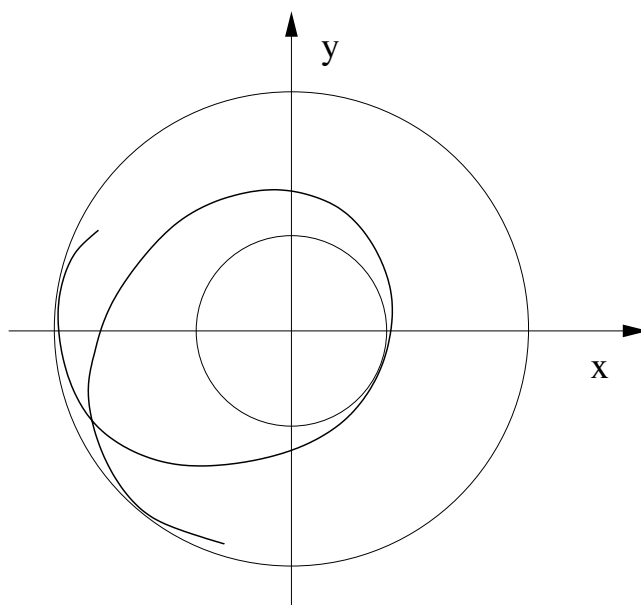


Figura 1.8: Caso attrattivo: traiettoria nel piano (x, y) , e fenomeno della precessione

Si danno due casi particolarmente significativi per il potenziale “vero” $V(r)$: caso *attrattivo* (prototipo $V(r) = -\frac{k}{r}$, $k > 0$, ovvero caso kepleriano, oppure coulombiano con cariche di segno opposto), e caso *repulsivo* (prototipo $V(r) = +\frac{k}{r}$, $k > 0$, ovvero caso coulombiano con cariche di segno uguale). Il potenziale “efficace” $V_{l_0}^*(r)$ dato dalla (1.8.4) ha aspetto ben differente in

tali due casi (figura 1.7, in alto). Infatti, in entrambi i casi si ha nell'origine una barriera infinita; ma poi, mentre nel caso repulsivo la barriera decresce continuamente al crescere di r , nel caso attrattivo si presenta invece una buca di potenziale. Questi fatti si stabiliscono con uno studio elementare delle funzioni, confrontando gli ordini di infinito dei termini in gioco.

I ritratti in fase del corrispondente sistema fittizio monodimensionale sono illustrati in figura 1.7 in basso, insieme con i rispettivi potenziali efficaci (in alto). Nel caso attrattivo, per $E_0 < 0$ si hanno *stati legati* (moto confinato), mentre per $E_0 > 0$ si hanno *stati d'urto o di scattering*; per $E_0 = 0$ si ha la separatrice, in corrispondenza della quale si ha $\dot{r} \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$. Se si passa alla descrizione nel piano "fisico" (figura 1.8), nel caso attrattivo i moti corrispondenti a stati legati per un fissato valore $E_0 < 0$ (avendo preliminarmente fissato $l_0 \neq 0$), si svolgono in una corona circolare con due raggi minimo e massimo. In particolare, la corona circolare si riduce a una circonferenza in corrispondenza del raggio in cui il potenziale efficace presenta un minimo. Come già osservato, in tal caso il moto è anche uniforme.

Nello specialissimo caso con $V = -k/r$ si mostra, con un altro argomento, che per energia negativa le orbite si chiudono (e sono ellissi), altrimenti si ha il famoso fenomeno della precessione. Sempre nel caso $V = -k/r$, con un calcolo diretto (si veda un'altra parte delle dispense) si mostra che per energia negativa, nulla o positiva le traiettorie sono rispettivamente ellissi, parabole e iperboli (dunque, qualunque sia l'energia, si hanno delle coniche).

b) Il pendolo semplice ed il pendolo sferico

Per il *pendolo semplice* su un cerchio di raggio R (figura 1.9) abbiamo già visto che, se φ è l'angolo contato a partire dalla verticale discendente, la lagrangiana (divisa per mR^2) è data da $L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \cos \varphi$, con $\omega^2 = g/R$, e l'energia E (divisa per mR^2) è data dunque da

$$E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi . \quad (1.8.6)$$

Nel ritratto in fase si riconoscono i due punti di equilibrio: quello in $\varphi = 0$, e quello in $\varphi = \pi$ (equivalente a $\varphi = -\pi$), rispettivamente stabile e instabile, con il corrispondente centro e la corrispondente sella. Si hanno le cosiddette *librazioni* (da latino *libra* = bilancia) cioè le oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile, le cosiddette *rotazioni*, in verso positivo o negativo, e inoltre le due separatrici.

Per il *pendolo sferico* (punto pesante su una sfera liscia di raggio R) basta considerare le coordinate polari ρ, θ, φ nello spazio e imporre il vincolo $\rho = R$ (sicché $\dot{\rho} = 0$) nella nota espressione dell'energia cinetica in coordinate polari (si osservi che l'angolo θ è contato a partire dalla verticale ascendente). Si ha allora la lagrangiana (divisa per mR^2)

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + (\sin^2 \theta)\dot{\varphi}^2) - \omega^2 \cos \theta , \quad (\omega^2 = \frac{g}{R}) , \quad (1.8.7)$$

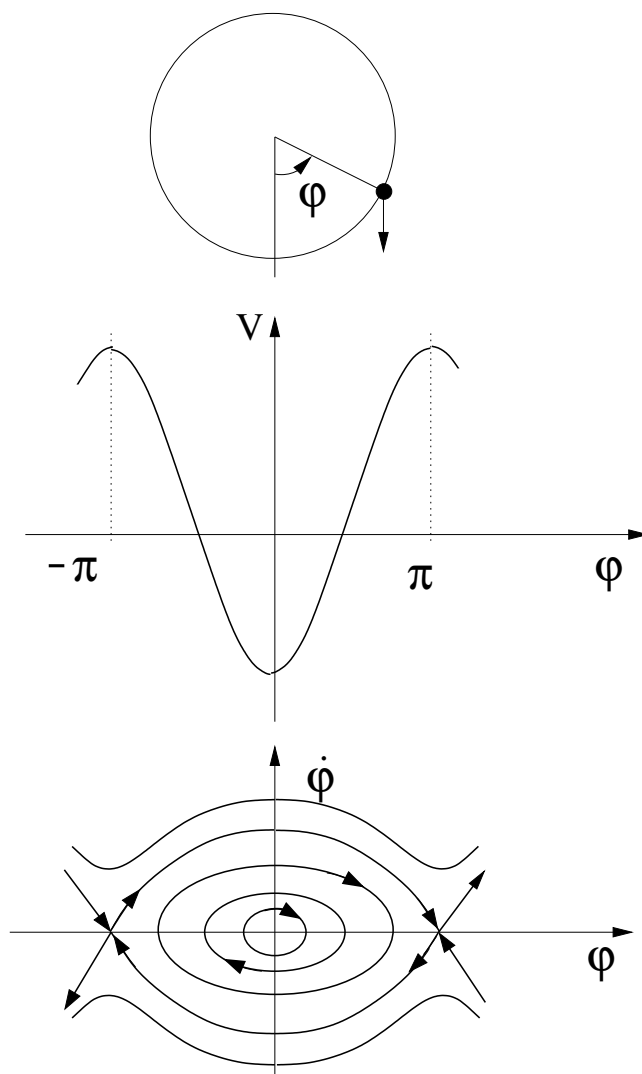


Figura 1.9: Pendolo semplice: spazio delle configurazioni, potenziale e ritratto in fase (dall'alto verso il basso)

con corrispondente energia

$$E = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 + (\sin^2 \theta)\dot{\varphi}^2) + \omega^2 \cos \theta .$$

Segue allora (poiché $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$) la conservazione del momento angolare, che comporta

$$\dot{\varphi} \sin^2 \theta = l_0 , \tag{1.8.8}$$

e ci si riconduce dunque a un sistema fittizio a un grado di libertà con “energia riscalata” (energia/ (mR^2) , che denotiamo ancora con E) data da

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + V_{l_0}^* \quad V_{l_0}^*(\theta) = \frac{l_0^2}{2\sin^2\theta} + \omega^2 \cos\theta . \quad (1.8.9)$$

Si vede dunque che il potenziale efficace (figura 1.10) presenta una buca con due barriere infinite in $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, e si controlla che esso presenta un solo minimo.

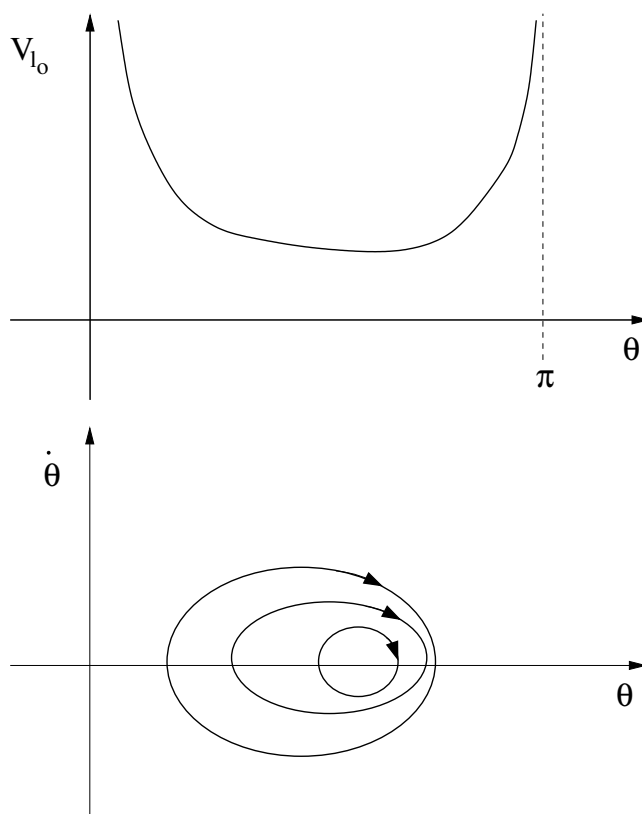


Figura 1.10: Pendolo sferico: potenziale efficace e ritratto in fase

Dunque il ritratto in fase è, qualitativamente, analogo a quello di una buca di potenziale. Si conclude che la presenza di un momento angolare $l_0 \neq 0$ ($\dot{\varphi} \neq 0$) impedisce al punto di cadere sul polo sud.

c) Punto pesante su un cono o su una superficie a simmetria cilindrica

Il caso del cono è già stato trattato nel paragrafo 2. Consideriamo qui il caso generale con superficie

$$z = f(r) \tag{1.8.10}$$

in coordinate cilindriche (ad esempio, $f(r) = \alpha r^2$). Ciò comporta

$$\dot{z} = f'(r)\dot{r} . \tag{1.8.11}$$

Sappiamo che in coordinate cilindriche (r, φ, z) la lagrangiana per il punto privo di vincoli risulta

$$L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz - V(r) ,$$

dove abbiamo anche ammesso la presenza di un potenziale esterno a simmetria cilindrica, ad esempio $V(r) = \frac{1}{2}k(r^2 + z^2)$ nel caso di una molla lineare che attiri il punto verso l'origine. Ma per il vincolo si hanno le (1.8.10), (1.8.11), e dunque abbiamo la lagrangiana (coordinate libere r, φ)

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m [(1 + f'^2(r))\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2] - mgf(r) - V(r) , \tag{1.8.12}$$

con $V(r) = \frac{1}{2}k(r^2 + f^2(r))$. Ancora si ha la conservazione del momento angolare,

$$mr^2\dot{\varphi} = l_0 , \tag{1.8.13}$$

e ci si riduce a un caso monodimensionale con una opportuna energia fittizia:

$$\frac{1}{2}m(1 + f'^2(r))\dot{r}^2 + V_{l_0}^* = E_0 , \tag{1.8.14}$$

$$V_{l_0}^* = V(r) + mgf(r) + \frac{l_0^2}{2mr^2} . \tag{1.8.15}$$

Nella figura 1.11, diamo il potenziale efficace $V_{l_0}^*$ per il caso $f(r) = \alpha r^2$, e tracciamo il corrispondente ritratto in fase. Si noti che il fattore che moltiplica \dot{r}^2 , invece di essere costante (uguale a $\frac{1}{2}m$) dipende ora da r , avendo la forma $\frac{1}{2}(1 + f'^2(r))$, ad esempio $\frac{1}{2}(1 + 4\alpha^2 r^2)$ per $f(r) = \alpha r^2$; ma il ritratto in fase non viene qualitativamente alterato.

Esercizio Studiare il moto per inerzia (cioè in assenza di forze esterne, in particolare in assenza della forza peso) per un punto su un toro bidimensionale⁷⁹. Si studi il moto fittizio monidimensionale (che si ottiene dalla conservazione dell'energia, utilizzando la conservazione della componente verticale del momento angolare) e si descrivano i corrispondenti movimenti sul toro immerso in \mathbb{R}^3 . Si consideri poi il caso di presenza della forza peso, e si descriva come cambiano i movimenti rispetto al caso del moto per inerzia.

Suggerimento. Il toro è definito come il prodotto cartesiano di due cerchi. Quando è pensato immerso in \mathbb{R}^3 , esso può essere descritto nel modo seguente (figura 1.12).

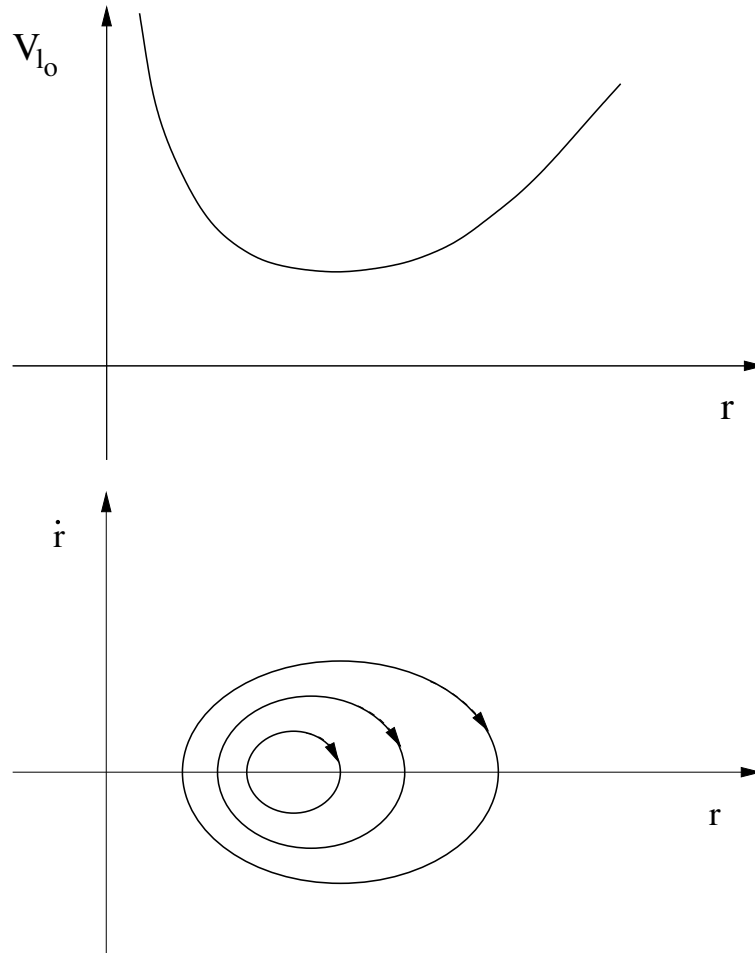


Figura 1.11: Punto vincolato alla superficie $z = \alpha(x^2 + y^2)$

La sezione in un piano verticale, diciamo il piano x, z (ovvero $y = 0$) è un cerchio di raggio $r > 0$, con centro sull'asse delle x a distanza $R > r$ dall'origine delle coordinate. Poi si fa ruotare questo cerchio attorno all'asse z . Un punto P sul cerchio nella sezione $y = 0$ sia individuato dall'angolo θ (con $0 \leq \theta < 2\pi$), contato ad esempio a partire dall'asse delle x (con verso arbitrario, prendendo ad esempio $\theta = 0$ quando P è situato tra il centro del cerchio e l'origine delle coordinate). Le linee coordinate sono allora dei cerchi nei piani di sezione verticali passanti per l'asse z (*meridiani*) e cerchi paralleli al piano orizzontale (*paralleli*). E' pertanto evidente che i raggi dei meridiani sono lunghi r , mentre i raggi dei paralleli sono lunghi $R - r \cos \theta$. E' allora ovvio che l'energia cinetica ha l'espressione (essendo φ la consueta variabile delle coordinate cilindriche)

$$T = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\theta}^2 + (R - r \cos \theta)^2 \dot{\varphi}^2) ,$$

⁷⁹Una ciambella regolare immersa in \mathbb{R}^3 .

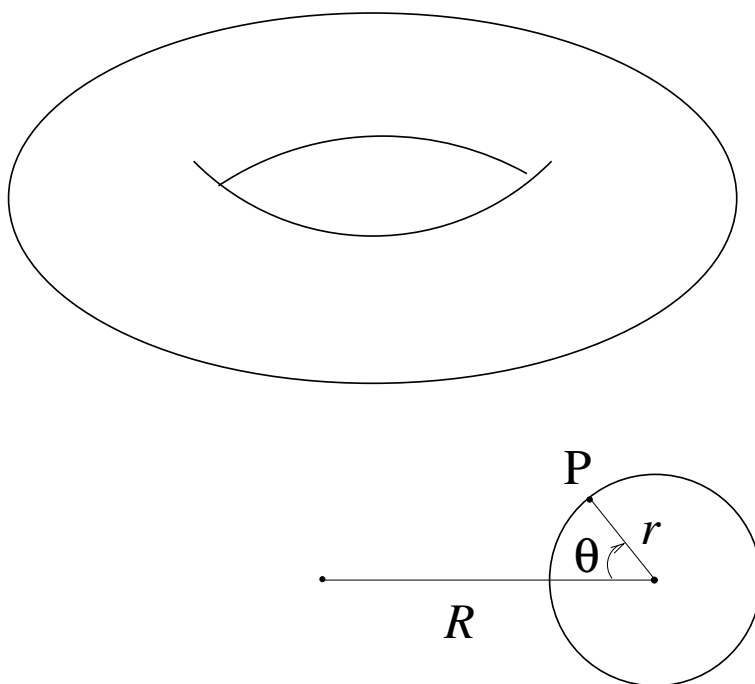


Figura 1.12: Il toro bidimensionale

e a questo punto la parte nonbanale dell'esercizio è svolta.

Esercizio Si prenda il libro di Meccanica di Landau Lifshits, e si studino tutti gli esempi ed esercizi.

1.9 Complementi: Il principio dei lavori virtuali

Nell'evoluzione storica della meccanica svolse un ruolo fondamentale il cosiddetto "principio dei lavori virtuali", che ora cercheremo di illustrare. Esso riguarda una significativa caratterizzazione dei punti di equilibrio di un sistema meccanico, che non sia semplicemente, banalizzando il problema, un corollario delle equazioni di Lagrange, come abbiamo fatto in un precedente paragrafo (punti di equilibrio caratterizzati come punti di stazionarietà dell'energia potenziale della forza attiva). Infatti, dal punto di vista storico-critico il fatto interessante è che fu proprio in tale ambito (determinazione dei punti di equilibrio) che venne per la prima volta compreso il ruolo fondamentale svolto dal concetto di lavoro di una forza, cioè del ruolo del *prodotto scalare* – comportante la nozione di proiezione ortogonale – di forza per spostamento, come riassume tutta la statica del mondo classico greco. Bellissimo a questo proposito è il riassunto fattone da Lagrange nel suo libro, specialmente dove illustra i lavori di Galileo e degli altri sul piano inclinato.

Cominciamo a ritrovare il risultato stabilito in un precedente paragrafo per caratterizzare i punti di equilibrio, percorrendo ora un procedimento induttivo. Ci limitiamo a considerare il caso più semplice che si presenta, che è quello di un punto non vincolato, il cui moto è retto dall'equazione di Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

(ci limitiamo al caso di forze posizionali, cioè indipendenti dalla velocità, e anche indipendenti dal tempo). Tra le soluzioni $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dell'equazione di Newton ricerchiamo se esistano **soluzioni di equilibrio**, cioè soluzioni in cui il punto non si muova, cioè si abbia $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$, dove \mathbf{x}^* è un vettore costante. Dunque la velocità e l'accelerazione devono essere nulli, e dall'equazione di Newton segue allora immediatamente che condizione necessaria affinché un punto \mathbf{x}^* sia punto di equilibrio è che in quel punto di annulli la forza:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = 0 .$$

Naturalmente, se ci si mette in quel punto con velocità iniziale nulla, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{v}_0 = 0$, il corrispondente movimento sarà proprio la soluzione di equilibrio $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$. Ciò segue dal teorema di esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali.

Passiamo ora al caso di un punto vincolato. Per fissare le idee, pensiamo a un punto vincolato a una superficie liscia, e quindi soggetto, oltre che ad una forza attiva $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, anche ad una forza di reazione vincolare, che abbiamo chiamato $\mathbf{F}^{(v)}$. Della reazione vincolare sappiamo che essa è normale alla superficie, mentre la sua intensità è una incognita del problema, e come abbiamo già discusso, è in qualche modo a nostra disposizione. L'equazione di moto è allora

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^{(v)} .$$

Evidentemente, per le stesse ragioni del caso precedente (deve essere $\mathbf{a} = 0$), la condizione per l'equilibrio è che si abbia

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{F}^{(v)} = 0 , \tag{1.9.1}$$

e dunque la condizione di equilibrio non si riduce affatto all'annullarsi della forza attiva \mathbf{F} (si pensi al caso di una persona sostenuta dal pavimento, o al caso del pendolo).

Il problema che ora ci poniamo è se si possa esprimere la condizione di equilibrio in termini della sola forza attiva. Questa condizione è facile da stabilirsi. Basta usare il fatto che in ogni punto conosciamo la direzione della reazione vincolare (normale alla superficie in quel punto). Dunque, poiché nel punto di equilibrio la somma dei due vettori $\mathbf{F} + \mathbf{F}^{(v)}$ deve essere nulla, è necessario che i due vettori siano anzitutto paralleli, e quindi (poiché conosciamo la direzione di $\mathbf{F}^{(v)}$ – normale alla superficie) dobbiamo ricercare i punti della superficie aventi la proprietà che in quei punti la forza attiva

sia diretta normalmente alla superficie. Ad esempio, nel caso di una persona su un pavimento, tutti i punti sono punti di equilibrio, mentre nel caso di un punto pesante su una sfera (pendolo sferico), gli unici punti aventi tale proprietà (forza attiva normale alla superficie) sono il polo nord e il polo sud, che infatti evidentemente sono punti di equilibrio (di cui il polo nord instabile, e il polo sud stabile).

Abbiamo dunque trovato i punti di equilibrio: sono i punti in cui la superficie è normale alla forza attiva. Ma osserviamo ora (è questo lo scopo principale del presente paragrafo) che è possibile esprimere questa proprietà in un'altra forma significativa, che coinvolge la nozione di lavoro o di potenza (lavoro per unità di tempo) della forza attiva. Infatti, se un punto è vincolato a muoversi su una superficie M , le velocità che esso può possedere quando si trova a passare per un punto \mathbf{x} non sono arbitrarie, ma, come abbiamo ampiamente discusso, sono necessariamente tangenti alla superficie in quel punto: $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M$. Quindi, poiché in un punto \mathbf{x}^* di equilibrio la forza attiva è normale alla superficie, la potenza (lavoro per unità di tempo) di tale forza è necessariamente nulla:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{v} = 0 .$$

Classicamente questa condizione veniva espressa in termini di **spostamenti virtuali** e di **lavoro virtuale**. Tutti i classici infatti consideravano, accanto alle velocità possibili (ovvero compatibili con i vincoli), anche i corrispondenti “spostamenti infinitesimi” compatibili con i vincoli, ovvero tangenti alla superficie, chiamati spostamenti virtuali:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt .$$

Allora la condizione di annullamento della potenza della forza attiva si esprime equivalentemente come condizione di annullamento del lavoro virtuale, ovvero annullamento del lavoro per tutti gli spostamenti virtuali possibili (cioè tangenti alla superficie nel punto considerato):

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) \cdot d\mathbf{x} = 0 . \tag{1.9.2}$$

Questo è proprio il principio dei lavori virtuali: i punti di equilibrio sono quelli nei quali si annulla il lavoro della forza attiva per qualunque spostamento virtuale (lavoro virtuale).

Infine concludiamo questa nota mostrando che, dal punto di vista analitico, i punti di equilibrio, caratterizzati mediante il principio dei lavori virtuali, possono essere equivalentemente caratterizzati nel modo già precedentemente ottenuto, ovvero come punti di stazionarietà dell'energia potenziale. A tal fine osserviamo che la condizione (1.9.2) esprime il principio dei lavori virtuali è ancora in qualche modo formulata in una forma implicita, perché si richiede che il lavoro si annulli “per tutti gli spostamenti virtuali”. Una forma esplicita si ottiene quando si faccia veramente ricorso alla formulazione lagrangiana, ovvero si esprime la condizione di vincolo (appartenere a

una superficie) descrivendo la superficie in forma parametrica in una carta locale mediante due coordinate libere: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q_1, q_2)$. Questo comporta per le velocità possibili e per gli spostamenti infinitesimi possibili (spostamenti virtuali) le espressioni

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} dq_i$$

e quindi la condizione di equilibrio prende ad esempio la forma

$$\sum_i \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} dq_i = 0.$$

Ma poiché questa espressione (lavoro virtuale) deve annullarsi per ogni spostamento virtuale, si ottengono immediatamente le due condizioni – si prenda successivamente $(dq_1, dq_2) = (1, 0)$, $(dq_1, dq_2) = (0, 1)$ –

$$F(\mathbf{x}^*) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

In altri termini, affinché \mathbf{F} compia lavoro virtuale nullo, ovvero sia ortogonale al piano tangente, basta che sia ortogonale a due vettori base del piano tangente, e quindi ortogonale ai due vettori coordinati. Nel caso di forze derivanti da potenziale, $\mathbf{F} = -\text{grad } V$, la precedente condizione assume la forma (di Torricelli) di annullamento delle derivate parziali dell'energia potenziale

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2),$$

ovvero ogni punto di equilibrio è un punto stazionario (o critico, come anche si dice) dell'energia potenziale.

È facile controllare che proprietà analoghe a quelle qui discusse per il caso di un punto su una superficie valgono anche per un arbitrario sistema lagrangiano con un numero arbitrario di gradi di libertà.

Esercizio. Ritrovare le condizioni di equilibrio per le macchine classiche: piano inclinato, leve, bilancia, carrucole, pulegge.

Osservazione: connessione con i principi variazionali. L'idea intuitiva sottostante il principio dei lavori virtuali, è di caratterizzare un punto di equilibrio mediante una proprietà che riguarda il passaggio a punti vicini: si controlla se, spostandosi in tutti i punti vicini (con spostamenti infinitesimi), il corrispondente lavoro della forza attiva sia sempre nullo, o equivalentemente ci si trovi in un punto di stazionarietà dell'energia potenziale.

Ora, i punti di equilibrio definiscono dei particolari movimenti. Più in generale, sappiamo che i generici movimenti “veri” soddisfano l'equazione di Newton (o le analoghe equazioni di Lagrange). È allora spontaneo domandarsi se un movimento “vero” possa essere caratterizzato in maniera analoga, confrontando il movimento

considerato con movimenti vicini a priori possibili, e ricercando se esista una quantità che non varia (al primo ordine, cioè nel senso del calcolo differenziale) passando dai movimenti veri a tutti i possibili movimenti vicini. Eulero e Lagrange hanno mostrato che questa via è percorribile, e che esiste una quantità ben definita la cui stazionarietà caratterizza i movimenti “veri”. Come vedremo in un prossimo capitolo, si tratta della quantità che solitamente viene chiamata **azione hamiltoniana**, e il principio dei lavori virtuali, o della stazionarietà dell’energia potenziale, verrà generalizzato al cosiddetto **principio dell’azione stazionaria**.

1.10 Complementi: Energia cinetica e metrica, l’elemento di linea dl

Consideriamo il caso di un punto vincolato a una superficie M , in assenza di forze attive (moto per inerzia). Sappiamo che la struttura delle equazioni di moto è determinata dalla forma che l’energia cinetica $T = (1/2)mv^2$ assume nelle coordinate scelte, ovvero $T = \sum a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$. Consideriamo la corrispondente espressione per $v^2 = (2/m)T$, cui corrispondono dei coefficienti che denotiamo – seguendo la notazione della relatività generale – con g_{ik} ,

$$\frac{2}{m}T = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_{ik} g_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k .$$

Esempi. In coordinate polari piane, e in coordinate sferiche sulla sfera si ha rispettivamente

$$\frac{2}{m}T \equiv v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 ; \quad \frac{2}{m}T \equiv v^2 = R^2(\dot{\theta}^2 + (\sin^2 \theta)\dot{\varphi}^2) .$$

Vogliamo mettere in luce come questa espressione abbia un profondo significato geometrico, in quanto determina la “metrica sulla superficie” M , ovvero determina la struttura del prodotto scalare tra due arbitrari vettori tangenti alla superficie in un medesimo punto \mathbf{x} della superficie.

A tal fine, bisogna anzitutto tenere presente che è definito il prodotto scalare per vettori arbitrari dello spazio ambiente \mathbb{R}^3 in cui la superficie è immersa, e che il prodotto scalare sulla superficie viene “ereditato” da quello dello spazio ambiente: assegnato un punto $\mathbf{x} \in M$, si considerano i vettori (denotiamoli con $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$) dello spazio tangente $T_{\mathbf{x}}M$, e li si pensa trasportati per parallelismo nell’origine delle coordinate. In tal modo, i vettori dello spazio tangente sono semplicemente un sottoinsieme dei vettori dello spazio ambiente, e quindi è conosciuto il loro prodotto scalare. Ma poiché sappiamo che i vettori dello spazio tangente sono combinazioni lineari dei vettori coordinati,

$$\mathbf{v} = \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} , \quad \mathbf{w} = \sum_i w_i \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} ,$$

allora si ha evidentemente

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{ik} g_{ik} v_i w_k$$

dove

$$g_{ik} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q_k}$$

sono i “coefficienti della metrica”.

A questo punto è evidente che la matrice definente la metrica è nonsingolare, ovvero si ha

$$\det g_{ik} \neq 0 ,$$

e anzi si ha addirittura

$$\det g_{ik} > 0 .$$

Ciò può vedersi in molti modi, e un modo è il seguente. Esso fa uso della proprietà di definita positività della metrica euclidea (dello spazio ambiente): la lunghezza di tutti i vettori, tranne il vettore nullo, è positiva. Ora, tale proprietà viene evidentemente ereditata dalla metrica sulla superficie. Da ciò si ricava che la matrice g_{ik} , che può essere diagonalizzata (in quanto simmetrica), ha gli autovalori tutti positivi, e quindi il determinante (prodotto degli autovalori) è positivo.⁸⁰

Mostriamo infine la relazione tra la metrica g_{ik} e il cosiddetto “elemento di linea”.

A questo scopo consideriamo assegnata sulla superficie M una curva γ , che supponiamo descritta in forma parametrica, ovvero descritta nello spazio ambiente nella forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ e descritta quindi sulla carta nella forma $q_i = q_i(t)$. Ricordiamo ora che la lunghezza del tratto di curva descritto quando il parametro varia da un valore iniziale t_0 a un valore finale t è definita, come è ben naturale, da

$$l(t) = \int_{t_0}^t \|\mathbf{v}\| d\tilde{t} = \int_{t_0}^t \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} d\tilde{t}$$

(abbiamo denotato con \tilde{t} il valore corrente del parametro), sicché “l’elemento di linea dl (lunghezza di un tratto infinitesimo, nella terminologia “classica”)

⁸⁰È interessante notare che nel caso di metrica non definita positiva (come in relatività) la proprietà più debole di nonsingolarità della metrica segue dall’ipotesi di nondegenerazione della metrica dello spazio ambiente: l’unico vettore ortogonale a tutti i vettori è il vettore nullo – ortogonalità di due vettori significa che il corrispondente prodotto vettore è nullo.

A tal fine, consideriamo il caso generale di una varietà n -dimensionale, e denotiamo con \mathbf{u}_i i vettori coordinati. Allora, se il determinante fosse nullo, esisterebbe una n -upla non nulla (c_1, \dots, c_n) soluzione dell’equazione $\sum_k g_{ik} c_k = 0$. Dalla definizione della matrice g_{ik} , usando la linearità del prodotto scalare, si avrebbe pertanto $\mathbf{u}_i \cdot (\sum_k c_k \mathbf{u}_k) = 0$, ovvero esisterebbe un vettore nonnullo ortogonale alla base, e quindi ortogonale a tutti i vettori.

è dato da

$$dl = \|\mathbf{v}\|dt = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} dt$$

ovvero

$$dl = \sqrt{g_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k} dt .$$

Simbolicamente possiamo scrivere questa relazione anche nella forma che essa assume quando la si quadra e si ricordi $dq_i = \dot{q}_i dt$, ovvero

$$(dl)^2 = g_{ik}dq_i dq_k .$$

In effetti i classici scrivevano questa relazione addirittura nella forma

$$dl^2 = g_{ik}dq_i dq_k ,$$

che viene usata in tutti i libri di geometria differenziale, e in tutti gli studi di relatività generale, a partire dagli articoli originali di Einstein fino ai moderni articoli di ricerca. Naturalmente, il lettore deve fare attenzione a non interpretare dl^2 come il differenziale di l^2 .⁸¹

Esempi. Negli esempi sopra citati, si hanno gli elementi di linea definiti da

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 , \quad dl^2 = R^2(d\theta^2 + (\sin^2 \theta)d\varphi^2) .$$

1.11 Complementi: Non univocità della lagrangiana, la particella libera relativistica

È interessante considerare il seguente problema. Assegnata una lagrangiana L , ci si domanda se esistano, oltre alla assegnata lagrangiana L , altre lagrangiane L^* che forniscano le medesime equazioni di moto. Già sappiamo che la lagrangiana $L^* = \alpha L + \beta$ con α, β costanti produce le stesse equazioni della lagrangiana L (come d'altronde si verifica a colpo), e ovviamente lo stesso vale se $\beta = \beta(t)$, perché nelle equazioni di Lagrange occorre come prima cosa calcolare delle derivate rispetto alle variabili q oppure \dot{q} e quindi il termine $\beta(t)$ non contribuisce.

Più sottile è la seguente osservazione, la cui ragione profonda apparirà chiara quando, nel capitolo sui principi variazionali, si mostrerà che le equazioni di Lagrange caratterizzano i punti critici dell'azione hamiltoniana $S = \int L dt$.⁸²

⁸¹Si può osservare che questa notazione è la stessa che si usa per la derivata seconda di una funzione, ad esempio quando, per una funzione $f(x)$, la derivata seconda viene denotata con $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

⁸²La ragione risulterà legata al fatto che, in corrispondenza di qualunque assegnato movimento $q = q(t)$ (anche non soddisfacente le equazioni di Lagrange), per la funzione composta $F(q(t), t)$ si ha

Proposizione. Le lagrangiane L e L^* producono le stesse equazioni di moto se la differenza tra L e L^* si esprime mediante una funzione $F(q, t)$ nella forma

$$L^* - L = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (1.11.2)$$

Eseguiamo qui una verifica diretta. In virtù dell'ipotesi (1.11.2) si ha (per semplicità di notazione consideriamo il caso $n = 1$, ma la generalizzazione è ovvia)

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(L^* - L) = \frac{\partial F}{\partial q} ,$$

e dunque

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}(L^* - L) = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q} .$$

D'altra parte, sempre per la (1.11.2), si ha anche

$$\frac{\partial}{\partial q}(L^* - L) = \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} ,$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}(L^* - L) = \frac{\partial}{\partial q}(L^* - L) ,$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L^*}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} ,$$

il che implica che

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L^* - \frac{\partial}{\partial q} L^* = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} L - \frac{\partial}{\partial q} L = 0 .$$

□

Mostriamo ora un esempio concreto, di importanza fondamentale, in cui viene utilizzata la libertà di scelta della lagrangiana. Ci riferiamo al caso della *particella libera* in un sistema di riferimento inerziale. Il moto della particella è dunque noto: si tratta del moto rettilineo uniforme $\mathbf{x}(t) =$

$$\frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{dF}{dt} , \quad (1.11.1)$$

e dunque la condizione (1.11.2) comporta che $L^* - L$, calcolata lungo un movimento $q = q(t)$, è la derivata di una funzione rispetto al tempo. In conseguenza, risulterà allora evidente che le due lagrangiane L ed L^* producono la medesima azione (a meno di termini al contorno) e dunque comportano le medesime equazioni di Lagrange. Si noti che qui abbiamo compiuto un abuso di linguaggio, perché dovremmo denotare con un nome diverso la funzione composta, ad esempio $F(q(t), t) = \tilde{F}(t)$. Invece denotiamo ancora \tilde{F} con F .

$\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t$, soluzione dell'equazione $\ddot{\mathbf{x}} = 0$; è questa proprio la definizione stessa di riferimento inerziale, sia in ambito galileiano – newtoniano, sia in ambito relativistico.

Ora, in ambito newtoniano la lagrangiana della particella libera coincide con la sua energia cinetica:

$$L_{\text{cl}} = T_{\text{cl}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1.11.3)$$

(l'indice “cl” sta per classico, come contrapposto a “relativistico”). Se dunque la lagrangiana fosse univocamente determinata dalle equazioni di moto ($\ddot{\mathbf{x}} = 0$) non potrebbe avvenire che la particella ha in relatività la lagrangiana $L = -m c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (dove c è la velocità della luce). Questo è possibile perchè esistono infinite lagrangiane che conducono ai medesimi moti, in questo caso ai moti rettilinei uniformi. Tra queste lagrangiane, quella adatta alla teoria relativistica verrà fissata con un opportuno criterio in cui svolge un ruolo decisivo il principio di costanza della velocità della luce con le sue implicazioni per la struttura geometrica dello spaziotempo. Da tale scelta della lagrangiana, la forma corretta dell'energia relativistica seguirà poi del tutto naturalmente con il procedimento sopra indicato, come energia generalizzata \mathcal{E} ad essa legata. Si vedrà allora che, diversamente dal caso classico, l'energia della particella libera relativistica sarà sostanzialmente diversa dalla corrispondente lagrangiana.

Si ha la seguente

Proposizione 4 *Tutte le lagrangiane L della forma $L = f(v^2)$ conducono a moti rettilinei uniformi (tranne il caso della lagrangiana $L = \sqrt{v^2}$, in cui il moto è ancora rettilineo, ma non è determinata la legge oraria).*

Dimostrazione. Usiamo qui la notazione $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$, cioè $\mathbf{q} = \mathbf{x}$. Essendo $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$, si ha che è costante del moto il momento coniugato $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$. Si calcola $\mathbf{p} = 2\mathbf{v} f'(v^2)$, avendo denotato con l'apice la derivata rispetto all'argomento (si ricordi $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$). Dunque

$$\mathbf{v} f'(v^2) = \mathbf{b} , \quad (1.11.4)$$

dove \mathbf{b} è un vettore costante. Moltiplicando scalarmente per \mathbf{b} si ha allora

$$v^2 f'^2(v^2) = b^2 = \text{cost} , \quad (1.11.5)$$

da cui segue (per una f generica, in effetti per tutte le funzioni tranne⁸³ che per $f(v^2) = \sqrt{v^2}$) che v^2 è una costante del moto. Dunque anche $f'(v^2)$ è una costante

⁸³Nel caso della funzione $f(v^2) = \sqrt{v^2}$, avviene che per la funzione $g(v^2) := v^2 f'^2(v^2)$ risulta $g(v^2) = \frac{1}{4}$, cioè g , come funzione di v^2 , è costante e quindi l'informazione che essa è una costante del moto non dice nulla su v^2 . In questo caso si utilizza però la

del moto e dalla (1.11.4) segue che durante il moto il vettore \mathbf{v} è costante, ovvero il moto è rettilineo uniforme. **Q.E.D.**

Dunque, per il moto rettilineo uniforme si ha libertà di scelta della lagrangiana, perché si richiede soltanto che essa sia funzione di v^2 . Mostriamo (nel capitolo sulla relatività) che il principio di costanza della velocità della luce porta a scegliere $L_{\text{rel}} = \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}$, con una costante arbitraria α , dove c è la velocità della luce nel vuoto. Tale costante viene poi fissata,

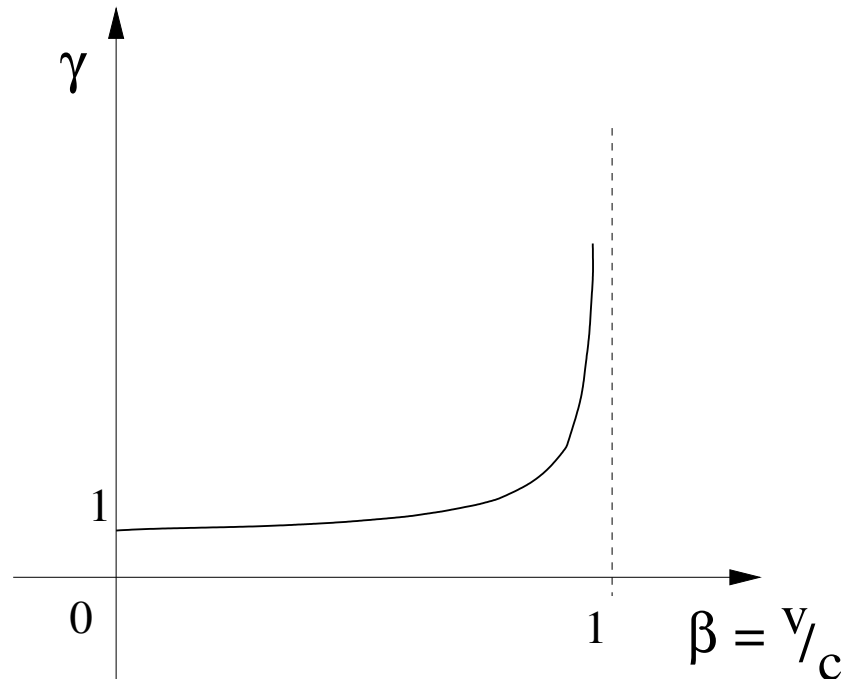


Figura 1.13: Il fattore di Lorentz γ in funzione della velocità v

precisamente con $\alpha = -mc^2$, in base al principio di corrispondenza, secondo il quale per piccole velocità, $v^2/c^2 \ll 1$, la lagrangiana relativistica si deve ridurre a quella classica, a meno di una costante additiva

$$L_{\text{rel}} \approx \frac{1}{2}mv^2 + \text{cost} \quad \text{per } \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \quad (1.11.6)$$

In tal modo, ricordando $\sqrt{1+x} \simeq 1 + (1/2)x^2$, si trova $\alpha = -mc^2$. Assumiamo dunque per la lagrangiana relativistica della particella libera la conservazione del momento. Poiché si ha che il momento $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ è dato da $\mathbf{p} = \mathbf{v}/v$ (dove $v = \|\mathbf{v}\|$), dalla costanza di \mathbf{p} segue allora che la direzione del vettore \mathbf{v} è costante, sicché il moto è rettilineo, ovvero la traiettoria è una retta. Il motivo per cui in questo caso viene determinata solo la traiettoria e non anche la legge oraria, apparirà chiaro quando avremo a disposizione gli elementi del calcolo delle variazioni.

forma

$$L_{\text{rel}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.11.7)$$

che ha significato solo per $\|\mathbf{v}\| < c$. Scriveremo anche

$$L_{\text{rel}} = -mc^2 \gamma^{-1}, \quad (1.11.8)$$

dove abbiamo introdotto il celebre fattore di Lorentz (figura 1.13)

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.11.9)$$

che è definito solo per $\|\mathbf{v}\| < c$, diverge per $\|\mathbf{v}\| \rightarrow c$, mentre $\gamma(0) = 1$. Eseguiamo ora i calcoli per il momento coniugato alla posizione, $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$, e per l'energia generalizzata $\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$. Si ha immediatamente

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}, \quad (1.11.10)$$

e si trova poi⁸⁴

$$\mathcal{E} = m\gamma c^2; \quad (1.11.11)$$

si verifica inoltre immediatamente che vale l'identità

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - p^2 = m^2 c^2. \quad (1.11.12)$$

Nel caso classico si ha invece $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $\mathcal{E} = E = \frac{1}{2}mv^2$, $E - \frac{p^2}{2m} = 0$. Risulta dunque che, per $v = 0$, nel caso classico si ha $E = 0$, mentre nel caso relativistico, essendo $\gamma(0) = 1$, si ha $\mathcal{E} = mc^2$. E' questa una delle conseguenze più rilevanti del principio di costanza della velocità della luce, su cui ritorneremo nel capitolo sulla relatività. Naturalmente, a questo livello del ragionamento si potrebbe pensare che anche nel caso relativistico, come nel caso classico, l'energia sia definita a meno di una costante additiva, sicché sembrerebbe di poter eliminare l'energia a riposo (ingl. *rest energy*) mc^2 . Occorre a questo punto un altro ingrediente di geometria dello spaziotempo relativistico, cioè la teoria dei quadrivettori, che verrà illustrata nel capitolo sulla Relatività. Risulterà allora che, come le coordinate spazio temporali costituiscono le componenti di un quadrivettore (ct, \mathbf{x}) , così anche energia e momento costituiscono un quadrivettore $(\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$, che ha una pseudolunghezza il cui quadrato è espresso proprio dalla (1.11.12). Dunque l'energia si presenta come la componente di un vettore, ed è ben noto che non è ammesso sommare un numero ad un vettore e quindi, dal punto di vista matematico, non è lecito sottrarre dall'energia (componente di un vettore) il termine mc^2 , ovvero eliminare l'energia a riposo.

⁸⁴Infatti si ha $\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = m\gamma v^2 + mc^2 \gamma^{-1} = m\gamma c^2 (\frac{v^2}{c^2} + \gamma^{-2})$, con $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2$.

