Capitolo 5

Teoria della relatività (ristretta o speciale)

PARTE PRIMA: Il principio di costanza della velocità della luce e la geometria dello spaziotempo, energia e momento della particella libera

5.1 Introduzione

La relatività *ristretta*, o *speciale* (così qualificata come contrapposta alla successiva relatività generale), è in un certo senso il paradiso della fisica teorica. Infatti tutti sanno che essa ha condotto a prevedere fatti di rilevanza grandissima, come l'equivalenza di massa ed energia (ovvero la relazione $E = mc^2$, cioè la pila nucleare[1]), e al tempo stesso a rivoluzionare concetti fondamentali (si pensi alla non assolutezza della contemporaneità, e alla dilatazione dei tempi, osservata poi nei mesoni μ). D'altra parte tutto questo sembra seguire quasi da nulla: una persona si è messa a tavolino (o in poltrona), e ha tirato fuori dalla sua testa tutte queste cose, "semplicemente" riflettendo sul fatto che le esperienze si rifiutavano di rivelare il "vento d'etere". Ed infatti è proprio così, come è ben testimoniato dalla seguente citazione:

> "La teoria della relatività ristretta non è altro che un adeguamento del concetto di sistema inerziale alla convinzione, maturata con l'esperienza, che la velocità della luce sia costante rispetto ad ogni sistema inerziale" (A. Einstein, Lettera a Michele Besso n. 22) .

[1] E la sua tragica versione militare, la bomba atomica.

E questa esperienza di capire tutte queste cose mettendosi in poltrona può essere compiuta anche oggi. È dunque chiaro che la comprensione della teoria della relatività speciale costituisce una esperienza intellettuale affascinante, come si spera possa trasparire anche dalla esposizione datane in queste note.

5.2 I sistemi inerziali e il principio di costanza della velocità della luce: le trasformazioni di Lorentz

5.2.1 Gli assiomi della teoria della relatività, confrontati con quelli galileiani

Il primo fatto che si deve avere ben presente è che la teoria della relatività ristretta concentra la sua attenzione su un punto cruciale, ovvero il principio di costanza della velocità della luce, del quale discuteremo qui sotto. Tutto il resto essa lo prende come già era stato accettato dalla tradizione. Così avviene anzitutto per quanto riguarda i *sistemi inerziali*, rispetto ai quali ci si comporta esattamente come in ambito galileiano. Si pensano i sistemi di riferimento, almeno idealmente, come sistemi muniti di regoli ed orologi con cui essi misurano le coordinate spaziali e temporali di un *evento* (un oggetto si trova in un certo luogo ad un certo tempo). Poi, esattamente come nel caso galileiano, si pone l'assioma:

Assioma sui sistemi inerziali.
Esistono dei sistemi di riferimento, che diciamo inerziali, aventi la proprietà caratteristica che *i corpi non soggetti a forze si muovono rispetto ad essi di moto rettilineo uniforme.*[2] [3]

Ancora esattamente come in ambito galeiliano si pone poi il

Principio di relatività.
Tutti i sistemi inerziali sono equivalenti (nessuno di essi è privilegiato).

Si noti bene che principi di questo tipo sono molto concreti, e portano a conseguenze ben definite sulla natura delle trasformazioni di coordinate tra due sistemi inerziali. Infatti mostreremo che la definizione stessa di

[2]Quello che vogliamo sottolineare è che, a una lettura attenta, può apparire che l'assioma dell'esistenza di sistemi inerziali presenti diverse ombre (si veda H. Poincaré, *La science e l'hypothèse*), proprio come accade per ogni postulato che viene posto alla base di qualsiasi teoria. Ma il punto è che di questo qui non ci curiamo ora, come non ce ne curavamo quando ci muovevamo nell'ambito della meccanica newtoniana.

[3]In particolare, si osservi che il tempo deve essere definito in una certa maniera ben precisa; infatti, se un punto si muove di moto uniforme rispetto ad un certo orologio, non si muoverà più di moto uniforme rispetto a un altro orologio, che acceleri o rallenti rispetto al primo.

sistemi inerziali comporta immediatamente che le trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali devono essere lineari (più precisamente, affini), mentre il principio di relatività comporta, ancora immediatamente, che il determinante di tali trasformazioni deve avere modulo uguale ad 1.

Stabiliti questi due principi esattamente come in ambito galileiano, la teoria della relatività si caratterizza poi per il fatto di richiedere che il principio di relatività valga non solo nel dominio dei fenomeni meccanici, ma anche in quello dei fenomeni elettromagnetici. Quando si vuole dare enfasi a questo fatto, si enuncia il seguente

Principio di costanza della velocità della luce:
La luce ha la stessa velocità c rispetto a qualunque sistema inerziale.[4] Più in generale, si ammette che il principio di relatività si applichi non solo nel dominio dei fenomeni meccanici, ma anche in quello dei fenomeni elettromagnetici.

Si tenga presente che, al tempo in cui fu formulata la teoria della relatività, le uniche forze fondamenatali conosciute erano quelle gravitazionali e quelle elettromagnetiche. Per questo motivo, trascurando la gravità (al cui studio Einstein provvederà con la relatività generale),[5] l'attenzione era tutta concentrata sul campo elettromagnetico. Oggi si potrebbe dare una formulazione più generale, che tenga conto dell'esistenza di altre forze fondamentali. Noi ci atterremo qui a una di tipo trattazione tradizionale.

Nota: il problema dell'etere. Ricordiamo quale era il problema che si aveva nell'estendere il principio di relatività ai fenomeni elettromagnetici: si trattava del problema dell'etere, come definente un sistema di riferimento privilegiato.

Dopo lunhgissime discussioni, a partire da Cartesio attraverso Huygens e Newton, infine, a seguito della teoria di Fresnel ($\simeq$ 1817) e della verifica sperimentale di alcune sue previsioni (è famosa la discussione relativa alla cosiddetta macchia di Poisson, o *Poisson spot*), era stato accettato dalla comunità scientifica che la luce consistesse in un fenomeno ondulatorio[6]. Sembrava pertanto naturale ammettere che esistesse un mezzo (detto etere, o mezzo luminifero) le cui vibrazioni costituissero la luce, analogamente a quanto avviene per le altre onde conosciute; si pensi alle onde del mare, al suono come oscillazioni di pressione dell'aria, ...[7] A tal fine erano stati escogitati adeguati modelli di etere, che dovevano presentare proprietà alquanto peculiari.[8] Tuttavia, le esperienze non rivelavano il "vento d'etere": come il vento, che si sente quando ci si affaccia al finestrino, ci palesa che il treno si muove

[4] Quindi, si parla di *"costanza"* rispetto al cambiamento di sistema di riferimento: il nome "costanza" potrebbe essere fuorviante.

[5] Si noti che una anticipazione si trova nel lavoro di Poincaré del 1905.

[6] Come già proposto da Huygens prima che prevalesse la teoria corpuscolare di Newton

[7] Si veda E.T. Whittaker, A history of the theories of aether and electricity.

[8] Ad esempio, una speciale difficoltà consisteva nel fatto che nella luce si hanno oscillazioni puramente trasversali, e quindi non si potevano considerare modelli di fluidi (come sarebbe parso naturale), perchè i fluidi sostengono solo oscillazioni longitudinali; si doveva pertanto ricorrere, contro ogni intuizione, a modelli aventi proprietà di tipo elastico. Ma questi presentano la difficoltà di ammettere in generale, oltre ad oscillazioni trasversali, anche oscillazioni longitudinali.

rispetto all'aria, così ci si attendeva che degli esperimenti ottici potessero rivelare il "moto assoluto della Terra", ovvero il moto della Terra rispetto all'etere.[9] In effetti, le discussioni riguardo i modelli di etere erano molto più complesse di quanto molto spesso viene fatto credere[10], ma non abbiamo qui il tempo di occuparcene.

Si deve a Poincaré la geniale intuizione espressa nella seguente frase:

"Sembra che questa impossibilità di mettere sperimentalmente in evidenza il movimento assoluto della Terra sia una legge generale della natura; io sono in realtà portato ad ammettere questa legge, che chiamerò Postulato di Relatività, e ad ammetterla senza restrizioni".

Un analogo riferimento al fatto che le esperienze non sembrano rivelare il vento d'etere, così da "imporre" il principio di costanza della velocità della luce, si trova anche nella prima pagina del celebre lavoro di Einstein del 1905, dove egli dice :

"Esempi come questo, *come pure i tentativi falliti di individuare un qualche movimento della Terra relativamente al "mezzo luminifero"* suggeriscono che i fenomeni elettrodinamici, al pari di quelli meccanici, non possiedono proprietà corrispondenti all'idea di quiete assoluta. Essi suggeriscono piuttosto che, come già è stato mostrato in un'approssimazione al primo ordine, per tutti i sistemi di coordinate per i quali valgono le equazioni della meccanica varranno anche le stesse leggi elettrodinamiche e ottiche".

Postuliamo dunque con Poincaré ed Einstein che i fenomeni elettromagnetici non privilegino alcun sistema inerziale. In particolare ammettiamo che *la luce si propaghi con la medesima velocità c in tutti i sistemi inerziali*

[9]È pur vero che, con la teoria elettromagnetica di Maxwell e la sua conferma mediante le esperienze di Hertz, l'etere aveva subito in qualche modo una "dematerializzazione" (inoltre, cadeva la difficoltà delle onde longitudinali – si veda la nota precedente –, perché le onde elettromagnetiche sono puramente trasversali). Tuttavia permaneva ancora il problema del "vento d'etere" nella forma seguente: comprendere se le equazioni di Maxwell debbano avere aspetto diverso nei diversi sistemi di riferimento inerziali, in particolare se la velocità della luce debba sommarsi in maniera galileiana.

[10]Si veda ad esempio G. Cavalleri, L. Galgani, G. Spavieri, G. Spinelli, Scientia ... Un punto rilevante è il seguente: quando Michelson e Morley trovarono il loro risultato negativo, essi non conclusero affatto (come spesso viene affermato) che non vi era etere, ma conclusero invece che tra i due modelli allora in discussione (quello di Fresnel e quello di Stokes), andava bene quello di Stokes, che prevedeva un trascinamento parziale dell'etere attorno ai corpi massivi, analogamente al modo in cui l'atmosfera è trascinata dalla Terra nel suo moto attorno al Sole. Molto rilevante è un successivo lavoro di Lorentz, in cui si metteva in luce come la fenomenologia richiedesse che l'etere si addensasse attorno ai corpi massivi, sicché la presenza dell'etere dovesse comportare effetti visibili in prossimità dei corpi massivi (a quel tempo non ancora osservati), che è proprio uno dei punti centrali della relatività generale. Insomma, una "buona" teoria dell'etere deve in qualche modo essere equivalente alla relatività generale. Questo interessante punto di vista è alla base della trattazione della relatività generale data da uno scienziato tutt'altro che banale, come Dicke (si vedano le sue lezioni alla scuola di Varenna)

(addirittura Poincaré sceglie unità tali che $c = 1$)[11]. Questo postulato viene chiamato da Poincaré ed Einstein senz'altro come **Postulato di Relatività**. Noi, per sottolineare il fatto che stiamo estendendo il principio di relatività dall'ambito dei fenomeni meccanici a quello dei fenomeni elettromagnetici, lo abbiamo chiamato specificamente **Principio di costanza della velocità della luce**.

Modificazione degli strumenti di misura quando si passa da un sistema inerziale ad un altro.[12] Prima di procedere vorremmo sgombrarci da un possibile equivoco. Vogliamo mettere in rilievo come il principio di costanza della velocità della luce abbia il carattere di una ipotesi fisica sulla modificazione degli strumenti di misura (orologi e regoli) nel passaggio da un sistema inerziale a un altro. Infatti il principio in questione verrebbe completamente banalizzato se lo si riducesse alla ovvia affermazione che ogni osservatore inerziale può definire le unità di misura in maniera tale da trovare un valore prestabilito (diciamo 300.000 km/sec) per la velocità della luce. Ovviamente non è questo il punto in discussione. Il principio di costanza della velocità della luce deve invece essere inteso nel modo seguente. In un sistema di riferimento inerziale K (la banchina della stazione, nel famoso esempio di Einstein) vengono preparati degli strumenti di misura (orologi e regoli)[13] in diverse copie, tutte identiche tra loro; allora si misura la velocità della luce, che risulta avere un certo valore c. Poi si prende una coppia di strumenti di misura (orologio e regolo) e la si mette su un treno fermo, si accelera il treno (che compie quindi un moto *non inerziale*)[14] fino a che esso acquisti una certa velocità v rispetto alla banchina, e lo si lascia poi mantenere quella velocità, sicché esso costituisce un altro sistema inerziale K'. Quello che allora afferma il principio in questione è che nelle esperienze eseguite sul treno con i suddetti strumenti si trova che la velocità

[11] In questo, Poincaré segue Maxwell stesso. Questi infatti, fin dalle prime pagine del *Treatise* propone di prendere per unità di lunghezza la lunghezza d'onda nel vuoto di un fissato elemento (pag. 3): *" the wave length in vacuum of a particular kind of light, emitted by some widely diffused substance such a sodium, which has well–defined lines in the spectrum"*. Poi propone di prendere come unità di tempo il corrispondente periodo: *"the periodic time of vibration of the particular kind of light whose wave lentgh is the unit of length"*. E conclude (pag. 5): *" If we adopt the units of length and time derived from the vibrations of light*, **then the unity of velocity is the velocity of light."** Si noti infine che, appena dopo avere fatto la proposta di usare la luce per l'unità di lunghezza, confrontandola con la proposta che fa riferimento al metro (originariamnete pensato come una certa frazione del meridiano terrestre) aggiunge: *"Such a standard would be independent of any changes in the dimensions of the earth, and should be adopted by* **those who expect their writings to be more permanent than that body."** J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Dover (New York, 1954), edizione originale 1 febbraio 1873. Vale a dire: questo standard dovrebbe essere adottato da chi aspira all'eternità. Forse qui Maxwell aveva in mente gli ultimi versi di un famoso sonetto di Shakespeare, *"Shall I compare thee to a summer's day?"*.

[12] NOTA PER GLI AUTORI: rivedere questa parte. Sentire Massimo Marino.

[13] In conformità con il principio di inerzia, gli orologi devono funzionare in maniera tale che i corpi non soggetti a forza compiono moti uniformi.

[14] Così è proprio nell'articolo originale di Einstein (sez. 3). Egli considera due sistemi "stazionari" e poi dice: *" Ora venga impartita all'origine di uno dei due sistemi una velocità v nella direzione delle x crescenti dell'altro sistema di coordinate.*" Si veda in una nota di un successivo paragrafo una osservazione di Sommerfeld a questo proposito.

della luce ha ancora il medesimo valore c che si trovava nelle esperienze fatte sulla banchina. È questa una ipotesi di natura fisica, che concerne il comportamento degli strumenti di misura nel passaggio (mediante un movimento noninerziale !) da un riferimento inerziale a un altro.[15]

Il problema della sincronizzazione degli orologi. Nell'articolo originario di Einstein (paragrafi 1 e 2) il principio di costanza della velocità della luce viene formulato in una maniera in cui svolge un ruolo essenziale il metodo della cosiddetta **sincronizzazione degli orologi**.[16] Einstein ne fa uso anche nel dedurre le trasformazioni di Lorentz Si tratta dunque di un concetto molto rilevante, sul quale ritorneremo in seguito, eseguendo un esercizio concreto, ovvero mostrare come la relatività ristretta interpreta il cosiddetto paradosso dell'effetto Sagnac.[17]

Il fatto che nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale a un altro si producano dei cambiamenti fisici negli strumenti di misura era del tutto ovvio a Lorentz prima della nuova interpretazione introdotta da Poincaré ed Einstein. La differenza di atteggiamento consiste nel fatto che Lorentz si sforzava di escogitare modelli di etere che fornissero un meccanismo per "spiegare" la costanza della velocità della luce. Il contributo di Poincaré ed Einstein consistette invece nell'assumere direttamente il principio di costanza della velocità della luce come un postulato, prescindendo da ogni possibile meccanismo che eventualmente potesse giustificarlo.[18]

[15] Sul problema dei corpi rigidi in relatività si veda anche H. Weyl, *Space, time, matter*, Dover (New York), pag. 176-177, oltre a un celebre lavoro di Fermi.

[16] L'osservatore inerziale K dice che gli orologi posti in due punti A, B, che sono solidali con lui e forniscono dei tempi etichettati rispettivamente con t_A, t_B, sono sincronizzati se soddisfano la seguente proprietà. Si fa l'esperimento in cui A manda al suo tempo t_A un segnale luminoso verso B, e questo, appena lo riceve a un suo tempo t_B, lo riinvia verso A, che infine le riceve al suo tempo t'_A. Allora si ha sincronizzazione se vale $t'_A - t_B = t_B - t_A$. Si ammette poi che valga $2\overline{AB}/(t'_A - t_A) = c$, dove $\overline{AB}$ denota la lunghezza del segmento (A, B) rispetto a K. Questa è la prescrizione sugli orologi in K, equivalente ad affermare che in K la luce si propaga con velocità c. Poi si ammette che una relazione analoga valga, con il medesimo valore di c, per l'analoga esperienza compiuta da ogni altro osservatore inerziale K', per ogni coppia di punti solidali con esso. Si veda anche H. Poincaré, Conferenza di S. Louis (1904) riportata nel suo libro *La valeur de la Science.* [Per una analisi dei contributi di Poincaré ed Einstein si veda L. Galgani, *Einstein e Poincaré*, in *Fondamenti e filosofia della fisica* a cura di V. Fano, Societá editrice il Ponte Vecchio (Cesena, 1996), reperibile nella home–page di Galgani in (www.mat.unimi.it).] Un punto cruciale è il seguente. Come è già stato osservato più sopra, nell'enunciare il principio di inerzia si fa già riferimento alla nozione di tempo. Dunque quello che si afferma nella relatività di Poincaré e Einstein è che il tempo che viene definito con il procedimento di sincronizzazione (ovvero secondo il principio di costanza della velocità della luce) è compatibile anche con il principio di inerzia.

[17] Questa parte non è ancora stata scritta nelle presenti note.

[18] Dunque è chiaro che Poincaré ed Einstein hanno seguito un procedimento di tipo formale, trascurando come irrilevante il problema di fornire modelli che "spiegassero" il principio da essi assunto. Non meraviglia allora come in seguito sia avvenuto che Heisenberg, pur se con assoluta delicatezza, rimproverasse in qualche modo Einstein per l'atteggiamento da lui tenuto rispetto ai fondamenti della Meccanica Quantistica. Ciò è descritto molto bene in un saggio di Heisenberg contenuto nel suo libretto *Encounters with Einstein.* Infatti Heisenberg dice sostanzialmente ad Einstein: *" Tu ci hai insegnato (nella teoria della*

È ovvio che tale principio sia rivoluzionario: ad esempio le velocità non potranno sommarsi in maniera galileiana, perché altrimenti se un sistema inerziale K' trasla con velocità v rispetto ad un altro sistema inerziale K si avrebbe che la velocità della luce in K' sarebbe data da $c' = c - v \neq c$. Ma in generale risulta allora rivoluzionata la concezione dello spaziotempo (o spazio–tempo), e il punto cruciale consiste nel fatto che *si deve rinunciare alla assolutezza della contemporaneità* (non si può avere la moglie ubriaca e la botte piena).

In effetti, mostreremo che il principio di costanza della velocità della luce si traduce in maniera quasi automatica in un postulato sulla struttura geometrica dello spaziotempo, ovvero nella concezione che lo spaziotempo è munito di una metrica pseudoeuclidea che nei sistemi inerziali ha la forma $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2$ (spiegheremo più sotto il senso di questa frase) dove $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ è la consueta metrica euclidea. Corrispondentemente, le naturali trasformazioni di coordinate tra sistemi di riferimento inerziali risultano essere le trasformazioni di Lorentz, così come le rotazioni sono le naturali trasformazioni di coordinate nello spazio euclideo. Stabilito questo fatto (corretta geometrizzazione dello spaziotempo), tutto seguirà poi in maniera praticamente automatica (ad esempio, la famosa relazione $E = mc^2$, il modo in cui devono trasformarsi i campi elettromagnetici, ...).

Intermezzo: la fisica dei principi. Può essere interessante tracciare la seguente analogia tra la situazione che si è presentata per la relatività e quella che si era presentata con la teoria della gravitazione ai tempi di Newton.

Nel caso della teoria della gravitazione, Newton aveva mostrato come in qualche modo la "fenomenologia" impone la struttura matematica della forza di gravitazione, che deve decrescere come $1/r^2$. Infatti, egli sostanzialmente aveva mostrato come questa legge fosse una conseguenza necessaria, in qualche modo solo una trascrizione matematica, delle leggi "fenomenologiche" di Keplero. Nell'ultimo, famosissimo, scolio generale dei *Principia* (pag. 543 della traduzione di Motte rivista da Cajori, University of California Press (Berkeley, 1934)) Newton poi si domanda se si debba pensare che esistano delle descrizioni più fondamentali, che possano "spiegare" la legge di gravitazione (*"Hitherto we have explained the phenomena of the heavens and of our sea by the power of gravity, but have not yet assigned the cause of this power"*). Infatti erano stati molti i tentativi, ad esempio da parte di Cartesio, di fornire modelli (vortici di un mezzo etereo) che riducessero la gravitazione ad azioni "di contatto" invece come considerarla come una "azione a distanza". Newton dice che il problema è interessantissimo ma poi, con la famose frase *"hypotheses non fingo"*, dice che, qualunque modello si voglia tentare per "spiegare" la legge di gravitazione, in ogni caso il modello deve "rispettare il vincolo" da lui trovato, cioè deve avere come risultato la legge di gravitazione che decresce com $1/r^2$.

relatività) a prescindere dai modelli e ad assumere la forma come dato primo. Dunque non capisco perché ora tu invece insista con tanta cocciutaggine a volere trovare modelli per "spiegare la meccanica quantistica", quando disponiamo di una forma ben precisa e coerente, che prescinde completamente da modelli, e che noi siamo giunti a formulare proprio seguendo il tuo insegnamento a proposito della relatività".

D'altra parte, tenendo questo atteggiamento (*hypotheses non fingo*) Newton non faceva altro che seguire la tradizione di Galileo stesso, che non riteneva[19] *opportuno d'entrare al presente nell'investigazione della causa dell'accelerazione del moto naturale, intorno alla quale da vari filosofi varie sentenze sono state prodotte, riducendola alcuni all'avvicinamento al centro .... , altri a certa estrusione del mezo ambiente, il quale, nel ricongiungersi a tergo del mobile, lo va premendo e continuamente scacciando; le quali* ***fantasie****, con altre appresso, converrebbe andare esaminano e con poco guadagno risolvendo. Per ora basta al Nostro Autore che noi intendiamo che egli ci vuole investigare e dimostrare alcune passioni di un moto accelerato (****qualunque sia la causa della sua accelerazione****)*, in cui, partendo dalla quiete, la velocità cresca proporzionalmente al tempo.

Qui la situazione è analoga. Lorentz ricerca modelli per la propagazione della luce. Ma in ogni caso questi modelli devono rispettare il vincolo, imposto fenomenologicamente, che la velocità della luce sia la medesiima in tutti i sistemi inerziali. Quello di cui si sono occupati Poincaré ed Einstein è di ricercare quali conseguenze seguano dall' 'ipotesi" di costanza della velocità della luce, indipendentemente dal fatto che possa esistere un modello che eventualmente "spieghi" quell'ipotesi. Questo punto di vista veniva descritto da Poincaré come quello della "fisica dei principi".[20]

5.2.2 Le trasformazioni di Galileo e quelle di Lorentz

Ricordiamo dunque quali sono le trasformazioni di Galileo e quali sono le trasformazioni di Lorentz, che ne prendono il posto quando si postula il principio di costanza della velocità della luce. Consideriamo per semplicità il caso di un sistema di riferimento K' che trasli uniformemente lungo l'asse delle x di un sistema inerziale K (con gli assi orientati in maniera concorde), e sia $v \in \mathbb{R}$ la velocità (costante) di traslazione del sistema K' rispetto al sistema K. Allora si prende in considerazione un certo **evento** (un oggetto si trova in un certo luogo ad un certo tempo), che viene descritto nei due sistemi da due diversi insiemi di coordinate , rispettivamente (t, x, y, z) e (t', x', y', z'), e le trasformazioni di Galileo e di Lorentz (dipendenti parametricamente da $v \in \mathbb{R}$) forniscono la relazione esistente tra tali coordinate. Le trasformazioni di Galileo G_v sono

$$(G_v) : \begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{5.2.1}$$

[19]Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, giornata terza, parole di Salviati alla sesta pagine del testo.

[20]Si veda H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion (Parigi).

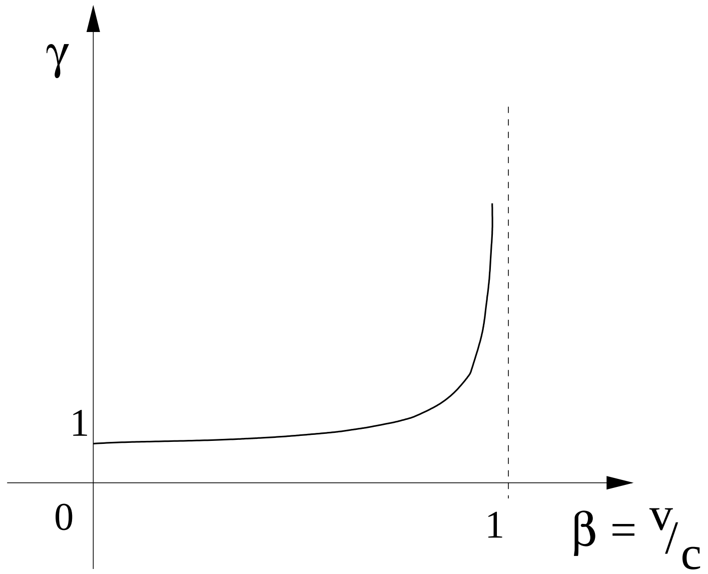

Figura 5.1: Grafico della funzione $\gamma = \gamma(|v|)$. Si noti quanto piatta sia la curva prima di inalzarsi in prossimità dell'asintoto $|v|/c = 1$.

mentre quelle di Lorentz L_v sono

$$(L_v) : \begin{cases} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \\ x' &= \gamma \left(x - vt\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{5.2.2}$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5.2.3}$$

è il celebre *fattore di Lorentz*, che presenta le seguenti proprietà (si veda la figura (5.1)):

- $\gamma(v)$ è definita solo per $|v| < c$; inoltre, $\gamma \geq 1$
- $\gamma(0) = 1$; inoltre, $\gamma \to +\infty$ per $|v| \to c$.

Osservazione (scritture diverse delle trasformazioni di Lorentz). Si noti bene il fattore v/c^2 nell'espressione di t': non si tratta di un errore di stampa. La trasformazione assume forma più simmetrica se invece di t si introduce la variable

ct, perché essa si scrive allora (con $\beta = v/c$)

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\,\big(ct - \beta\, x\big) \\ x' &= \gamma\,\big(x - \beta\, ct\big) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

La cosa più semplice è poi scegliere addirittura unità di misura in cui vale $c = 1$, sicché la trasformazione si scrive (con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, avendo preso $c = 1$)

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\,\big(t - vx\big) \\ x' &= \gamma\,\big(x - vt\big) \\ y' &= y \\ z' &= z\ . \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Si noti la simmetria dei fattori $t - vx$ e $x - vt$ nelle prime due relazioni.

Se si confrontano le trasformazioni di Lorentz con quelle di Galileo, si notano imediatamente due differenze essenziali,

- 1) Anzitutto si ha la presenza del fattore γ che già altera già la relazione galileiana $x' = x - vt$ (questo determina ad esempio la celebre contrazione delle lunghezze, di cui parleremo più avanti), ma entra poi come fattore anche nella relazione tra t' e t. Due conseguenze immediate della presenza del fattore γ (limitazione sulla velocità delle particelle, limite galileiano) verranno discusse subito sotto.

- 2) Ma la seconda modificazione, ancora più rilevante, è quella che riguarda la relazione $t' = \gamma(t - vx/c^2)$, perché (anche indipendentemente dalla presenza del fattore γ) essa comporta la **non assolutezza della contemporaneità, ovvero l'esistenza del "tempo locale".** Infatti, gli eventi contemporanei per K' sono il sottoinsieme caratterizzato da t' =cost, ad esempio $t' = 0$. Ma la relazione $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ mostra che questo insieme di eventi $t' = 0$, quando venga letto nel sistema di coordinate di K, non coincide con un sottoinsieme di contemporaneità per K, cioè non coincide con un insieme definito da t =cost, perché esso è invece definito da $t - vx/c^2 = 0$. Pertanto, per conoscere il tempo t' rispetto a K' non basta conoscere il tempo t rispetto a K, ma bisogna conoscere anche la posizione x rispetto a K. (Lorentz descriveva questo fatto dicendo che "il tempo è locale").

Illustriamo ora due immediate conseguenze fondamentali della presenza del fattore γ, con le proprietà $\gamma \to \infty$ per $|v| \to c$, e $\gamma \to 1$ per $v \to 0$.

- 1a) **Si ha necessariamente $|v| < c$:** la velocità relativa di un sistema inerziale rispetto a ogni altro ha sempre modulo inferiore alla velocità della luce. Questo fatto implica anche una **limitazione sulla velocità delle particelle**: la velocità di una particella rispetto a un sistema inerziale ha sempre modulo inferiore a c. In altri termini: **in un fissato sistema di riferimento inerziale non è possibile accelerare una particella, mediante delle forze, fino a portarla ad una velocità superiore o uguale a quella della luce**. Infatti, se ciò fosse possibile, allora si potrebbe associare alla particella (portata alla sua velocità finale e lasciata poi libera) un sistema di riferimento inerziale che avrebbe velocità di traslazione rispetto al primo superiore o uguale a quella della luce, ciò che non è consentito dalle trasformazioni di Lorentz. [21]

- 1b) **Limite galileiano, o principio di corrispondenza**. Asintoticamente, per $c \to +\infty$, le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo:
$$L_v \to G_v \quad \text{per} \quad c \to \infty \ .$$
In altri termini, nell'approssimazione in cui la velocità della luce possa essere considerata infinita, le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo. Ricordiamo che si chiama **principio di corrispondenza** quello secondo cui una nuova teoria si riduce a una teoria precedente in qualche limite. Qui si tratta del limite $c \to \infty$. Nella meccanica quantistica si tratta invece del limite $h \to 0$, dove h è la costante di Planck.

Un'altra (quasi immediata) conseguenza delle trasformazioni di Lorentz è la **composizione relativistica delle velocità** che deduciamo subito qui di seguito, mentre rimandiamo le celebri contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi a un prossimo paragrafo, dopo che ci saremo familiarizzati con lo spaziotempo.

Conviene qui cambiare notazione, e denotare con $v_{\rm tr}$ (invece che con v) la velocità di trascinamento di K'. Si ha il

Teorema: Composizione relativistica delle velocità. *Siano due sistemi inerziali K e K', con K' che trasla con velocità $v_{\rm tr}$ lungo l'asse x di K. Consideriamo un punto che si muove lungo l'asse x, sicché il suo movimento*

[21] Questa proprietà è veramente caratteristica per la teoria della relatività. Il punto rilevante è che si comincia facendo delle considerazioni apparentemente di tipo cinematico, riguardanti la velocità della luce, e si ottengono conclusioni che riguardano la dinamica delle particelle. Questo intreccio di proprietà cinematiche e proprietà dinamiche ha il suo culmine nella relazione $E = mc^2$ e nella sua controparte matematica (che sarà illustrata in un prossimo paragrafo) che consiste in quanto segue: la metrica (o equivalentemente, come si dice, l'elemento di linea) dello spaziotempo, definita originariamente mediante proprietà riguardanti la luce, costituisce un elemento centrale anche per la dinamica delle particelle dotate di massa. Risulterà infatti che sia i moti dei raggi di luce, sia i moti delle particelle dotate di massa, sono rappresentati da curve dello spaziotempo che sono geodetiche rispetto alla medesime metrica. Il significato di questa frase verrà spiegato più sotto.

è descritto in K e K' rispettivamente da certe funzioni $x = x(t)$, $x' = x'(t')$. Vogliamo confrontare la velocità $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ rispetto a K (velocità assoluta) con la velocità $v' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}$ rispetto a K' (velocità relativa). Si ha

$$v = \frac{v' + v_{\mathrm{tr}}}{1 + v' v_{\mathrm{tr}}/c^2}$$

(in particolare, se $v' = c$ si ha $v = c$). Se poi la velocità del punto ha anche una componente fuori dall'asse delle x, diciamo ${v'}_y \neq 0$, allora si ha

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{{v'}_x + v_{\mathrm{tr}}}{1 + {v'}_x v_{\mathrm{tr}}/c^2} \\ v_y &= \frac{{v'}_y \sqrt{1 - {v_{\mathrm{tr}}}^2/c^2}}{1 + {v'}_x v_{\mathrm{tr}}/c^2} \ . \end{aligned}$$

Nel limite nonrelativistico $|v_{\mathrm{tr}}|/c \ll 1$ si riottengono le formule di Galileo $v_x = {v'}_x + v_{\mathrm{tr}}$, $v_y = {v'}_y$.

Dimostrazione. Conviene considerare la trasformazione di coordinate inversa[22] (da K' a K), che si mostra subito avere la stessa forma di quella diretta, pur si sostituire v_{tr} con $-v_{\mathrm{tr}}$. [23] Si ha dunque (ponendo per semplicità di notazione $c = 1$, e usando $\mathrm{d}x' = v'_x\, \mathrm{d}t'$)

$$(L_{v_{\mathrm{tr}}})^{-1} : \begin{cases} t &= \gamma(t' + v_{\mathrm{tr}} x') \\ x &= \gamma(x' + v_{\mathrm{tr}} t') \\ y &= y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}t &= \gamma(\mathrm{d}t' + v_{\mathrm{tr}} \mathrm{d}x') = \gamma(1 + v_{\mathrm{tr}} {v'}_x)\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x &= \gamma(\mathrm{d}x' + v_{\mathrm{tr}} \mathrm{d}t') = \gamma({v'}_x + v_{\mathrm{tr}})\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}y &= \mathrm{d}y' \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{{v'}_x + v_{\mathrm{tr}}}{1 + {v'}_x v_{\mathrm{tr}}} \ , \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \gamma^{-1} \frac{{v'}_y}{1 + {v'}_x v_{\mathrm{tr}}} .$$

Esercizio: Si mostri che la composizione di due velocità minori (in modulo) di c fornisce una velocità minore di c. [Suggerimento (si veda l'articolo originario di Einstein, sez. 5).] In particolare si mostri che, se $v = c$, allora la velocità composta è ancora uguale a c.

Osservazione. Dopo avere ottenuto la legge di composizione delle velocità nel modo sopra riportato, Einstein aggiunge (sez. 5): " *Avremmo potuto ottenere la formula* (di composizione delle velocità) *anche con il procedimento di comporre due trasformazioni di coordinate .... Da questo vediamo anche che tali trasformazioni formano un gruppo.*" Su questo punto ritorneremo più sotto.

[22] Semplicemente per il fatto che vogliamo esprimere direttamente la velocità assoluta v in funzione di quella relativa v'. Non cambierebbe nulla se si tenesse la trasformazione da K a K'.

[23] La verifica è banalissima. Più avanti vedremo comunque come questo fatto debba ritenersi noto a priori.

5.2.3 Sulla deduzione delle trasformazioni di Lorentz

La dimostrazione più compatta e più profonda delle trasformazioni di Lorentz viene compiuta nel modo seguente, che è quello seguito ad esempio da Landau e Lifshitz (e prima ancora da Pauli).

- 1) Si mostra che le trasformazioni tra sistemi inerziali sono affini (e in pratica possono essere prese lineari).
- 2) In tre righe si mostra (seguendo il celebre lavoro di Einstein del 1905) che dal principio di costanza della velocità della luce e dal principio di relatività segue che le trasformazioni devono avere la proprietà che
$$c^2t'^2 - l'^2 = c^2t^2 - l^2 \ , \tag{5.2.6}$$
dove $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $l'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ sono le consuete espressioni pitagoriche per i quadrati delle distanze spaziali nei due sistemi inerziali (si sottintende, che si ammette che nei due sistemi valga le geometria euclidea in ogni "sezione temporale" t = cost o rispettivamente t' =cost). Dalla identità (5.2.6) segue poi (con passaggi analitici banali che richiedono solo di conoscere le proprietà elementari delle funzioni iperboliche come seno iperbolico etc.) che le trasformazioni di coordinate sono quelle di Lorentz, oppure quelle di una classe più generale costituente il cosiddetto *gruppo di Poincaré* (che si ottengono da quelle di Lorentz aggiungendo riflessioni di assi – compreso quello temporale). Nel seguito denoteremo con il medesimo simbolo L tutte le trasformazioni del gruppo di Poincaré.

Risulta dunque che che l'identità (5.2.6) non svolge solo un ruolo strumentale per dedurre le trasformazioni di Lorentz (o più in generale quelle del gruppo di Poincaré), ma in un certo senso addirittura **le definisce**. Essa ha in tal modo un ruolo fondamentale nella teoria della relatività, per il fatto che, se si sa leggerla, essa manifesta una profonda proprietà geometrica dello spaziotempo, ovvero che lo spaziotempo è munito di un prodotto scalare che costituisce una generalizzazione di quello familiare euclideo.

Ricordiamo che nello spazio ordinario, avendo fissato un'origine, ogni punto è individuato da un vettore. È assegnato poi in maniera intrinseca (indipendente dalla base) un prodotto scalare, che determina in particolare la lunghezza di ogni vettore. Inoltre il prodotto scalare determina delle basi ortonormali, con la proprietà caratteristica che se x, y, z e x', y', z' sono le componenti di un medesimo vettore rispetto a due tali basi, allora il quadrato della lunghezza si esprime rispetto ad esse in maniera pitagorica, cioè si ha
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \ .$$
Corrispondentemente, la trasformazione di coordinate da x, y, z a x', y', z' è una rotazione (o una rotazione più riflessioni di assi, ovvero una trasformazione ortogonale), dipendente parametricamente da due angoli (o un solo angolo, se ci limitiamo a trasformazioni in un piano).

La lettura della identità (5.2.6) è ora analoga. Invece dello spazio ordinario si ha uno spazio quadridimensionale (lo spaziotempo). Avendo fissato un'origine, ogni punto (evento) è individuato da un vettore, e ogni sistema di riferimento inerziale mediante i suoi regoli ed orologi ne fissa le coordinate (il che corrisponde a fissare una base). La differenza è ora che la relazione (5.2.6) ci dice che esiste ancora un prodotto scalare (ora, nello spaziotempo) con la differenza però che esso è pseudoeuclideo anziché eucllideo. Si ha ancora una lunghezza dei vettori (e delle curve), e questa si interpreta (per le curve di tipo tempo – vedi più avanti) come tempo proprio, cioè come tempo letto dall'osservatore *comobile* con l'oggetto di cui si segue il moto. Le trasformazioni di coordinate analoghe alle rotazioni (o alle rotazioni più riflessioni di assi, ovvero gruppo delle trasformazioni ortogonali) sono ora le trasformazioni di Lorentz (o quelle del gruppo di Poincaré). Queste proprietà geometriche hanno poi una immediata conseguenza per le proprietà meccaniche degli oggetti, di cui la più significativa è l'esistenza dell'energia a riposo ($E = mc^2$). A questo fatto (che potremmo chiamare **geometrizzazione del principio di costanza della velocità della luce**) dedicheremo una parte rilevante nella seconda parte di questo capitolo.

Si può dare poi, per le trasformazioni di Lorentz, una "deduzione" ancora più elementare, a livello di liceo, che fu in effetti data da Einstein stesso nella sua "esposizione divulgativa". Abbiamo scelto di premettere questa dimostrazione di Einstein a quella del tipo di Landau e Pauli, che verrà data subito dopo. [24]

Premetteremo comunque un paragrafo attraverso il quale cercheremo di familiarizzarci con lo spaziotempo. In ogni caso, dopo avere dedotto la trasformazione di Lorentz, potrà essere utile per il lettore compiere l'esercizio di ritornare sulla familiare deduzione della trasformazione di Galileo, illustrata qui alla figura (5.2), per mettere in luce quale è stato lo strumento fondamentale che ha permesso di scardinare quella dimostrazione.

5.3 Lo spaziotempo (o spazio–tempo)

Spesso una difficoltà nel comprendere la relatività speciale è legata al fatto di non essere familiari con certe notazioni o certi modi di dire che nulla hanno a che fare con essa, e riguardano invece nozioni generali di geometria. Cerchiamo ora di chiarire questi aspetti in relazione allo spaziotempo, che ha nella teoria della relatività un ruolo analogo a quello del familiare spazio ambiente nella geometria elementare.[25]

[24] Il motivo è che la dimostrazione "alla Landau e Pauli", per quanto semplicissima, ha in qualche modo un aspetto "un po' più formale", e un lettore non espertissimo potrebbe forse "capirla" meno fortemente, rispetto a quella dell'esposizione divulgativa.

[25] Il fatto che ogni osservatore debba pensarsi munito di una sua sensazione sia per lo spazio che per il tempo, e perdipiù a priori indipendenti da quelli di un altro osservatore, è cosa ovvia in filosofia. Ne è una buona testimonianza un lungo passo di A. Schopenhauer

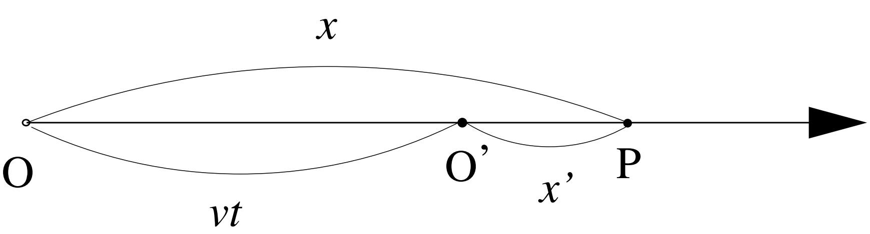

Figura 5.2: Deduzione elementare delle trasformazioni di Galileo. Il sistema di riferimento K' trasla con velocità v lungo l'asse delle x del sistema K. Fotografando la situazione a un generico istante t (che si suppone uguale a t'), l'origine spaziale O' di K' ha ascissa vt nel sistema K, mentre un punto generico P ha ascissa x rispetto a K (con origine spaziale O), e ascissa x' rispetto a K' (con origine spaziale O'). Dunque si ha $x = vt + x'$, ovvero $x' = x - vt$.

A mo' di introduzione a questo paragrafo riportiamo la seguente frase di Einstein:

"È un errore assai diffuso pensare che la teoria della relatività abbia scoperto per la prima volta, o perlomeno reintrodotto, la quadridimensionalità del continuo fisico. Questo naturalmente non è vero. Anche la meccanica classica è basata sul continuo quadridimensionale dello spazio e del tempo. Solo che, nel continuo quadridimensionale della fisica classica, le "sezioni" corrispondenti a valori costanti nel tempo hanno una realtà assoluta, cioè indipendente dal sistema di riferimento. Il continuo quadridimensionale, pertanto, si scinde in un continuo tridimensionale e in uno monodimensionale (il tempo), e il punto di vista quadridimensionale non si impone come necessario. La teoria della relatività ristretta, invece, crea un rapporto di dipendenza formale tra il modo in cui le coordinate spaziali da un lato e la coordinata temporale dall'altro devono entrare nelle leggi naturali".

a) Divenire nello spazio ed essere nello spaziotempo.
Cominciamo qui a chiarire la prima parte della frase di Einstein relativa allo spaziotempo, cercando di illustrare il seguente *slogan*, dovuto ad Einstein stesso:

Il "divenire nello spazio" si manifesta come un "essere nello spaziotempo"[26].

Si procede nel modo seguente. Nella meccanica ordinaria ben conosciamo la nozione di movimento di un punto, descritto da una funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, cioè una legge che ad ogni tempo $t \in \mathbb{R}$ assegna un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(si veda A. Schopenhauer, *Il mondo come volontà e rappresentazione* (Leipzig, 1859), paragrafo 4 (pag. 46 della traduzione italiana, Mursia (Milano, 1991)).

[26] *Da un "accadere"nello spazio tridimensionale, la fisica diventa, per così dire, un "essere" nell' "universo" a quattro dimensioni* (Relatività: Esposizione divulgativa, Appendice 2).

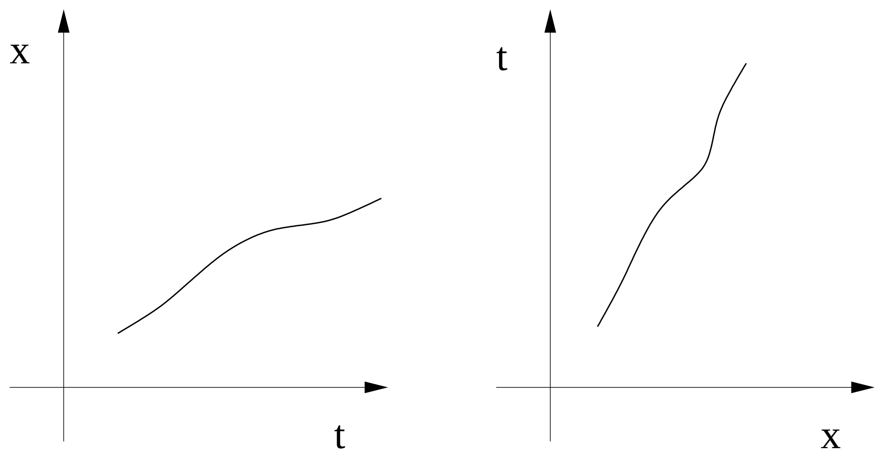

Figura 5.3: Rappresentazione di una funzione $x = x(t)$ nel piano (t, x) e nel piano (x, t)

Limitandoci al caso di una sola coordinata spaziale x, si ha così una funzione $x = x(t)$, da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, che siamo abituati a rappresentare nel piano cartesiano (t, x).

Per inciso, una prima stranezza consiste nel fatto che in quasi tutti i testi di relatività si riporta la variabile indipendente t in ordinata invece che in ascissa (Figura 5.3); è questa ovviamente una circostanza irrilevante, di cui possiamo dimenticarci.

Invece il punto rilevante è che la funzione $x = x(t)$ viene riguardata come un sottoinsieme, precisamente una **curva**, nel prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (il piano con coordinate (x, t)). Questo ancora è un fatto che nulla ha a che fare con la relatività, ma è anzi un fatto generale riguardante le funzioni. Infatti nei moderni testi di analisi (si veda ad esempio G. Prodi, *Analisi I*) una funzione $y = y(x)$ è riguardata come un sottoinsieme γ (lettera greca gamma) del piano (x, y), con la proprietà (Figura 5.4) che se $(x, y_1) \in \gamma$, $(x, y_2) \in \gamma$, allora $y_1 = y_2$. Questa definizione, che potrebbe sembrare solo un modo inutilmente complicato di riprodurre la consueta definizione di funzione (ad ogni x corrisponde un solo y), ha in effetti dei vantaggi, ad esempio per il fatto che non richiede di precisare il dominio di definizione.[27] In ogni caso, dovrebbe ora essere chiaro cosa si intende quando si dice che **un movimento è una curva nello spaziotempo**: per un osservatore che dispone delle sue coordinate spaziali x, y, z e della sua coordinata temporale t, lo spaziotempo è semplicemente il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, e un movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ ne è un sottoinsieme monodimensionale, con la proprietà che per ogni $t \in \mathbb{R}$ è dato un solo $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$; e lo slogan di Einstein dovrebbe apparire chiaro.

[27] Più in generale, una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un opportuno sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.

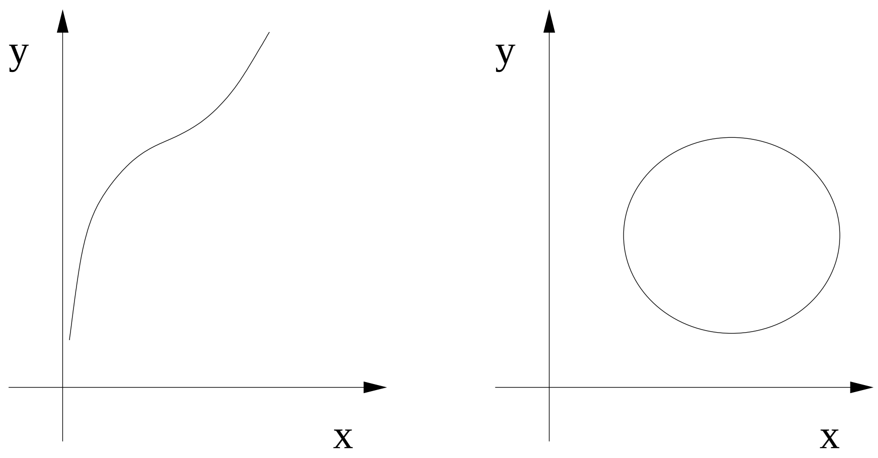

Figura 5.4: Curva che corrisponde a una funzione (sinistra) e curva che non corrisponde a una funzione (destra)

In un prossimo paragrafo ricorderemo la definizione analitica di curva come classe di equivalenza di curve parametrizzate, già utilizzata nel capitolo sui principi variazionali.

Vediamo alcuni esempi importanti di curve, facendo riferimento alla figura 5.5. Nella figura, γ_1 e γ_3 sono due curve nello spaziotempo descriventi oggetti puntiformi che nel sistema di riferimento considerato non si muovono (l'origine delle coordinate spaziali, e un oggetto puntiforme di coordinata spaziale positiva costante); γ_2 è la curva che descrive un oggetto puntiforme che rispetto al sistema considerato si muove con una certa velocità $v \neq 0$ e al tempo zero ha una certa coordinata spaziale positiva. Facciamo presente che un punto nello spaziotempo viene chiamato **evento** e una curva nello spaziotempo viene chiamata **world–line** (linea di mondo o linea di universo). Di consueto, invece di t sull'asse temporale si usa riportare ct; in altri termini si misura il tempo mediante il corrispondente spazio ct percorso dalla luce nel tempo t.[28] Questo è assolutamente irrilevante (più comodo di tutto è addirittura porre $c = 1$, cioè scegliere unità di misura in cui è $c = 1$). Esempi con due coordinate spaziali sono riportati in figura 5.6. A sinistra si ha una *wordline* descrivente il moto di una particella. A destra si ha una superficie bidimensionale, il "cono di luce" nello spaziotempo, cui corrisponde una famiglia di "fronti d'onda" (proiezioni delle "sezioni" t =cost sul piano x, y a diversi tempi t).

b) I sistemi inerziali come "carte" di una varietà: lo spaziotempo come definito dalle trasformazioni di Lorentz tra le carte.

[28] Questo è l'inverso di quello che si fa in astrofisica, dove è la distanza che viene misurata come un tempo (anni luce), essendo una distanza individuata dal tempo che la luce impiega a percorrerla.

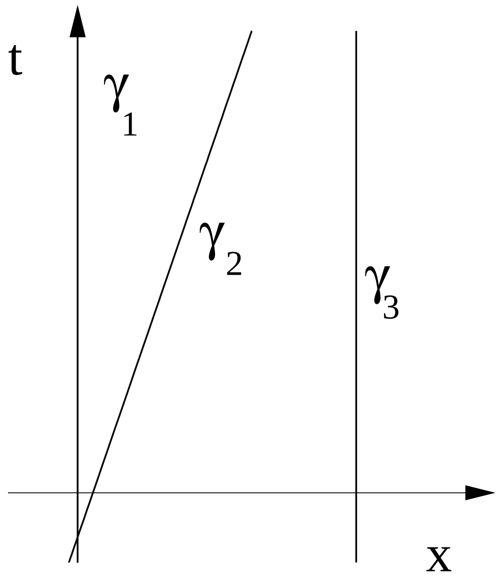

Figura 5.5: Particolari curve nello spaziotempo. Caso di una coordinata spaziale.

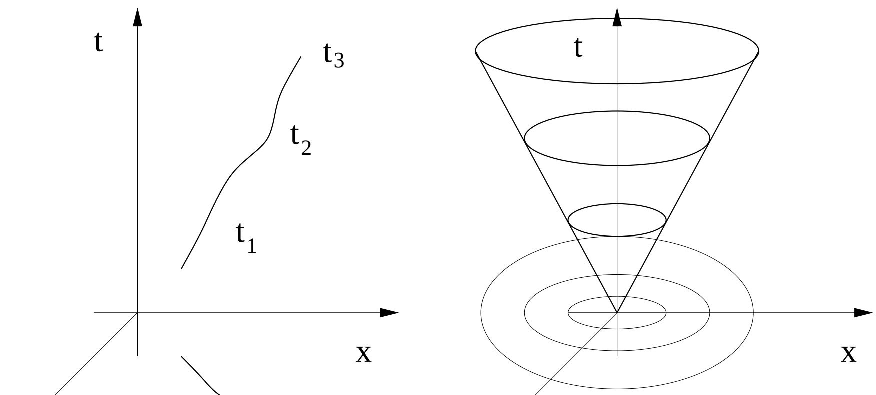

Figura 5.6: Caso di due coordinate spaziali. 1) Un oggetto puntiforme si sposta nello spazio (*divenire nello spazio*) e il movimento è rappresentato da una curva "ferma" nello spaziotempo (*essere nello spaziotempo*). 2) I fronti d'onda si muovono (*divengono*) nello spazio, e il loro movimento è descritto da una superficie "ferma" (*è*) nello spaziotempo: si tratta di un cono, che nel caso dei fenomeni luminosi è il famoso " *cono di luce*".

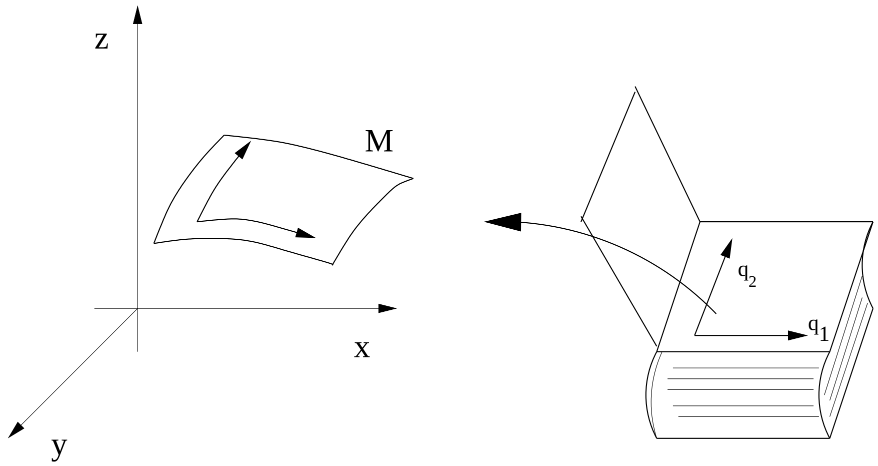

Figura 5.7: Rappresentazione locale di una superficie M mediante una carta di un atlante, con coordinate (q_1, q_2).

Un altro concetto che bisogna avere ben presente è che ogni osservatore rappresenta lo spaziotempo mediante una sua "carta", cioè mediante un sistema di coordinate, e in particolare nella propria carta dispone di "linee coordinate" (linee lungo le quali varia una sola coordinata, mentre le altre hanno valore costante). Conviene dunque avere ben presente la distinzione tra lo spaziotempo "ideale" da una parte, e dall' altra le sue infinite rappresentazioni, date ciascuna da ogni diverso osservatore inerziale mediante le sue coordinate (cioè mediante la sua carta). A questo proposito può essere utile ricordare la figura illustrativa fondamentale (figura (5.7) che è stata data nel capitolo sulle equazioni di Lagrange quando si richiamavano dei concetti elementari di geometria. Lì si considerava una superficie M immersa in $\mathbb{R}^3$, e si mostrava come essa fosse descritta localmente mediante una carta (con le corrispondenti coordinate), come si avesse poi un atlante di carte, e come esistessero tra diverse carte dei " cambiamenti di coordinate".[29] Qui l'analogo della varietà M è lo spaziotempo stesso, però non immerso in nulla ma esistente in sé, e l'analogo di una carta dell'atlante è un osservatore K con le sue coordinate temporale e spaziali. Dunque, in particolare, poiché ad ogni fissato punto–evento dello spaziotempo "ideale" corrisponde un ben preciso "punto rappresentativo" in ogni "carta" (cioè in ogni sistema di riferimento), allora per ogni coppia di osservatori K, K' deve esistere una ben definita funzione biunivoca che manda un punto rappresentativo di una carta in un punto rappresentativo dell'altra (funzione di trasferimento, o cambiamento di coordinate). Dunque in particolare in

[29] Questi sono definiti da certe funzioni, che talvolta vengono chiamate "funzioni di trasferimento".

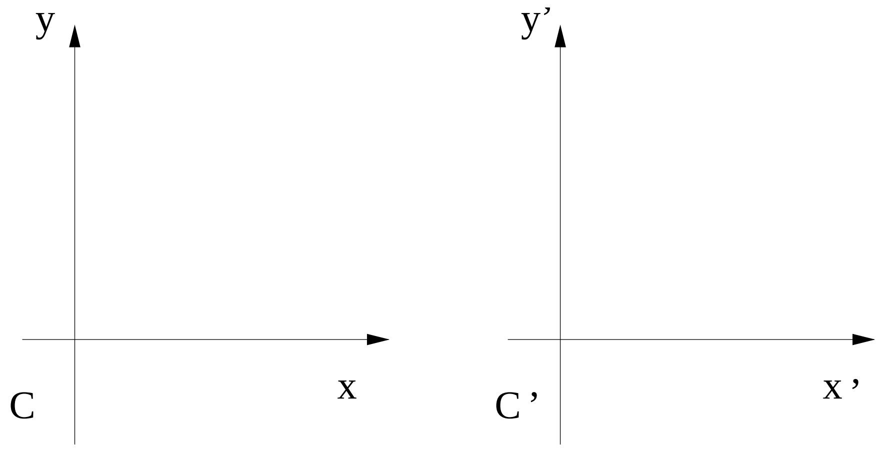

Figura 5.8: Due diverse carte C, C' con coordinate (x, y), (x', y'). L'asse y' (ovvero la retta $x' = 0$) della carta C' viene letto nella carta C come una particolare curva (qui una retta). Analogamente per l'asse x' (ovvero la retta $y' = 0$).

un sistema di riferimento si possono rappresentare non solo le "linee coordinate" di quel sistema stesso, ma anche le linee coordinate di ogni altro sistema.

Consideriamo il caso di una superficie M immersa in $\mathbb{R}^3$, che, come quella della figura (5.7) sia il grafico di una funzione $z = z(x, y)$. In tal caso, localmente come coordinate della superficie si possono prendere le coordinate cartesiane (x, y) oppure delle altre coordinate cartesiane (riferite ad un osservatore ruotato rispetto al primo) (x', y'), e si hanno così due carte, C, C' (figura 5.8). E poichè un punto $P \in M$ ha coordinate (x, y) nella prima carta e (x', y') nella seconda, allora esiste una corrispondenza biunivoca tra due aperti delle due carte; ad esempio, la linea coordinata y' (cioè $x' = 0$) di C' è rappresentata da una certa linea nella carta C.

La situazione presente è simile. Ogni osservatore inerziale, K oppure K', è munito di una sua carta con coordinate temporale e spaziali (ct, x, y, z) e rispettivamente (ct', x', y', z') (ci riferiamo al caso in cui le coordinate "spaziali" sono cartesiane ortogonali);[30] ma ora lo spaziotempo non è immerso in nulla. L'unica cosa di cui disponiamo (seguendo una concezione iniziata da Riemann[31]) sono le carte dei vari osservatori, con una corrispondenza biunivoca tra ogni coppia di esse. In particolare, nella corrispondenza biunivoca, l'asse t' (ovvero $x' = 0, y' = 0, z' = 0$) viene letto in K come la

[30] Abbiamo già osservato che si assume che, per ogni osservatore inerziale K, in ogni "sezione" $t =$ cost esiste la consueta metrica euclidea, e dunque esistono coordinate (spaziali) cartesiane ortogonali.

[31] Nella sua famosa dissertazione del 1854.

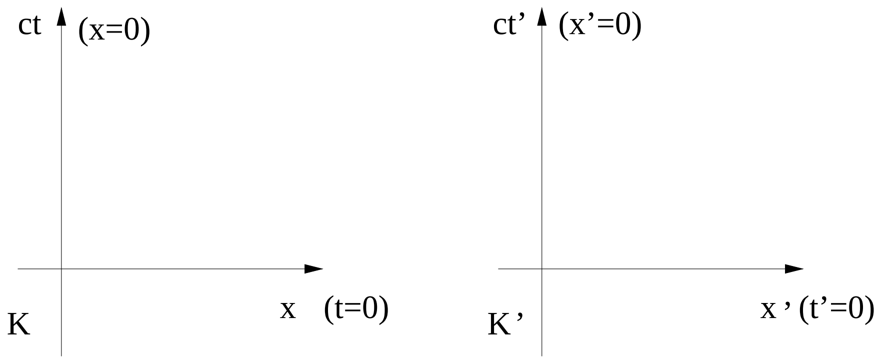

Figura 5.9: Le carte dello spaziotempo corrispondenti agli osservatori K e K'. Il fatto che K' trasli con velocità v rispetto a K si esprime con la condizione che la trasformazione di coordinate tra le corrispondenti carte deve inviare l'asse t' (ovvero la retta $x' = 0$, descrivente l'origine spaziale di K' ferma in K') nella retta $x - vt = 0$.

retta $x - vt = 0, y = 0, z = 0$, se v è la velocità di K' rispetto a K[32].

c) Principio di costanza della velocità della luce e nonassolutezza della contemporaneità.
Veniamo ora alla seconda parte della citazione di Einstein, riguardante le "sezioni temporali". Il fatto è che, secondo Galileo e Newton, il tempo è assoluto e quindi la "sezione dello spaziotempo" definita da $t' =$ cost, ad esempio $t' = 0$, viene letta in K come la sezione $t =$ cost, ad esempio $t = 0$; in altri termini, la trasformazione di coordinate deve essere tale da mandare la retta $t' = 0$ di K' nella retta $t = 0$ di K, e più in generale le rette $t' =$ cost nelle rette $t =$ cost. In questo senso la distinzione tra spazio e tempo è assoluta (cioè non dipende dall'osservatore), o equivalentemente il tempo è assoluto.

Sappiamo che il principio di assolutezza del tempo implica che le trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali siano necessariamente le *trasformazioni di Galileo G_v* date da $t' = t$, $y' = y$, $z' = z$, $x' = x - vt$, dove v è la velocità di traslazione di di K' rispetto a K. Da ciò segue che la concezione del tempo assoluto è incompatibile con il principio di costanza della velocità della luce. Infatti, poiché dalle trasformazioni di Galileo segue la legge galileiana di composizione delle velocità $v' = v - v_{\rm tr}$ (in queste righe, denotiamo con $v_{\rm tr}$ la velocità di traslazione del sistema K' rispetto a K, mentre riserviamo le notazioni v e v' per la velocità di una particella relativa ai due sistemi K, K'), allora si avrebbe anche $c' = c - v_{\rm tr} \neq c$ mentre il principio

[32] Ammettiamo che l'origine spaziale di K' trasli lungo l'asse delle x di K, che i due assi x e x' siano sovrapposti, e che $(ct, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ corrisponda a $(ct', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$, e dunque l'origine spaziale di K' compia il moto $x(t) = vt, y(t) = 0, z(t) = 0$.

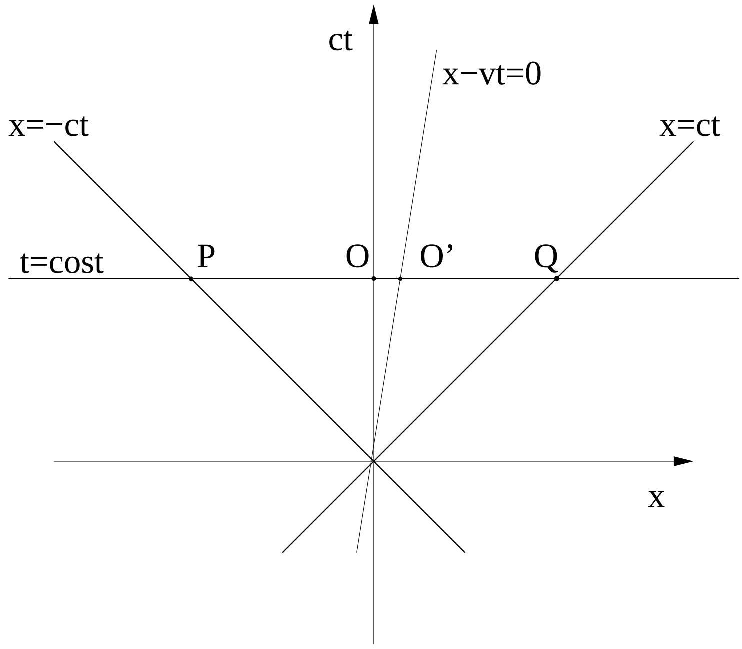

Figura 5.10: Il principio di costanza della velocità della luce implica la non assolutezza della contemporaneità (prima parte).

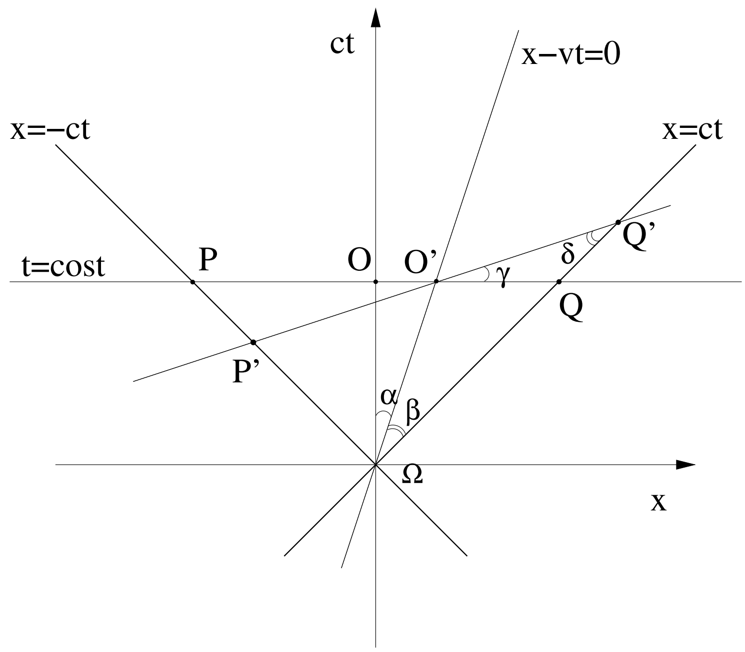

Figura 5.11: Il principio di costanza della velocità della luce implica la non assolutezza della contemporaneità (parte seconda).

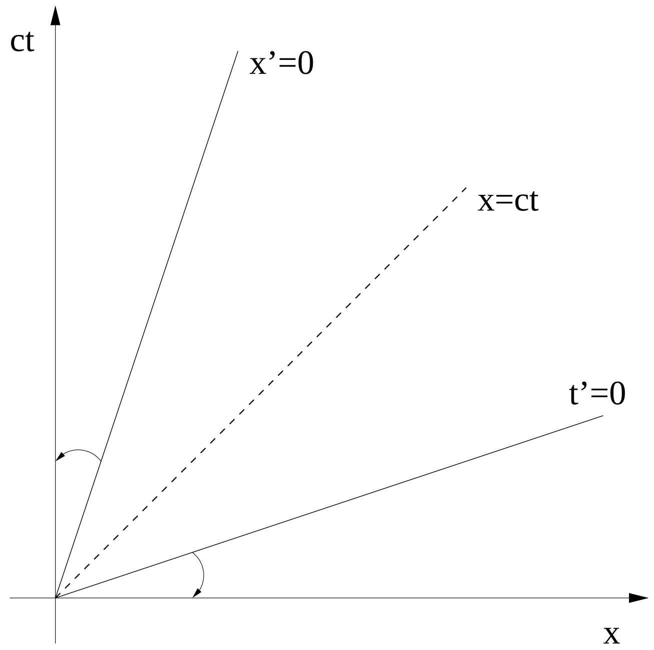

Figura 5.12: Gli assi x' e t' di K', letti nel sistema K, appaiono ugualmente inclinati (verso la bisettrice) rispetto agli assi x e t di K.

di costanza della velocità della luce richiede $c' = c$. Si osservi che "tempo assoluto" significa anche "assolutezza della contemporaneità": due eventi contemporanei per K (cioè con $t_1 = t_2$) sono contemporanei anche per K' (sono cioè tali che $t'_1 = t'_2$). È proprio questo che bisogna lasciare cadere se si vuole salvare il principio di costanza della velocità della luce:

Se si vuole salvare il principio di costanza della velocità della luce, è necessario che le rette $t' =$ cost di K' vengano lette in K come rette opportunamente inclinate rispetto alle rette $t =$ cost, cioè rispetto all'asse delle ascisse.[33]

Mostreremo questo fatto nel prossimo paragrafo in maniera analitica elementare, seguendo l'esposizione divulgativa di Einstein. Ma può essere anche utile convincersene qualitativamente con un argomento geometrico (che verrà poi da noi esteso in maniera quantitativa a dedurre le trasformazioni di Lorentz) nel modo seguente.

Per semplicità, consideriamo il caso in cui si trascurano le coordinate y e z, sicché lo spaziotempo si riduce al piano con coordinate (t, x) e (t', x').

[33] Abbiamo qui considerato il caso in cui si trascurano le coordinate y e z, sicché lo spaziotempo si riduce al piano con coordinate t, x, t', x'.

Si considera un segnale luminoso emesso nel "punto–evento" $(t, x) = (0, 0)$ di K. Per l'osservatore K, ad ogni suo tempo t il fronte d'onda (luogo dei punti spaziali raggiunti dalla luce al tempo t; si pensi all'analogia con le onde causate da un sasso buttato in acqua) è costituito dai due punti–eventi (dello spaziotempo) P e Q aventi la medesima ordinata t e ascisse rispettivamente $x = +ct, x = -ct$. Questi sono punti simmetrici rispetto al punto–evento O (dello spaziotempo) di ordinata t e di ascissa $x = 0$ (corrispondente al luogo in cui è stato buttato il sasso, rispetto all'osservatore "stazionario" K, visto al tempo t). Ma nel frattempo l'osservatore K' si è mosso (su una barca) lungo l'asse x, e al tempo t di K l'origine spaziale di K' ha rispetto a K coordinata spaziale vt (cioè si trova nel punto–evento O' dello spaziotempo rappresentato in figura). Quindi, se la retta $t' =$ cost, letta nel sistema K, coincidesse con la retta $t =$ cost, il fronte d'onda (l'insieme dei due punti–eventi (P, Q) in figura) sarebbe asimmetrico rispetto ad O', ovvero la luce si propagherebbe nelle due direzioni (destra e sinistra) con velocità diverse. Si potrà avere costanza della velocità della luce solo se la retta $t' =$ cost viene letta in K non come una retta $t =$ cost, ma come una retta passante per O' e inclinata in maniera tale che i due punti–eventi P', Q' in cui essa incontra le bisettrici di K (cono di luce, luogo dei punti–evento $x - ct = 0$, $x + ct = 0$) sono simmetrici rispetto a O'. Vedremo nel prossimo paragrafo che risulta che la retta $t' =$ cost deve essere letta in K come una retta inclinata rispetto all'asse x (verso la bisettrice del primo quadrante, nel caso $v > 0$)) esattamente nello stesso modo in cui la retta $x' = 0$ è inclinata (verso la stessa bisettrice) rispetto all'asse t (se $c = 1$).

Esercizio.

- 1) Si dimostri per via geometrica quanto sopra affermato, ovvero che il principio di costanza della velocità della luce implica che la retta $t' = 0$ deve essere letta in K come una retta inclinata verso la bisettrice del primo quadrante, esattamente dello stesso angolo di cui è inclinata la retta $x' = 0$.[34]

- 2) Si legga questa affermazione in maniera analitica, come implicante che la legge di trasformazione da K a K' è data (per semplicità di notazione scegliamo unità di misura con $c = 1$) da

$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt) \\ t' &= b(t - vx)\ , \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

con due fattori $a = a(v)$, $b = b(v)$ ancora indeterminati.

[34]Si veda anche H. Weyl, *Space, time, matter*, pag 174, che si riferisce al caso quadridimensionale dicendo: *"... each plane t' =const has a measure–determination such that the ellipse in which it intersets the light–cone", is a circle, and the Euclidean geometry holds for it. The point at which it is punctured by the t'–axis is the mid–point of the elliptical section. So the propagation of light takes place, in the "accented" system of reference, too, in concentric circles".*

- 3) Si mostri poi come i fattori $a(v)$ e $b(v)$ vengono determinati se si impone la condizione
$$L_v^{-1} = L_{-v} \ .$$
Questa relazione è una immediata conseguenza del principio di relatività, come verrà mostrato poco più avanti. Basta allora scrivere esplicitamente la semplicissima espressione della trasformazione inversa per trovare
$$a = b \equiv \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \ .$$
Si sono ottenute in tal modo le trasformazioni di Lorentz, nel caso in cui si trascurino le coordinate y e z. È poi immediato ottenere le trasformazioni di Lorentz complete se si ammette, per evidenti ragioni di simmetria, che debba essere $y' = \lambda y$, $z' = \lambda z$ (con un unico fattore λ) e si impone la condizione (anch'essa discussa poco più avanti) che il determinante della matrice definente la trasformazione debba avere modulo unitario.

Svolgimento.

- 1) Si veda la Fig. (5.11). Si ha
$$\alpha + \beta = \pi/4 \ , \quad \gamma + \delta = \pi/4 \ , \quad \delta = \beta \ , \tag{5.3.2}$$
e pertanto segue
$$\alpha = \gamma \ .$$
Le prime due relazioni in (5.3.2) sono dovute al fatto che la retta $x = ct$ è la bisettrice del primo quadrante, cioè è inclinata di 45 gradi ($\pi/4$ radianti) sull'asse delle x (per la seconda, si trasporti l'angolo γ nel punto Q' – considerando la parallela all'asse x per quel punto– , e si consideri l'angolo opposto al vertice rispetto a δ). La terza è dovuta al fatto che nel triangolo rettangolo $P'\,\Omega\,Q'$ – dove Ω è l'origine delle coordinate nel sistema K – abbiamo preso O' come punto mediano dell'ipotenusa $P'Q'$ (si pensi alle diagonali del rettangolo di lati $\Omega\,P'$ e $\Omega\,Q'$).
- Le relazioni (5.3.1) dovrebbero essere ovvie.

5.4 Deduzione delle trasformazioni di Lorentz e dell'invarianza della metrica pseudoeuclidea

5.4.1 Premessa: proprietà generali delle trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali

Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali, K e K', rispettivamente con coordinate (t, x, y, z) e (t', x', y', z'), il secondo dei quali trasli con velocità $\mathbf{v}$ rispetto al primo, ad esempio lungo l'asse delle x (ricordiamo, come abbiamo ripetutamente osservato, che scegliamo come coordinate "spaziali" sia in K sia in K' delle coordinate cartesiane ortogonali). Vogliamo determinare quali proprietà generali debba presentare la legge di trasformazione delle coordinate, se essa deve rispettare il principio di relatività. Solo successivamente imporremo che esse rispettino il principio di costanza della velocità della luce.

La prima affermazione rilevante è che la legge di trasformazione deve essere affine, cioè "lineare non omogenea", ovvero della forma

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L_{\mathbf{v}} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} ,$$

con una opportuna matrice $L = L_{\mathbf{v}}$ e un opportuno vettore di componenti $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Questa proprietà corrisponde all'ipotesi che i due sistemi siano inerziali. Infatti, per definizione, nei sistemi inerziali i moti dei punti non soggetti a forze sono rettilinei uniformi, ovvero sono rappresentati da rette sia nello spazio $\mathbb{R}^4$ con coordinate (t, x, y, z) sia nello spazio $\mathbb{R}^4$ con coordinate (t', x', y', z'). Dunque la proprietà di inerzialità dei due sistemi si traduce nella condizione che la trasformazione da K a K', dovendo mandare moti rettilinei uniformi in moti rettilinei uniformi, deve mandare rette in rette. Quindi, per una proprietà generale delle trasformazioni tra spazi lineari, essa è necessariamente affine.[35]

Inoltre (ma questo è un punto non essenziale) si può sempre scegliere l'origine delle coordinate dei due sistemi K, K' in maniera che la trasformazione sia lineare (cioè affine ed omogenea), ovvero si abbia $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Ciò infatti corrisponde alla scelta (che noi faremo in generale) delle origini dei sistemi di riferimento tale che la trasformazione mandi l'origine $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ delle coordinate di K nell'origine $(t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$ delle coordinate di K'.

Vi è un'altra proprietà significativa: si ha

$$L_{\mathbf{v}}^{-1} = L_{-\mathbf{v}} \ , \quad \text{ovvero} \qquad L_{-\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}} = \text{Identita}' \ , \tag{5.4.1}$$

da cui segue anche

$$\big| \det L_{\mathbf{v}} \big| = 1 \ . \tag{5.4.2}$$

La dimostrazione della (5.4.1) è la seguente. La trasformazione da K' a K da una parte deve essere **l'inversa** della trasformazione da K a K' e

[35] A dire il vero. questo argomento non potrebbe essere trasportato in maniera diretta al caso relativistico, perché in tal caso i moti per inerzia avvengono solo con velocità inferiori a quella della luce, e dunque il vincolo che si ha sulla trasformazione (mandare rette in rette) riguarda solo un sottoinsieme delle rette. Nelle trattazioni assiomatiche si riesce a tenere conto di questo fatto. Noi qui, in una trattazione sostanzialmente di tipo euristico, non ci occupiamo di questo problema, e potremmo dire che mostriamo come sia possibile costruire le trasormazioni di coordinate tra sistemi inerziali, nella classe delle trasformazioni affini.

dall'altra, poiché nessuno dei due sistemi è privilegiato (principio di relatività), deve essere uguale alla trasformazione **diretta**, pur di cambiare $\mathbf{v}$ in $-\mathbf{v}$ (infatti K appare a K' come traslante con velocità $-\mathbf{v}$).

La (5.4.2) si ottiene come immediata conseguenza della proprietà di *"isotropia dello spazio"* (per usare le parole Einstein), secondo la quale il determinante di $L_{\mathbf{v}}$ può dipendere dal vettore $\mathbf{v}$ solo attraverso il modulo di quest'ultimo:

$$\det L_{\mathbf{v}} = f(\|\mathbf{v}\|) \ . \tag{5.4.3}$$

Infatti da questa segue in particolare che $\det L_{-\mathbf{v}} = \det L_{\mathbf{v}}$ sicché dalla (5.4.1), usando la regola per il determinante di un prodotto di matrici (che è uguale al prodotto dei determinanti) si ottiene $\big(\det L_{\mathbf{v}}\big)^2 = 1$.

Mostriamo ora come la proprietà (5.4.3) sia una conseguenza della ipotesi di isotropia dello spazio. Un modo di procedere potrebbe essere il seguente. Sappiamo che il determinante è un numero che dipende dal vettore $\mathbf{v}$, e stiamo richiedendo che esso non dipenda dalla direzione di quest'ultimo (o equivalentemente dall'orientazione degli assi): ad esempio il determinante non può essere una funzione della prima componente v_x di $\mathbf{v}$. Certamente il requisito è soddisfatto se si ammette che il determinante dipenda da $\mathbf{v}$ solo attraverso il prodotto scalare del vettore con se stesso, cioè dal suo modulo al quadrato[36]. Si può mostrare che questa condizione è necessaria. Infatti, accanto al vettore $\mathbf{v}$ consideriamo il vettore $R_{\mathbf{v}}$ dove R è una matrice di rotazione, o più in generale una matrice del gruppo ortogonale, di cui sappiamo che $R^{-1} = R^T$, ovvero $RR^T =$ Identità (dove T denota la trasposizione di una matrice), sicché $\|\det R\| = 1$. Consideriamo infine le due matrici (in $\mathbb{R}^4$) $L_{\mathbf{v}}$ ed $L_{R\mathbf{v}}$ descriventi due *boost* corripondenti al passaggio da un sistema inerziale ad un altro, caratterizzati rispettivamente da velocità di trascinamento $\mathbf{v}$ ed $R\mathbf{v}$. Allora si ha evidentemente

$$L_{R\mathbf{v}} = RL_{\mathbf{v}}R^{-1} \ . \tag{5.4.4}$$

Pertanto, usando la nota regola per un prodotto di determinati (uguale al prodotto dei deteminanti), si ottiene immediatamente

$$\det L_{R\mathbf{v}} = \det L_{\mathbf{v}} \ , \tag{5.4.5}$$

ovvero la (5.4.3).

Abbiamo dunque ottenuto la

Proposizione 1 *Le trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali K, K' nello spaziotempo che rispettino il principio di relatività devono essere affini. A meno di una inessenziale traslazione, esse possono dunque scriversi nella*

[36] Se la matrice dipendesse parametricamente da un vettore $\mathbf{a}$, allora il determinante potrebbe dipendere anche dal prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$

forma

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dove L è una opportuna matrice. Inoltre, se K' trasla con velocità $\mathbf{v}$ rispetto a K, allora la trasformazione dipende parametricamente da $\mathbf{v}$, $L = L_{\mathbf{v}}$ e, in virtù della isotropia ello spazio, si ha la proprietà

$$L_{\mathbf{v}}^{-1} = L_{-\mathbf{v}} \ , \quad \text{ovvero} \qquad L_{-\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}} = \text{Identita}' \ , \tag{5.4.6}$$

da cui segue

$$\big| \det L_{\mathbf{v}} \big| = 1 \ . \tag{5.4.7}$$

Delle proprietà gruppali della famiglia $L_{\mathbf{v}}$ si discuterà più avanti.

5.4.2 "Deduzione" elementare delle trasformazioni di Lorentz secondo la "esposizione divulgativa" di Einstein

Per andare al cuore del problema nel modo più semplice, cominciamo a considerare il caso in cui ci sia una sola coordinata spaziale. Equivalentemente, ammettiamo provvisoriamente che si abbia $y' = y$, $z' = z$, sicché ci occupiamo solo delle coordinate (t, x), (t', x'). Daremo poi subito l'estensione al caso fisico di tre dimensioni spaziali. Ammettiamo inoltre che gli assi x ed x' abbiano la medesima orientazione (altrimenti, si avrebbe una semplice variante, che sarà discussa più avanti).

Per semplicità di notazione, prendiamo anche unità di misura in cui sia $c = 1$. Nella proposizione principale ritorneremo poi alla consueta notazione. È un semplicissimo esercizio ritrovare le formule contenenti c.

Si ha anzitutto il

Lemma 1 (del tempo locale) *: Se vale il principio di costanza della velocità della luce, allora la matrice definente la trasformazione da K a K' (che ora denotiamo con L_v, con $v \in \mathbb{R}$):*

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = L_v \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \ , \tag{5.4.8}$$

deve avere la forma

$$L_v = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{5.4.9}$$

con coefficienti a, b funzioni di v, entrambi non nulli.

Osservazione (tempo locale): Come mostra l'espressione della trasformazione, le rette di contemporaneità per K' ($t' = \text{cost}$) hanno in K la forma $at + bx = \text{cost}$, e dunque non sono di contemporaneità per K (non coincidono con le rette $t = \text{cost}$). In altri termini, per un punto–evento nello spaziotempo la coordinata temporale t' rispetto a K' dipende non solo dalla corrispondente coordinata temporale t rispetto a K, ma anche da quella spaziale x. Per questo motivo Lorentz usava dire che il tempo in K' è *locale*, cioè dipende non solo dalla coordinata temporale in K, ma anche da quella spaziale. In particolare la linea coordinata $t' = 0$ appare in K inclinata verso la bisettrice del primo quadrante (nel caso $v > 0$) esattamente come è inclinata verso la stessa bisettrice la linea coordinata $x' = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo un raggio di luce che si muove verso destra (con velocità $c \equiv 1$) in K', cioè tale che $x'(t') = t'$, sicché è rappresentato, come curva nello spaziotempo, dal sottoinsieme definito dall'equazione $x' - t' = 0$. Per il principio di costanza della velocità della luce, tale raggio deve avere velocità $c = 1$ anche in K, cioè il suo movimento deve essere rappresentato in K dalla funzione $x(t) = t$, ovvero dalla retta $x - t = 0$. Analogamente, considerando i raggi che vanno a sinistra, la retta $x' + t' = 0$ deve essere trasformata nella retta $x + t = 0$ (e viceversa):

$$\begin{aligned} x' - t' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x - t = 0 \\ x' + t' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x + t = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Riporteremo subito sotto il modo in cui procede Einstein. Poichè abbiamo osservato che molti studenti hanno qualche difficoltà a capire quel procedimento, riportiamo prima una dimostrazione più diretta (che, tra l'altro, è anche l'analoga di quella che useremo nella seconda dimostrazione delle trasformazioni di Lorentz). Si tratta di tradurre le condizioni (5.4.10) in due condizioni espresse in forma algebrica. Vogliamo imporre che se è $t - x = 0$, allora sia necessariamente anche $t' - x' = 0$. A tal fine, cominciamo semplicemente ad esprimere $t' - x'$ in termini di t ed x. Poiché abbiamo ammesso che la trasformazione sia lineare, ovvero si abbia $t' = at + bx$, $x' = ct + dx$, banalmente per sostituzione si ha

$$t' - x' = (at + bx) - (ct + dx) = (a - c)t + (b - d)x$$

ovvero

$$t' - x' = (a + b - c - d)t \quad \text{sulla retta} \quad x = t \ .$$

Dunque se vogliamo che sia $t' - x' = 0$ se $t - x = 0$ (cioè sulla retta $x(t) = t$ parametrizzata da t), si ha necessariamente

$$a + b - c - d = 0 \ .$$

Procedendo analogamente con l'altra condizione (si ricordi che si ha ora $t + x = 0$, ovvero $x = -t$) si trova che si deve avere anche

$$a - b + c - d = 0 \ ,$$

sicché sommando e sottraendo le due si ottiene $a = d$, $b = c$, ovvero la (5.4.9). Si ha poi $a \neq 0$, $b \neq 0$, perchè t' deve dipendere almeno da t e x' deve dipendere almeno da x.

Intermezzo. Per completezza di informazione, ricordiamo anche il modo in cui procede Einstein per dimostrare il lemma. Egli osserva che, per una trasformazione lineare, le condizioni (5.4.10) si traducono algebricamente nelle relazioni

$$\begin{aligned} x' - t' &= \lambda(x-t) \\ x' + t' &= \mu(x+t) \ . \end{aligned}$$

dove λ, μ sono arbitrari parametri, funzioni a priori di v. Infatti, la prima ad esempio esprime in maniera algebrica che l'annullarsi di $x' - t'$ è equivalente all'annullarsi di $x - t$, e analogamente la seconda. Si mostra anche che tali relazioni sono necessarie [37] [38]. Dunque, sommando e sottraendo (e ponendo $a = (\mu + \lambda)/2$, $b = (\mu - \lambda)/2$) si ottiene la (5.4.9).

Si ha poi il

Lemma 2 *Il fatto che il sistema K' trasla con velocità v rispetto a K lungo l'asse delle x si traduce nella proprietà*

$$b/a = -v \ ,$$

e dunque la matrice L_v (5.4.9) ha la forma

$$L_v = a \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{5.4.11}$$

Dimostrazione. Già sappiamo, per la ammessa linearità (anche indipendentemente dal Lemma (1) che si ha $x' = ax + bt$, ovvero

$$x' = a(x + \frac{b}{a}t) \ . \tag{5.4.12}$$

[37] Si ha anzitutto che una relazione lineare tra (t', x') e (t, x) equivale a una relazione lineare tra $(x' - t', x' + t')$ e $(x - t, x + t)$. Basta infatti, nelle relazioni che esprimono linearmente t' ed x' in funzione di t ed x, inserire le identità $t = (t + x)/2 + (t - x)/2$, $x = (t + x)/2 - (t - x)/2$, e poi sommare e sottarre. Dunque esistono coefficienti λ, $\tilde\lambda$, μ, $\tilde\mu$ tali che si ha

$$\begin{aligned} x' - t' &= \lambda(x-t) + \tilde\lambda(x+t) \\ x' + t' &= \tilde\mu(x-t) + \mu(x+t) \ . \end{aligned}$$

Imponiamo ora che $x - t = 0$ sia equivalente a $x' - t' = 0$. Dalla prima relazione, sostituendo $x' - t' = 0$ e $x - t = 0$, segue allora che deve essere $\tilde\lambda(x + t) = 0$ quando $x = t$, ovvero deve essere $2\tilde\lambda x = 0$ per ogni x, e dunque $\tilde\lambda = 0$. Si trova così $x' - t' = \lambda(x - t)$. Analogamente per l'altra relazione.

[38] Un altro modo di procedere fa riferimento al teorema di Ruffini: se il polinomio di primo grado $ax + b$ si annulla per $x = \beta$, allora $ax + b$ è un multiplo di $x - \beta$, ovvero si ha $ax + b = \lambda(x - \beta)$. Nel nostro caso, pensando a t come a un parametro, si riguarda $x' - t'$ come un polinomio di primo grado in x di cui si sa che si annulla per $x = t$, e dunque $x' - t'$ è un multiplo di $x - t$, ovvero si ha $x' - t' = \lambda(x - t)$. Inoltre λ è indipendente da t, perchè $x' - t'$ deve essere lineare in t.

Dobbiamo ora esprimere in maniera algebrica il fatto che K' ha velocità v rispetto a K. Ciò si ottiene confrontando il modo in cui i due sistemi descrivono il moto di un punto solidale con K'. Consideriamo ad esempio l'origine delle coordinate spaziali di K'. La sua *worldline* ha in K' l'equazione $x' = 0$, mentre ha in K l'equazione $x - vt = 0$. Dunque dobbiamo imporre che valga l'equivalenza $(x' = 0) \Leftrightarrow (x - vt) = 0$, sicché dalla (5.4.12) segue $b/a = -v$.

Si ha infine il

Lemma 3 *Si ha*

$$a = \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2} \ .$$

Dimostrazione. Diamo qui una dimostrazione abbastanza diretta, e lasciamo ad un esercizio svolto subito sotto l'esposizione della dimostrazione data nella esposizione divulgativa di Einstein. Per la dimostrazione osserviamo, dalla (5.4.11), che il determinante di L_v è dato da

$$\det L_v = a^2(1 - v^2) \ . \tag{5.4.13}$$

Poiché già sappiamo, dalle proprietà generali delle trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali, che deve essere $|\det L_v| = 1$, otteniamo[39]

$$a^2 = \frac{1}{1 - v^2} \ . \tag{5.4.14}$$

Segue allora $a = \pm\gamma$ dove $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ è il fattore di Lorentz già introdotto e discusso. Si sceglie poi il segno $+$, perché si deve soddisfare la condizione

$$L_v = \text{Identita}' \qquad \text{per } v = 0$$

(altrimenti si avrebbe la trasformazione di Lorentz congiunta con una riflessione dell'asse delle x).

Abbiamo dunque ottenuto il

Teorema 1 . *Se vale il principio di costanza di velocità della luce, allora la trasformazione di coordinate tra due sistemi inerziali K e K', di cui il secondo trasli con velocità v lungo l'asse delle x del primo, con gli assi x ed x' orientati allo stesso modo* (boost di Lorentz)*, è la trasformazione di Lorentz (si considerano solo le coordinate (t, x), (t', x'))*

$$L_v : \begin{cases} t' &= \gamma\big(t - vx/c^2\big) \\ x' &= \gamma(x - vt) \end{cases}$$

[39]Si noti che allo stesso risultato si perviene eseguendo il calcolo (immediato) della trasformazione inversa $(L_v)^{-1}$ ed usando la proprietà

$$(L_v)^{-1} = L_{-v}$$

(sostanzialmente, il principio di relatività: i due osservatori sono equivalenti, e la trasformazione inversa coincide con quella diretta, in cui è il secondo osservatore che vede il primo traslare con velocit"a $-v$).

Esercizio: Il procedimento della esposizione divulgativa di Einstein per dimostrare il lemma (3). Nell'ultima parte della dimostrazione data sopra abbiamo proceduto in maniera diversa da quella tenuta Einstein nella sua esposizione divulgativa. Anche nel procedimento di Einstein si usa un principio di simmetria riguardante i due osservatori, analogo alla relazione $(L_v)^{-1} = L_{-v}$. Egli mette in luce come il regolo unitario di K' appaia avere una lunghezza diversa se osservato (con una fotografia, una *istantanea*) in K, e analogamente il regolo di K appaia avere una lungezza diversa se osservato in K'. Quindi, per il principio di relatività, egli richiede che i due cambiamenti di lunghezza siano uguali (noi ritroveremo questo fatto come conseguenza delle trasformazioni di Lorentz; in particolare i due cambiamenti di lunghezza risultano essere contrazioni). Il calcolo procede come segue.

Il regolo unitario di K' ha estremi $x' = 0$ e $x' = 1$ (che sono i medesimi a tutti i tempi t': il regolo di K' è fisso in K'). D'altra parte l'osservatore K fotografa il regolo di K' ad un suo (di K) tempo, ad esempio $t = 0$. Già sappiamo che al tempo $t = 0$ l'estremo sinistro del regolo di K' si trova in $x = 0$ (proprio per il modo in cui abbiamo scelto le origini delle coordinate), e basta dunque determinare la coordinata x dell'estremo destro del regolo di K' al tempo $t = 0$. Dalla relazione $x' = a(x-vt)$, ponendo $t = 0$ otteniamo $x' = ax$, e dunque l'estremo destro ($x' = 1$) del regolo di K' ha in K al tempo $t = 0$ la coordinata $x = 1/a$. Dunque, se osservato da K con una fotografia (una istantanea) il regolo di K' non ha lunghezza unitaria, ma lunghezza $1/a$ (sara' poi una contrazione quando avremo dimostrato $a = \gamma$ e dunque $a > 1$). Per calcolare la variazione di lunghezza del regolo di K osservato da K' potremmo prima determinare la trasformazione inversa, e procedere come appena fatto. Ma non ce ne è bisogno. e basta avere a disposizione la trasformazione diretta. Einstein osserva infatti che, poiché stiamo considerando una istantanea in K', ad esempio $t' = 0$, basta considerare ancora la relazione diretta $x' = a(x - vt)$ eliminando il tempo t come si ottiene da $t' = a(t - vx)$ ponendo $t' = 0$ (sicché $t = vx$), e si trova dunque

$$x' = a(x - v^2 x) = a(1 - v^2)x \ .$$

Dunque, al tempo $t' = 0$ di K', l'estremo destro del regolo di K (definito da $x = 1$ per tutti i tempi t di K) ha coordinata x' data da

$$x' = a(1 - v^2)$$

e pertanto la sua lunghezza osservata da K' non è 1, ma $a(1-v^2)$. Imponendo, per il principio di relatività, che i due cambiamenti siano identici, otteniamo dunque

$$\frac{1}{a} = a(1 - v^2)\,, \quad \text{ovvero} \quad a^2 = \frac{1}{1 - v^2} \ .$$

Esercizi complementari (proprietà gruppali delle trasformazioni di Lorentz).

- 1) Si verifichi che la famiglia di matrici di Lorentz L_v soddisfa la proprietà di gruppo, cioè esiste una opportuna funzione $v = v(v_1, v_2)$ tale che vale

  $$L_{v_2} L_{v_1} = L_v \ . \tag{5.4.15}$$

  Si mostri che v è dato (con $c = 1$) da

  $$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} \tag{5.4.16}$$

(*legge di addizione lorentziana delle velocità*).

- 2) Si assuma di avere già ottenuto per la matrice $A = A(v)$ la struttura (5.4.11), con il fattore $a = a(v)$ ancora indeterminato. Si mostri come la condizione che valga la proprietà di gruppo (5.4.15), determini la funzione $v = v(v_1, v_2)$, data dalla (5.4.16).

Svolgimento di 2). Il banale calcolo del prodotto di matrici fornisce il risultato

$$L_{v_2} L_{v_1} = a(v_2) a(v_1) \begin{pmatrix} 1 + v_1 v_2 & -(v_1 + v_2) \\ -(v_1 + v_2) & 1 + v_1 v_2 \end{pmatrix} .$$

Ma allora, se si richiede che la matrice ottenuta sia ancora della forma (5.4.11), in cui gli elementi diagonali sono uguali ad 1, occorre estrarre dalla matrice il fattore $1 + v_1 v_2$, e si ottiene

$$L_{v_2} L_{v_1} = a(v_2) a(v_1)(1 + v_1 v_2) \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} , \qquad (5.4.17)$$

con $v = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2)$, mentre la funzione $a = a(v)$ resta ancora indeterminata.[40]

Intermezzo: Confronto con la deduzione della trasformazione di Galileo. Si osservi che il Lemma (2) è indipendente dall'ipotesi di costanza della velocità della luce, e quindi vale ancor prima di distinguere tra trasformazioni di Galileo e di Lorentz. Infatti, per la linearità della trasformazione, già sappiamo che deve essere

$$x' = a(v)\ (x - vt) .$$

Se ora ammettiamo con Galileo e Newton che esista un tempo assoluto (*tempus est absolutum*). ovvero si abbia

$$t' = t ,$$

allora la condizione che il determinante della trasformazione abbia modulo 1 comporta (usando ancora la condizione di continuità in $v = 0$)

$$a(v) = 1 ,$$

ovvero la trasformazione di Galileo.

[40]Per completare l'esercizio, bisogna ancora soddisfare la condizione che il coefficiente a relativo alla matrice prodotto $L_{v_2} L_{v_1}$ sia proprio $a(v)$ con $v = (v_1 + v_2)/(1 + v_1 v_2)$. Si ottiene così una condizione sulla funzione ancora indeterminata $a = a(v)$, precisamente la condizione

$$a\big(\frac{x + y}{1 + xy}\big) = a(x) a(y)(1 + xy) .$$

Si può verificare direttamente che tale equazione è soddisfatta dalla funzione $a(x)$ con $\big(a(x)\big)^2 = 1/(1 - x^2)$. Si mostra poi a colpo che tale soluzione è l'unica soluzione se si ammette che a sia pari. Infatti, ponendo $y = -x$ e usando la ipotesi $a(-x) = a(x)$ (e usando anche $a(0) = 1$) l'equazione funzionale (cioè avente per incognita una funzione) fornisce allora $\big(a(x)\big)^2 (1 - x^2) = a(0) = 1$.

5.4.3 Invarianza della metrica per trasformazioni di Lorentz.

a) Invarianza della metrica come conseguenza delle trasformazioni di Lorentz.
Vale la seguente fondamentale proprietà:

Teorema 2 *Nelle trasformazioni di Lorentz si ha*

$$c^2t'^2 - l'^2 = c^2t^2 - l^2 \ , \tag{5.4.18}$$

dove si è posto

$$l'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad l^2 = x^2 + y^2 + z^2 \ .$$

Dimostrazione. Basta verificarlo per sostituzione. Poiché le variabili y, z non vengono trasformate, è sufficiente compiere la verifica considerando le variabili t, x. Calcolando il quadrato di ct' e di x' nelle formule che esprimono la trasformazione di Lorentz e sottraendo, il doppio prodotto si elimina. Raccogliendo $c^2t^2 - x^2$ si ottiene così

$$c^2t'^2 - x'^2 = (c^2t^2 - x^2)\ \gamma^2\ (1 - v^2/c^2) = c^2t^2 - x^2 \ .$$

Questa identità soggiacente le trasformazioni di Lorentz è di importanza fondamentale, perché su di essa si fonda l'esistenza stessa di una metrica (ovvero di un prodotto scalare) nello spaziotempo. È questo il tema centrale del prossimo paragrafo. Nel frattempo, è utilissimo tenere presente la profonda analogia che si presenta con il caso delle consuete rotazioni del piano euclideo, che qui vogliamo richiamare.

Ricordiamo che, se il piano è riferito a coordinate cartesiane ortogonali x, y, e si passa a coordinate cartesiane ortogonali x', y' relative ad assi ruotati di un angolo α,

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \ , \end{aligned} \tag{5.4.19}$$

allora vale l'identità di tipo "pitagorico"

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \ .$$

La verifica è del tutto analoga alla precedente. In questo caso però, diversamente che nelle trasformazioni di Lorentz, quando si prendono i quadrati i doppi prodotti si eliminano se si esegue la somma e non la differenza dei quadrati. Si ha infatti

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)x^2 + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)y^2 \\ &+ (\cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)2xy \\ &= x^2 + y^2 \ . \end{aligned}$$

b) Invarianza della metrica come traduzione diretta del principio di costanza della velocità della luce.

Nel lavoro originale di Einstein del 1905 viene seguito un procedimento che porta immediatamente alla relazione (5.4.18)

$$c^2t'^2 - l'^2 = c^2t^2 - l^2$$

come traducente direttamente il principio di costanza della velocità della luce. Infatti tale principio si può enunciare dicendo che se delle onde luminose appiaono come onde sferiche in un sistema inerziale K, allora esse devono apparire come onde sferiche anche in ogni altro sistema inerziale K'. Ricordiamo che cosa si intende per onde sferiche. Si tratta delle onde per le quali, in un sistema K, il fronte d'onda a ogni tempo $t > 0$ è una sfera di raggio $R = ct$, cioè il luogo dei punti per cui $c^2t^2 - l^2 = 0$, dove $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ è il quadrato della consueta distanza euclidea. Dunque i fronti d'onda si muovono nello spazio, con velocità c. La corrispondente superficie tridimensionale nello spaziotempo (si ricordi la frase di Einstein sull'"essere nello spaziotempo") è allora la falda positiva (cioè con $t > 0$) del "**cono di luce**", che è descritto dall'equazione

$$c^2t^2 - l^2 = 0 \ .$$

Queste sono più precisamente onde sferiche "emergenti" dall'origine. Analogamente, nel caso delle cosiddette onde "convergenti", si ha la falda negativa (con $t < 0$) del cono di luce. Il principio di costanza della velocità della luce richiede che una descrizione del tutto simmetrica sia data anche dall'osservatore K', cioè che la trasformazione da un sistema all'altro invii il cono di luce dell'uno nel cono di luce dell'altro:

$$c^2t'^2 - l'^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^2t^2 - l^2 = 0 \ , \tag{5.4.20}$$

(si noti bene: **cono in cono**, **non fronti d'onda in fronti d'onda** – si ricordi la discussione relativa alla figura fig:10).

Ma per trasformazioni lineari ciò può avvenire (lo si dimostra come nel caso di una dimensione spaziale considerato sopra[41]) solo se i due primi membri che appaiono nella relazione (5.4.20) sono l'uno multiplo dell'altro, cioè se si ha

$$c^2t'^2 - l'^2 = \varphi(\|\mathbf{v}\|) \cdot (c^2t^2 - l^2) \tag{5.4.21}$$

dove φ è un parametro dipendente a priori dalla velocità di traslazione $\mathbf{v}$ di K' rispetto a K. Tuttavia, per la proprietà di isotropia dello spazio si mostra che esso può dipendere solo dal modulo $\|\mathbf{v}\|$ di $\mathbf{v}$, e dunque si ha la (5.4.21).[42] D'altra parte, per il principio di relatività possiamo anche

[41] Si tratta del modo in cui Einstein mostrava come la condizione ($t' - x' = 0$ equivalente a $t - x = 0$) si traduce algebricamente nella condizione $t' - x' = \lambda(t - x)$.

[42] Questo si mostra con un ragionamento analogo a quello usato per dimostrare che il determinante di L_v dipende solo dalla norma del vettore v.

considerare la trasformazione da K' a K non come inversa della precedente, ma come trasformazione diretta in cui solo si tenga conto che K trasla rispetto a K' con velocità $-\mathbf{v}$, sicché, usando $\varphi(\|-\mathbf{v}\|) = \varphi(\|\mathbf{v}\|)$ abbiamo

$$c^2t^2 - l^2 = \varphi(\|\mathbf{v}\|)\, c^2{t'}^2 - {l'}^2 \ ,$$

e dunque, sostituendo nella (5.4.21),

$$c^2{t'}^2 - {l'}^2 = \varphi^2(\|\mathbf{v}\|) \ \ (c^2{t'}^2 - {l'}^2)$$

ovvero $\varphi^2(\|\mathbf{v}\|) = 1$. Si prende infine $\varphi(\|\mathbf{v}\|) = 1$ per continuità, dovendo essere $\varphi(0) = 1$.

c) Il gruppo di Poincaré come analogo del gruppo ortogonale. Si capisce così come la relazione di invarianza $c^2{t'}^2 - {l'}^2 = c^2t^2 - l^2$ svolga un ruolo fondamentale in relatività. Ricorderemo nel prossimo paragrafo il suo significato geometrico in termini di metrica. Apparirà allora che le coordinate temporali e spaziali che abbiamo fin qui utilizzato relativamente ad ogni sistema inerziale sono in effetti coordinate “cartesiane” ortogonali rispetto a una base ortonormale, in maniera analoga al modo in cui ad esempio in $\mathbb{R}^3$ si utilizzano coordinate cartesiane ortogonali rispetto alla consueta metrica euclidea. Le trasformazioni tra sistemi di coordinate cartesiane ortogonali nel consueto caso euclideo formano un gruppo che viene detto **gruppo ortogonale**. Questo è caratterizzato dall’invarianza della forma quadratica $x^2 + y^2 + z^2$, e in particolare contiene le **rotazioni**. Analogamente nello spaziotempo si ha il **gruppo di Poincaré**, che è caratterizzato dell’invarianza della forma quadratica $c^2t^2 - l^2$, e in particolare contiene le **trasformazioni di Lorentz**. Questo è il motivo per cui avevamo detto più sopra che la identità (5.2.6) $c^2t'^2 - l'^2 = c^2t^2 - l^2$ in effetti “definisce” le trasformazioni di Lorentz (o meglio, le trasformazioni del gruppo di Poincaré).

5.4.4 Deduzione delle trasformazioni di Lorentz dall’invarianza della metrica

.

Dalla relazione (5.4.18) di invarianza della metrica si deducono immediatamente le trasformazioni di Lorentz e la loro proprietà gruppale (che in particolare comporta la legge di composizione relativistica delle velocità): è questa la “deduzione” alla Pauli e Landau cui si accennava sopra. Si tratta in effetti di un semplice esercizio.

Cominciamo con lo svolgere l’analogo esercizio nel caso euclideo.

Esercizio: Nel piano $\mathbb{R}^2$ si cerchino le trasformazioni di coordinate $(x, y) \to (x', y')$ aventi la proprietà

$${x'}^2 + {y'}^2 = x^2 + y^2 \ .$$

Si ritrovino così le note **rotazioni**

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \ . \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

oppure le rotazioni seguite da una riflessione rispetto all'asse delle x:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5.4.23}$$

Questo insieme di trasformazioni esaurisce **il gruppo ortogonale nel piano, che è definito come come l'insieme delle trasformazioni che conservano il prodotto scalare**.

Svolgimento. Si ha in effetti un teorema generale che assicura che la trasformazione è lineare. Qui comunque non ce ne preoccupiamo, e cerchiamo direttamente una trasformazione di tipo lineare (con coefficienti a, b, c, d da determinarsi):

$$\begin{aligned} x' = &\quad ax + by \\ y' = &\quad cx + dy \ . \end{aligned}$$

Si calcola allora subito ${x'}^2 + {y'}^2 = (a^2 + c^2)\,x^2 + (b^2 + d^2)\,y^2 + 2(ab + cd)xy$. Pertanto la condizione ${x'}^2 + {y'}^2 = x^2 + y^2$ (per tutte le coppie x, y) si traduce nelle condizioni

$$a^2 + c^2 = 1 \ , \quad b^2 + d^2 = 1 \ , \quad ab + cd = 0 \ .$$

Dalla prima e dalla seconda segue che esistono α, β tali che $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$, $b = \cos\beta$, $d = \sin\beta$. Dalla terza segue poi $\cos(\alpha - \beta) = 0$, ovvero $\beta = \alpha \pm \pi/2$, e si ottiene quindi la famiglia di rotazioni (5.4.22) dipendente dal parametro α, oppure la analoga (con la sostituzione $\alpha \to -\alpha$) seguita da una riflessione rispetto all'asse delle x, ovvero seguita dalla trasformazione che invia il vettore (x, y) nel vettore $(x, -y)$.

Veniamo ora all'analogo esercizio nello spaziotempo bidimensionale (si trascurano y ed z,[43] e si pone la velocità della luce uguale ad 1).

Esercizio: Nel piano $\mathbb{R}^2$ si cerchino le trasformazioni di coordinate $(t, x) \to (t', x')$, aventi la proprietà

$${t'}^2 - {x'}^2 = t^2 - x^2 \ . \tag{5.4.24}$$

Si ritrovino in particolare le **trasformazioni di Lorentz**.

Svolgimento. Cerchiamo una trasformazione lineare

$$\begin{aligned} t' = &\quad at + bx \\ x' = &\quad ct + dx \ . \end{aligned}$$

[43] Riportiamo da Landau e Lifshitz, *Teoria dei campi*, sec. 4 (pag 19 dell'edizione MIR in francese). *"Ogni rotazione dello spazio a quattro dimensioni può essere decomposta in 6 rotazioni nei piani xy, zx, xz, τx, τy, τz (allo stesso modo in cui una rotazione nello spazio ordinario può essere decomposta in tre rotazioni nei piani xy. zy e xz). Le prime tre rotazioni covolgono soltanto le coordinate spaziali; sono rotazioni ordinarie dello spazio euclideo".* Qui gli autori si riferiscono alla identità della metrica scritta in forma euclidea con un tempo immaginario $\tau = ict$, secondo un procedimento molto comune che qui è illustrato più sotto. Ma questo fatto è irrilevante ai nostri fini.

Si calcola allora subito $t'^2 - x'^2 = (a^2 - c^2)\,t^2 - (d^2 - b^2)\,x^2 + 2(ab - cd)\,tx$. Si hanno dunque le condizioni

$$a^2 - c^2 = 1\ , \quad d^2 - b^2 = 1\ , \quad ab - cd = 0\ .$$

Dalla prima e dalla seconda segue che esistono α, β tali che $a = \pm\cosh\alpha$, $c = \sinh\alpha$, $d = \pm\cosh\beta$, $b = \sinh\beta$. Infatti, l'equazione $y^2 - x^2 = 1$ definisce un'iperbole che ha due rami non connessi. Con la scelta $y = \cosh\alpha$, $x = \sinh\alpha$ si parametrizza il ramo superiore, mentre con la scelta $y = -\cosh\alpha$, $x = \sinh\alpha$ si parametrizza il ramo inferiore. Si hanno pertanto quattro possibili soluzioni, in dipendenza dalla scelta dei segni.

Cominciamo a considerare la scelta dei due segni $+$ e mostriamo che si ottengono allora le trasformazioni di Lorentz. Infatti, la terza condizione prende in tal caso la forma $\sinh(\alpha - \beta) = 0$, $\beta = \alpha$. Si ottiene dunque la famiglia di "rotazioni iperboliche", dipendente dal parametro α,

$$\begin{aligned} t' &= t\cosh\alpha + x\sinh\alpha \\ x' &= t\sinh\alpha + x\cosh\alpha\ . \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

In virtù delle formule trigonometriche

$$\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}\ , \qquad \sinh\alpha = \frac{\tanh\alpha}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}\ ,$$

le trasformazioni trovate si scrivono anche nella forma

$$\begin{aligned} t' &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}\ (t + x\tanh\alpha) \\ x' &= \tfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}\ (t\tanh\alpha + x) \end{aligned} \tag{5.4.26}$$

Si ha poi la *interpretazione di* α:

$$\tanh\alpha = -v,$$

dove v è la velocità di traslazione di K' rispetto a K. Infatti, la worldline dell'origine spaziale di K' è definita da $x' = 0$. Dunque, dalla seconda della (5.4.25) o della (5.4.26), ponendo $x' = 0$, segue che l'origine spaziale di K' ha rispetto a K coordinate (t, x) tali che $x = (-\tanh\alpha)t$. Ma questa curva deve coincidere con la curva $x = vt$. Abbiamo così ritrovato le trasformazioni di Lorentz (in senso stretto)

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{5.4.27}$$

È un semplice esercizio mostrare che le altre tre scelte dei segni $+$ o $-$ conducono a un analogo risultato in cui però la matrice di Lorentz L_v deve essere moltiplicata a sinistra per una delle tre matrici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ , \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ , \quad PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Le trasformazioni corrispondenti alle matrici P e T vengono dette rispettivamente **di parità e di inversione temporale**. L'insieme di tutte le trasformazioni che si ottengono in tal modo costituiscono il **gruppo di Poincaré** (nel piano).

Esercizio: le trasformazioni di Lorentz dedotte "con il tempo immaginario $\tau = ict$". A partire dal primo lavoro di Poincaré,[44] seguito poi da molti altri, era stato osservato che la identità

$$x'^2 - c^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2 \tag{5.4.28}$$

prende forma euclidea se si introduce un "tempo immaginario" mediante la definizione

$$\tau = ict \ ,$$

perché essa diviene allora

$$x'^2 + \tau'^2 = x^2 + \tau^2 \ . \tag{5.4.29}$$

Si deducano le trasformazioni di Lorentz per questa via, utilizzando le note formule delle rotazioni (5.4.22). Si veda anche il testo di Landau Lifshitz, oppure quello di Pauli.

Complementi: Ancora sulle proprietà gruppali delle trasformazioni di Lorentz, e nuova dimostrazione della formula di composizione delle velocità.

La descrizione analitica delle trasformazioni di Lorentz mediante lo "pseudoangolo" α è utile per stabilirne la proprietà gruppale, da cui segue in particolare la legge di composizione relativistica delle velocità.

Esercizio. La composizione di due trasformazioni di Lorentz con "pseudoangoli" α_1, α_2 è ancora una trasformazione di Lorentz, con pseudoangolo $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2$, ovvero "gli pseudoangoli si sommano" (Naturalmente, l'analogo esercizio per le rotazioni mostra che "gli angoli si sommano"). .

Dimostrazione. Banalmente per verifica diretta. Siano

$$\begin{aligned} ct' &= \cosh\alpha_1\, ct + \sinh\alpha_1\, x \\ x' &= \sinh\alpha_1\, ct + \cosh\alpha_1\, x \ , \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ct'' &= \cosh\alpha_2\, ct' + \sinh\alpha_2\, x' \\ x'' &= \sinh\alpha_2\, ct' + \cosh\alpha_2\, x' \end{aligned}$$

le due trasformazioni. Sostituendo si ha

$$\begin{aligned} ct'' =& (\cosh\alpha_2 \cosh\alpha_1 + \sinh\alpha_2 \sinh\alpha_1)\, ct \\ &+ (\cosh\alpha_2 \sinh\alpha_1 + \sinh\alpha_2 \cosh\alpha_1)\, x \\ x'' =& (\sinh\alpha_2 \cosh\alpha_1 + \cosh\alpha_2 \sinh\alpha_1)\, ct \\ &+ (\sinh\alpha_2 \sinh\alpha_1 + \cosh\alpha_2 \cosh\alpha_1)\, x \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} ct'' &= \cosh(\alpha_1 + \alpha_2)\, ct + \sinh(\alpha_1 + \alpha_2)\, x \\ x'' &= \sinh(\alpha_1 + \alpha_2)\, ct + \cosh(\alpha_1 + \alpha_2)\, x \end{aligned}$$

[44] Poincaré faceva uso di questo fatto per sfruttare proprietà note delle rotazioni ai fini di risolvere un problema fisico di grande rilevanza: come si deve alterare la legge gravitazionale di Newton affinchè essa sia compatibile con la proprietà che anche la gravità si propaghi con velocità finita (e proprio uguale a quella della luce). La analogia con le rotazioni in uno spazio a quattro dimensioni fu poi messa in rilievo (come fatto puramente formale) anche da Minkowski in un noto articolo del 1908.

Esercizio.[45] La famiglia a un parametro di trasformazioni di Lorentz (data dalla (5.4.25), in aggiunta a $y' = y$, $z' = z$) costituisce un gruppo.

Dimostrazione. L'identità si ha per $\alpha = 0$ (ovvero $v = 0$). Si potrebbe verificare direttamente (è un utile esercizio) che l'inversa corrispondente ad α si ha prendendo $-\alpha$. Ciò in ogni caso segue dall'esercizio appena svolto che fornisce la composizione di due trasformazioni, perché componendo le trasformazioni relative ad α e a $-\alpha$ si ha la trasformazione con pseudoangolo $-\alpha + \alpha = 0$, ovvero l'identità.

Corollario: Composizione relativistica delle velocità. Si considerino tre sistemi di riferimento inerziali K, K_1, K_2, con K_2 e K_1 traslanti lungo l'asse x di K. Se K_2 ha velocità v_2 rispetto a K_1, e questo ha velocità v_1 rispetto a K, allora K_2 ha rispetto a K velocità v, dove (con $c = 1$)

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2} \ . \tag{5.4.30}$$

Equivalentemente, se si pensa a K_2 come istantaneamente solidale (comobile) con un punto di cui si studia il movimento, a K_1 come sistema mobile, e a K come sistema stazionario, allora v_2 si interpreta come velocità relativa, $v_2 \equiv v_{\mathrm{rel}}$, mentre v_1 si interpreta come velocità di trascinamento, $v_1 \equiv v_{\mathrm{tr}}$, e v come velocità assoluta, e allora la 5.4.30 si interpreta come legge di composizione relativistica delle velocità:

$$v = \frac{v_{\mathrm{rel}} + v_{\mathrm{tr}}}{1 + v_{\mathrm{rel}} v_{\mathrm{tr}}} \ . \tag{5.4.31}$$

Dimostrazione. La 5.4.30 è nient'altro che la formula trigonometrica

$$\tanh(\alpha + \beta) = \frac{\tanh\alpha + \tanh\beta}{1 + \tanh\alpha \tanh\beta} \ . \tag{5.4.32}$$

5.5 Come si comportano orologi e regoli in movimento.

5.5.1 Contrazione delle lunghezze.

Abbiamo già trattato della contrazione delle lunghezze illustrando l'ultimo passo della deduzione delle trasformazioni di Lorentz data da Eintsein nella sua esposizione divulgativa. A costo di ripeterci, la riprendiamo ancora in questo paragrafo.

Premettiamo una banalissima osservazione sulle trasformazioni di Lorentz. Abbiamo ripetutamente sottolineato che una retta nella carta dell'osservatore K' viene letta come una retta nella carta dell'osservatore K. Tipicamente, la retta $x' = 0$ (descrivente il moto dell'origine spaziale di K', che è ferma in K') viene letta in K come la retta $x - vt = 0$, appunto perché questa

[45] Secondo Pauli (si veda W. Pauli, *Teoria della relatività*, Boringhieri (Torino, 1958)), la trattazione svolta sopra fu data per la prima volta da Sommerfeld. In effetti, la trattazione nello spirito della teoria dei gruppi fu già svolta nel lavoro di Poincaré, ed è indicata anche nel lavoro di Einstein.

è l'equazione in forma implicita del moto $x(t) = vt$ di un punto che rispetto a K si muove di velocità v e passa per l'origine spaziale di K al tempo $t = 0$ di K. Anzi, proprio questo fatto è intervenuto nel fissare uno dei quattro parametri che definiscono la trasformazione di Lorentz, perchè è questo il modo in cui si descrive il fatto che l'osservatore K' (diciamolo convenzionalmente **osservatore mobile**) trasla con velocità v rispetto all'osservatore K (diciamolo convenzionalmente **osservatore stazionario**). Ora, il fatto che la retta $x' = 0$ di K' venga letta in K come la retta $x - vt = 0$ si ottiene formalmente dalla trasformazione di Lorentz, prendendone la componente spaziale

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{5.5.1}$$

e imponendo a sinistra $x' = 0$. Ma ora possiamo chiederci analogamente come viene letta in K la retta $x' = 1$. È evidente che si dovrà ottenere una retta descrivente il moto di un punto che si muove con velocità uguale a quella dell'origine spaziale di K, ovvero v, ma non è chiaro a priori dove essa intersechi l'asse delle x. Questo si vede ancora dalla (5.5.1), ponendo ora $x' = 1$: si ottiene in tal modo la retta definita in forma implicita da $\gamma(x - vt) = 1$, ovvero, esplicitando,

$$x(t) = vt + \gamma^{-1} \ . \tag{5.5.2}$$

Dunque, la retta $x' = 1$, letta nella carta dell'osservatore stazionario K, attraversa l'asse delle x nel punto di ascissa

$$\gamma^{-1} < 1 \ . \tag{5.5.3}$$

Quanto descritto fin qui è una banalissima conseguenza delle trasformazioni di Lorentz. Vogliamo ora "interpretare" questo fatto. Si può dire che l'osservatore mobile K' dispone di un proprio regolo con cui fissa le ascisse lungo il suo asse x', e che l'ascissa $x' = 1$ definisce l'estremo destro del regolo, il cui estremo sinistro ha invece ascissa $x' = 0$. I moti degli estremi del regolo di K' sono rappresenati da due rette dello spaziotempo che vengono lette in K' come le due rette $x' = 0$, $x' = 1$. Le stesse rette dello spaziotempo sono lette in K (figura 5.13) come la retta $x - vt = 0$ e (lo abbiamo appena mostrato) la retta $x - vt = \gamma^{-1}$. Qui entra in gioco la nonassolutezza della contemporaneità. L'osservatore K vede il sistema mobile K' passare davanti a lui, e decide di fotografarlo, facendo, come dice Einstein nella esposizione divulgativa, una *istantanea*. Ovvero, registra le ascisse degli estremi del regolo mobile (solidale con l'osservatore mobile) a un suo proprio tempo, ad esempio $t = 0$. Considera quindi due eventi (punti dello spaziotempo), rispettivamente $A =$ (estremo sinistro del regolo mobile al tempo $t = 0$) e $B =$ (estremo destro del regolo mobile al tempo $t = 0$). Dunque si tratta di due eventi sull'asse delle x di K (istantanea in K), e per quanto visto sopra le corrispondenti ascisse sono rispettivamente

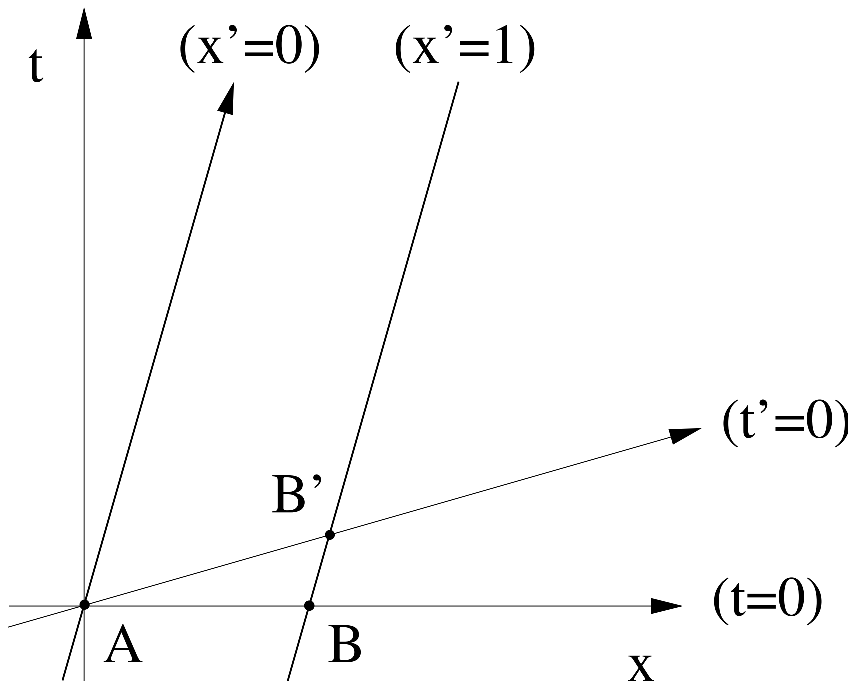

Figura 5.13: Aspetto geometrico della contrazione delle lunghezze.

$x_A = 0$, $x_B = \gamma^{-1} < 1$. In questo senso, la lunghezza del regolo mobile appare contratta nel sistema stazionario K. Naturalmente, si verifica subito che, in maniera del tutto simmetrica, il regolo unitario di K appare contratto per l'osservatore mobile K', esattamente dello stesso fattore γ^{-1}. Anzi, la dimostrazione della trasformazione di Lorentz data da Einstein nella esposizione divulgativa prende proprio questa simmetria come assioma. La asimmetria (figura 5.13) che si verifica nel fenomeno della contrazione (cioè il fatto che il regolo di un sistema appaia contratto per l'altro sistema) risiede invece nel fatto che in tal caso sono diverse le coppie di eventi cui ci si riferisce, ovvero si considerano due diverse misurazioni: [46] istantanea per K (retta $t = 0$, regolo di K' osservato da K, coppia di eventi AB) oppure istantanea per K' (retta $t' = 0$, regolo di K' osservato da K' stesso, coppia di eventi AB').

5.5.2 Dilatazione dei tempi

Nel problema della dilatazione dei tempi si ha ancora una situazione in cui un osservatore "stazionario" K osserva un oggetto (ora puntiforme, ad esempio una particella) che si muove di moto rettilineo uniforme, e si stabilisce

[46] Nella discussione di questo fatto data nel bellissimo e giustamente famoso libro di Pauli, si trova a questo proposito una interessante osservazione.

un confronto con quello che viene osservato da un osservatore "comobile" K'. Il caso tipico è quello di una particella (mesone μ) che proviene dallo spazio (quindi si muove rispetto a "noi", sistema stazionario), essendo "nata" a un certo **suo** tempo t'_1, e "morendo" poi a un altro **suo** tempo t'_2, restando sempre nella stessa **sua** posizione x', ad esempio $x' = 0$. Vogliamo confrontare la durata di vita $t'_2 - t'_1$ "propria" (cioè relativa alla particella stessa) con quella che appare a noi (sistema stazionario). In questo caso, invece di essere fissata una coordinata del sistema stazionario (il tempo $t =$ cost nel quale veniva eseguita l' "istantanea"), è fissata una coordinata del sistema comobile $x' =$ cost, e pertanto converrà considerare la trasformazione inversa $(L_v)^{-1} = L_{-v}$. Anzi, basta considerare la sola parte riguardante i tempi, ovvero[47] $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$. Scriviamo ora questa relazione in corrispondenza ai due eventi (t'_1, x') e (t'_2, x') (nascita e morte). Prendendo la differenza, si ha allora

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) \ . \tag{5.5.4}$$

Quindi " **per l'osservatore stazionario i tempi si dilatano del fattore γ rispetto ai tempi propri**" (tempi del sistema comobile con la particella). Per l'osservatore stazionario (cioè la stazione di osservazione al suolo) il mesone decade (muore) in un tempo più lungo che per un osservatore solidale (comobile) con il mesone. Quindi il mesone, provenendo dall'alta atmosfera, può percorrere per l'osservatore stazionario uno spazio più lungo di quanto potrebbe se non vi fosse la dilatazione dei tempi.

Si noti una notevole differenza che si presenta qui rispetto a quello che avveniva nel caso delle contrazioni delle lunghezze. Nel caso della contrazioni delle lunghezze i due sistemi di riferimento compivano due diverse osservazioni: istantanea per K oppure istantanea per K'. Poi, a ciascuna di queste osservazioni corrispondevano due eventi: nell'istantanea per K i due eventi (punti dello spaziotempo) A, B descritti sopra, e invece nell'istantanea per K' i due eventi A, B' (figura 5.13). Invece, nel caso della dilatazione dei tempi si ha l'osservazione di un **medesimo fatto assoluto** (composto da due eventi, nascita e morte del mesone, rispettivamente eventi A, B in figura 5.14) osservato dai due sistemi di riferimento.[48] Una ulteriore significativa deduzione della dilatazione dei tempi verrà svolta nel prossimo paragrafo. La dilatazione dei tempi apparirà allora come corollario della identità $c^2t'^2 - l'^2 = c^2t^2 - l^2$, che traduce il principio di costanza della velocità della luce e matematicamente indica che lo spaziotempo è munito di una metrica pseudoeuclidea.

[47] La proprietà $(L_v)^{-1} = L_{-v}$ mostra che la trasformazione inversa si ottiene da quella diretta ssemplicemente con la sostituzione $v \to -v$, ovvero è data da:

$$\begin{cases} t &= \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \\ x &= \gamma(x' + vt') \end{cases}$$

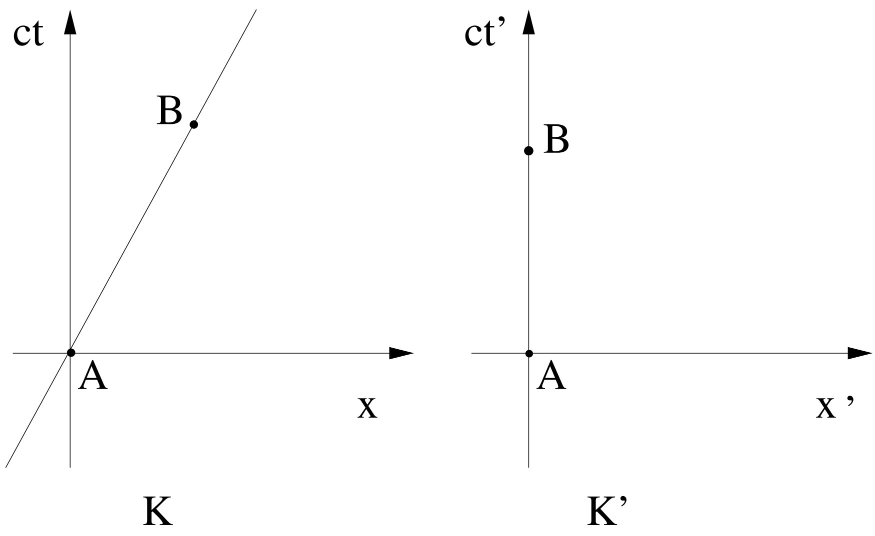

Figura 5.14: Dilatazione dei tempi

5.6 Interpretazione geometrica: la metrica pseudoeuclidea nello spaziotempo, e i sistemi inerziali come corrispondenti sistemi cartesiani ortogonali; la pseudolunghezza come tempo proprio.

In questo paragrafo intendiamo spiegare la frase di Einstein citata all'inizio del capitolo, che grossomodo dice quanto segue: *lo spaziotempo è ben noto nella meccanica classica, ma la relatività speciale, attraverso il principio di costanza della velocità della luce, ha fatto una cosa nuova, cioè ha munito lo spaziotempo di una struttura metrica (ovvero di un prodotto scalare) che nei sistemi inerziali risulta avere forma pseudopitagorica.* Si tratta del fatto che, se un "evento" (punto nello spaziotempo) ha coordinate (ct, x, y, z) rispetto ad un sistema inerziale K, dove x, y, z sono le consuete coordinate cartesiane ortogonali (definite per ogni sezione temporale $t = \text{cost}$), allora il corrispondente vettore risulta avere lunghezza (o meglio "pseudolunghezza") s definita da

$$s^2 = c^2t^2 - l^2 \qquad (l^2 = x^2 + y^2 + z^2)\,.$$

Se poi lo stesso evento ha, rispetto ad un altro sistema inerziale K', coordinate ct', x', y', z', allora la lunghezza si esprime ancora nella stessa forma

---

[48]Questo è il punto discusso da Pauli nel suo libro, come ricordato sopra.

(ed ha lo stesso valore), ovvero K' giudica la lunghezza s' come data da

$$s'^2 = c^2 t'^2 - l'^2 \qquad (l'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2)\,,$$

e risulta allora che si ha $s'^2 = s^2$, ovvero

$$c^2 t'^2 - l'^2 = c^2 t^2 - l^2\ .$$

La metrica viene detta pseudopitagorica a causa della presenza del segno negativo di fronte a l^2 nell'espressione di s^2. Dobbiamo dunque spiegare in quale senso l'identità

$$c^2 t^2 - l^2 = c^2 t'^2 - l'^2$$

(con $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$,$l'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$) sia equivalente ad affermare che nello spaziotempo esiste una metrica e che i sistemi inerziali sono i corrispondenti sistemi di riferimento ortonormali.

1. Richiami sulla metrica euclidea. Cominciamo col ricordare l'analoga situazione che si presenta nella geometria elementare. Nella geometria elementare per prima cosa si ammette che lo spazio sia una varietà affine, ovvero un insieme di punti con la proprietà che ad ogni coppia ordinata di punti è associato un vettore (la freccia che va dal primo al secondo punto, anzi, la classe di equivalenza di tali frecce rispetto al trasporto parallelo). Dunque è definita corrispondentemente una struttura di **spazio lineare**.

In secondo luogo si ammette che sia definito un **prodotto scalare**. La maniera più elementare di introdurlo è la seguente. Si ammette che siano note le nozioni di lunghezza e di angolo, e allora il prodotto scalare tra due vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ è definito da $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\vartheta$ dove a, b sono le lunghezze di $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, mentre ϑ l'angolo tra essi compreso. Risulta allora $a^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$. Risulta inoltre che il prodotto scalare è simmetrico ($\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$, perché $\cos\vartheta = \cos(-\vartheta)$), e bilineare (cioè lineare sia nel primo argomento quando venga fissato il secondo, sia nel secondo argomento quando venga fissato il primo). L'importanza di questa proprietà di linearità rispetto ad ognuno dei due argomenti (o anche distributività del prodotto rispetto alla somma, come si dice nella teoria elementare dei numeri) talvolta non viene sufficientemente sottolineata: risulta invece che la bilinearità e la simmetria costituiscono l'essenza stessa del teorema di Pitagora (come particolarmente messo in luce nel bellissimo libro di Weyl).[49]

[49] Consideriamo infatti il triangolo avente per "basi" i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (in generale non ortogonali tra loro), e avente dunque per "ipotenusa" il vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, ottenuto secondo la regola del parallelogramma. Allora il quadrato della lunghezza di $\mathbf{c}$ è dato da

$$c^2 = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\ ,$$

e usando la bilinearità e la simmetria si ha

$$c^2 = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^2 + b^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\ .$$

È dunque chiaro come si possa giungere addirittura a prendere tali proprietà (bilinearità e simmetria) come definitorie del prodotto scalare. Denotiamo il prodotto scalare con la lettera g. Si tratta di una funzione a valori reali (perciò chiamato anche "funzionale") che ha come dominio le coppie ordinate di vettori di uno spazio vettoriale V, ovvero $g : V \times V \to \mathbb{R}$, e che si richiede essere bilineare e simmetrica. Più precisamente, nel definire il prodotto scalare euclideo, si impone anche l'ulteriore condizione che il funzionale[50] sia definito–positivo, cioè valga $g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0$, essendo $g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ solo se $\mathbf{a} = 0$. Allora la lunghezza a di $\mathbf{a}$ è definita da $a^2 := g(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ e due vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ si dicono ortogonali se vale $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Il motivo per cui si dice di essere in presenza di un prodotto scalare euclideo quando vale la condizione di definita positività è il fatto che vale il seguente teorema. Se in uno spazio vettoriale V di dimensione n è assegnato un funzionale bilineare simmetrico definito–positivo $g : V \times V \to \mathbb{R}$, allora a partire da una qualunque base vettoriale in V è possibile costruirne un'altra $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n$ che sia **ortonormale**, cioè che sia formata da vettori mutuamente ortogonali e di lunghezza unitaria, ovvero aventi la proprietà

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \ . \tag{5.6.1}$$

Le coordinate dei vettori rispetto a una tale base si dicono **coordinate cartesiane ortogonali**. Il fatto rilevante è che in ogni base ortonormale la lunghezza di ogni vettore assume forma pitagorica: denotando[51] con x^i la componente del vettore $\mathbf{x}$ sul vettore base $\mathbf{e}_i$, ovvero introducendo la decomposizione $\mathbf{x} = \sum x^i \mathbf{e}_i$, allora per ogni base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ si ha

$$\text{se} \quad \mathbf{x} = \sum x^i \mathbf{e}_i \quad \text{allora} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum (x^i)^2 \ .$$

Questa è proprio l'equivalente della elementare *"formula pitagorica"* per la lunghezza l di un vettore:

$$\text{se} \quad \mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{allora} \quad l^2 := \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2 \ .$$

Questo è proprio il "teorema" di Pitagora nel caso in cui i due vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ siano ortogonali ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$), e ne costituisce l'estensione al caso di vettori generici.

[50] Talvolta si una anche la parola *forma*.

[51] Abituiamoci fin d'ora a denotare le componenti dei vettori con un apice (lettera o numero in alto), anziché con un pedice (lettera o numero in basso), che riserviamo per l'indice dei vettori base. Questa convenzione è universale – tranne l'eccezione del grande Dirac, che (nel suo libro *Principles of quantum mechanics*) usava la convenzione inversa, la quale in effetti sarebbe più comoda –. La ragione della differenza – indici contravarianti in alto, indici covarianti in basso – è di volere ricordare che le corrispondenti quantità variano in modo diverso al variare della base. Su questo punto ritorneremo nel prossimo capitolo.

Equivalentemente, rispetto a ogni base ortonormale risulta avere forma pitagorica il prodotto scalare:[52] se $\mathbf{x} = \sum x^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \sum y^i \mathbf{e}_i$, allora $g(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \sum x^i y^i$.

Si noti che ovviamente le basi ortonormali rispetto a un prodotto scalare sono infinite. Le trasformazioni lineari che portano una base ortonormale in un'altra costituiscono un gruppo, detto **gruppo ortogonale**. L'elemento caratteristico delle basi ortonormali è l'invarianza in forma del quadrato della lunghezza, o equivalentemente del prodotto scalare, che risultano avere sempre forma pitagorica. Ovvero, se si passa da una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ ad un'altra $\{\mathbf{e}'_i\}$ (cioè si compie una rotazione, o più in generale una trasformazione ortogonale) le componenti dei vettori cambiano: $\{x^i\} \to \{x'^i\}$, ma si ha sempre $\sum (x^i)^2 = \sum (x'^i)^2$. Viceversa, se è assegnata una famiglia di basi con la proprietà che nel passaggio da una all'altra vale $\sum (x^i)^2 = \sum (x'^i)^2$, allora è implicitamente definito un prodotto scalare, e la famiglia di basi data è proprio la corrispondente famiglia di basi ortonormali. Questi sono fatti che dovrebbero essere noti dal Corso di Geometria (altrimenti si veda ad esempio quello che forse è in assoluto il più bello tra i libri classici sull'argomento, ovvero[53] H. Weyl, *Space, time, matter*, Dover). Con ciò speriamo di avere chiarito il significato profondo della relazione di invarianza $l'^2 = l^2$. Questa indica

- anzitutto che siamo in presenza di una metrica (lunghezza) indotta da un prodotto scalare euclideo (fatto questo che ha un significato assoluto, indipendente dalla base scelta);

- più in particolare, poi, essa indica che stiamo considerando delle basi che sono ortonormali rispetto a quel prodotto scalare. In effetti, il prodotto scalare stesso risulta essere definito quando siamo capaci di fornire una base ortonormale.

2. Generalizzazione al caso di metrica indefinita. Quello che abbiamo appena fatto è di generalizzare la nozione di metrica euclidea dal familiare caso di $\mathbb{R}^3$ al caso di un generico spazio vettoriale V di dimensione n, essendo la metrica definita da un funzionale bilineare simmetrico definito–positivo.

Una ulteriore fondamentale generalizzazione, che si era già presentata implicitamente per la prima volta nello studio della geometria di Lobachewskij,[54]

[52] Infatti

$$g\Big(\sum_i x^i \mathbf{e}_i, \sum_j x^j \mathbf{e}_j\Big) = \sum_{ij} x^i y^j g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{ij} x^i y^j \delta_{ij} = \sum_i x^i y^i \ .$$

[53] È questo il libro su cui Fermi studiò, giovanissimo, la relatività generale.

[54] Si veda B. Dubrovin, S. Novikov, A. Fomenko, *Geometria contemporanea*, Vol. I, Capitolo 2, paragrafo 10.

si ha quando, ancora in uno spazio vettoriale V di dimensione n, si considera un funzionale bilineare simmetrico, chiamiamolo ancora g, senza però richiedere che esso sia definito–positivo. Si ammette cioè che possano esistere vettori non nulli aventi lunghezza il cui quadrato sia nullo, $\mathbf{a} \neq 0$ con $g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ (detti *vettori isotropi*), come anche vettori con $g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$ e altri ancora[55] con $g(\mathbf{a}, \mathbf{a}) < 0$. Esiste in tal caso un fondamentale teorema (detto **legge d'inerzia**[56]), che è la naturalissima e invero alquanto semplice generalizzazione del teorema sulla esistenza di basi ortonormali nel caso euclideo (caso del funzionale definito–positivo). Questo richiede una sola ipotesi cruciale sul funzionale bilineare simmetrico g, che viene detta **proprietà di nondegeneazione** e si enuncia nel modo seguente: **l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori è il vettore zero** (naturalmente, stiamo ancora dicendo che due vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sono ortogonali se $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$). In formule, g è nondegenere se la proprietà "$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ per ogni $\mathbf{b}$" implica $\mathbf{a} = 0$.[57] Il teorema afferma che nel caso del funzionale non definito–positivo (in breve, nel caso indefinito) nondegenere esiste una base ortonormale $\{\mathbf{e}_i\}$ (in realtà una infinità di tali basi), nel senso senso però che si ha ora

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \pm\delta_{ij} \ :$$

il quadrato della lunghezza è dunque positivo per alcuni vettori base, e negativo per altri (nel qual caso la lunghezza – o pseudolunghezza – è immaginaria). Più precisamente, esiste un numero intero positivo $r < n$ tale che $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$ per $i = 1, \cdots, r$, mentre $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = -1$ per $i = r+1, \cdots, n$. Evidentemente, per $r = n$ si ritroverebbe il caso euclideo (caso definito). Corrispondentemente, nel caso indefinito il prodotto scalare (funzionale bilineare simmetrico) ha forma pseudopitagorica, cioè nelle basi ortonormali si ha $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v^1w^1 + \cdots + v^rw^r - v^{r+1}w^{r+1} - \cdots - v^nw^n$; in particolare, per $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ si ottiene il quadrato della lunghezza (detta anche pseudolunghezza) del vettore $\mathbf{v}$. Il numero r, detto **indice di inerzia**, risulta essere un "assoluto", ovvero indipendente dalla base. Dunque, se è assegnato un prodotto scalare indefinito, allora esistono le basi ortonormali con la suddetta proprietà (invarianza in forma del prodotto scalare o del quadrato della lunghezza rispetto alla base). Viceversa, se è noto che esistono delle basi rispetto alle quali vale la suddetta proprietà di invarianza, allora ciò è la manifestazione del fatto che lo spazio considerato è munito di un prodotto scalare indefinito (o, come si dice, di una metrica indefinita) con un certo indice di inerzia r, e che le basi che stiamo considerando sono proprio le basi ortonormali rispetto a quella metrica. Nella moderna letteratura matematica gli spazi

[55] In quest'ultimo caso, la lunghezza sarà dunque immaginaria.

[56] Vale la pena di sottolineare che questa qualificazione di "inerzia" non ha niente a che fare con la legge di inerzia della meccanica. Per la dimostrazione, si veda ad esempio H. Weyl, pag. 30.

[57] Si ha qui una generalizzazione della consueta ipotesi di definita positività, perché si mostra che nel caso di definita positività si ha nondegenerazione.

pseudoeuclidei vengono spesso chiamati con il nome di *semiriemanniani.* Si veda anche è B. O'Neill, *Semi–riemannian geometry, with applications to relativity*, Academic Press (New York, 1983); si veda particolarmente la parte finale del capitolo 2 (per le forme bilineari simmetriche) e il capitolo 6 (per la relatività). Per una trattazione elementare, si veda M. Artin *Algebra*, sezioni 7.2 e 7.3. Il libro che più fortemente consigliamo è quello di Dubrovin, Novikov, Fomenko, *Geometria contemporanea*, Vol. I.

3. Applicazione allo spaziotempo. La seconda situazione sopra menzionata è proprio quella che si presenta nella spaziotempo in virtù del principio di costanza della velocità della luce. Infatti abbiamo mostrato che in virtù di tale principio vale la seguente proprietà: Se consideriamo un qualunque sistema inerziale, e per le corrispondenti "sezioni temporali" $t =$ cost misuriamo le distanze secondo la consueta metrica euclidea $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$, allora si ha legge di invarianza $c^2t'^2 - l'^2 = c^2t^2 - l^2$. Dunque lo spaziotempo (che già supponiamo spazio affine di dimensione 4) risulta essere munito di una metrica pseudoeuclidea con indice di inerzia $r = 1$, e risulta anche che ci stiamo riferendo a basi ortonormali rispetto a tale metrica, o equivalentemente che stiamo rappresentando i vettori mediante coordinate cartesiane ortogonali rispetto a tale metrica. Si dice che la **segnatura** della metrica è $+---$, nel senso che, nell'espressione del quadrato della lunghezza nei sistemi ortogonali, si ha un segno $+$ e tre segni $-$, cioè si ha $||\mathbf{e}_0||^2 = 1, ||\mathbf{e}_i||^2 = -1,\ i = 1, 2, 3$. Inoltre si ha l'interpretazione che in un sistema di riferimento "ortonormale" il vettore $\mathbf{e}_0$ definisce l'asse dei tempi. L'uso ormai comune è di impiegare gli indici $0, 1, 2, 3$ anziché $1, 2, 3, 4$, riservando l'indice 0 per la componente temporale; inoltre si denotano tali indici con le lettere greche μ (mu, oppure mi), ν (nu, oppure ni) eccetera, riservando invece gli indici latini i oppure j, k eccetera per le componenti spaziali $1, 2, 3$.[58] Dunque in un sistema inerziale ogni punto–evento dello spaziotempo sarà individuato, rispetto all'origine, da un vettore (quadrivettore) $\{x^\mu\}$. Scriveremo anche

$$\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{x}) \ ,$$

operando in tal modo la **decomposizione in parte temporale e parte spaziale** (rispetto ad un assegnato sistema di riferimento). Allora al quadrivettore $\{x^\mu\}$ è associata una pseudolunghezza il cui quadrato s^2 è definito da

$$s^2 = c^2t^2 - l^2 \qquad (\text{con } l^2 = x^2 + y^2 + z^2) \ .$$

Corrispondentemente, a due quadrivettori $\{x^\mu\}$, $\{y^\mu\}$ viiene associato il prodotto scalare

$$g(x, y) = x^0y^0 - \sum_{i-1}^{3} x^iy^i \equiv x^0y^0 - \mathbf{x}^2 \ .$$

[58]Nel libro di Dubrovin, Novikov e Fomenko si usa la convenzione opposta.

È chiaro allora che s^2 può avere valori positivi o negativi (nel qual caso s è immaginario) e anche il valore nullo (in corrispondenza di vettori diversi dal vettore zero $(ct, x, y, z) = (0, 0.0.0)$!). Questi ultimi sono i vettori per cui $l^2 = c^2t^2$, cioè i vettori definenti il **cono di luce** con vertice nell'origine, e proprio per questo motivo sono detti **vettori di tipo luce, o lightlike (o isotropi)**. Ciò è evidentemente dovuto al fatto che, se si considerano rette nello spazio tempo (moti rettilenei uniformi) giacenti su tale insieme, i corrispondenti movimenti sono tali che $l^2(t) = c^2t^2$, e quindi hanno velocità c, cioè sono raggi di luce. E poiché la lunghezza di un vettore non dipende dal sistema di riferimento, e d'altra parte in tutti i sistemi inerziali la lunghezza s ha la medesima espressione $s^2 = c^2t^2 - l^2$, si ha allora che i raggi di luce si muovono con velocità c in tutti i sistemi inerziali. Ovviamente questo è proprio il punto da cui siamo partiti (principio di costanza della velocità della luce), ma si spera che quanto appena detto faccia toccare con mano il fatto che proprio il principio di costanza di velocità della luce viene tradotto, letto, matematicamente, nella proprietà dello spaziotempo di essere munito di una metrica pseudouclidea che nei sistemi inerziali assume la forma pseudopitagorica $s^2 = c^2t^2 - l^2$.

Ora, questa geometrizzazione, fondata sui vettori di tipo luce, fornisce poi una lunghezza anche per tutti gli altri vettori dello spaziotempo (figura 5.15). Si hanno in particolare i **vettori di tipo tempo. o timelike**), per cui $s^2 > 0$, ovvero tali che $|ct| > l$, e i **vettori di tipo spazio, o spacelike**, per cui $s^2 < 0$ (ovvero $|ct| < l$). Ovviamente la natura di un vettore (di essere di tipo tempo, di tipo luce e di tipo spazio) non dipende dal sistema di riferimento (è una proprietà assoluta, perché la lunghezza s è una proprietà assoluta). Si ha inoltre la proprietà che per ogni vettore di tipo tempo esiste un opportuno sistema inerziale in cui le componenti spaziali sono proprio nulle (è questa la ragione della qualificazione *timelike*), e analogamente per ogni vettore di tipo spazio esiste un opportuno sistema inerziale in cui la componente temporale è nulla. Infatti, dato un arbitrario vettore *timelike*, scegliamo gli assi spaziali di K in modo che si abbia $y = 0$, $z = 0$, e prendiamo un altro sistema K' che trasli lungo l'asse delle x con una certa velocità v. Allora sappiamo che gli assi x', t' di K' appaiono in K come ugualmente inclinati verso la bisettrice (del primo quadrante se $v > 0$, del secondo se $v < 0$), con una inclinazione che cresce al crescere di v. Basta allora scegliere v in maniera tale che l'asse temporale di K' appaia in K inclinato in modo da contenere il vettore assegnato. Analogamente per i vettori *spacelike*.

Osservazione (luogo dei vettori di lunghezza unitaria). Fin dalla discussione relativa alla dimostrazione della trasformazione di Lorentz sappiamo come sono visti, nella carta di un osservatore K, gli assi x', t' di un altro osservatore K', al variare della velocità di traslazione v di K' rispetto a K: sappiamo che tali assi sono ugualmente inclinati verso la bisettrice del primo guadrante (se $v > 0$), di un angolo che cresce al crescere di $|v|$, tendendo a schiacciarsi sulla bisettrice quando

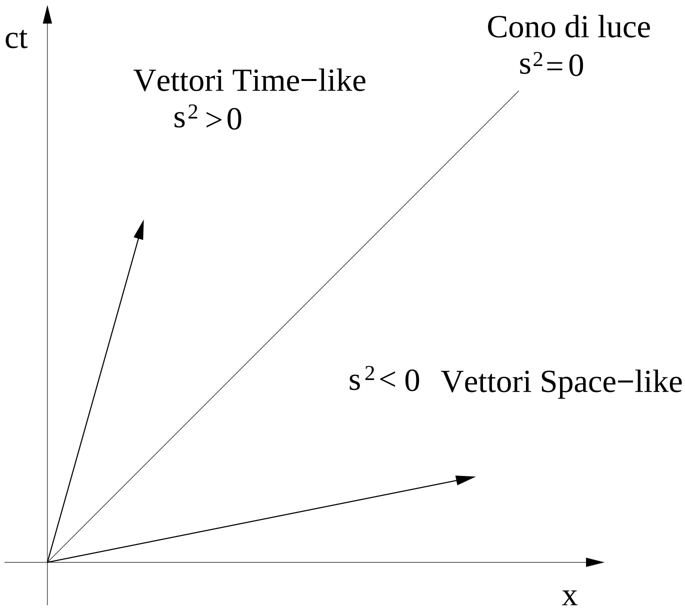

Figura 5.15: Vettori di tipo tempo (*timelike*), di tipo spazio (*spacelike*) e di tipo luce (*lightlike*) nello spaziotempo.

$|v| \to c$. D'altra parte, nella discussione relativa al fenomeno della dilatazione dei tempi abbiamo avuto occasione di chiederci come sono situati, su tali assi, i punti di ascissa unitaria (ci interessava infatti proiettare il punto ($t' = 1$, $x' = 0$) sull' asse t di K, parallelamente all'asse x. Possiamo ora rispondere a tale domanda. Considerando per semplicità il caso di una sola coordinata spaziale, si tratta dei punti per cui $(t', x') = (1, 0)$ oppure $(t', x') = (0, 1)$. Si tratta dunque dei punti per cui si ha rispettivamente $s^2 = 1$ oppure $s^2 = -1$. Evidentemente tali punti si trovano sulle iperboli

$$c^2t^2 - x^2 = 1 \ , \quad c^2t^2 - x^2 = -1 \ . \tag{5.6.2}$$

Quando si tenga conto anche delle variabili y, z, si hanno analogamente gli iperboloidi

$$c^2t^2 - l^2 = 1 \ , \quad c^2t^2 - l^2 = -1 \ . \tag{5.6.3}$$

Pertanto, se riguardiamo al piano (t, x) con gli occhi della familiare metrica euclidea, tali vettori "unitari" ci appaiono allungati sempre più man mano che cresce $|v|$, cioè man mano che gli assi si schiacciano sulla bisettrice (cono di luce). Visti con gli occhi della metrica pseudoeuclidea, tali vettori "unitari" hanno invece sempre una pseudolunghezza il cui quadrato ha modulo unitario: $|s^2| = 1$. Vedremo nel prossimo paragrafo come, analogamente, nello spazio dei quadrimomenti dovremo considerare il cosiddetto *iperboloide di massa*, descrivente il quadrivettore energia–momento della particella libera di massa m.

Esercizio: Si deduca la dilatazione dei tempi dalla invarianza della metrica: $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$.

Svolgimento. Con riferimento alla figura (5.14), considerando il vettore che da A punta a B si ha che l'estremo A coincide con l'origine delle coordinate $(0,0)$ sia in K che in K', mentre l'estremo B ha coordinate $(t'_B, 0)$ in K' e coordinate $(t_B, x_B) = (t_B, vt_B)$ in K. Dalla identità $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ segue allora $c^2t_B^2 - v^2t_B^2 = c^2t'^2_B$, ovvero $t_B^2(1 - v^2/c^2) = t'^2_B$, ovvero $t_B^2 = \gamma^2 t'^2_B$, e infine, prendendo il segno positivo, $t'_B = \gamma\ t_B$.

4. Versione "infinitesima" della metrica, e lunghezza delle curve di tipo tempo. Facciamo ora un altro passo, e veniamo alla cosiddetta *"versione infinitesima* della metrica": si tratta della relazione

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 \qquad (\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)\,.$$

È questa una scrittura che viene impiegata almeno cinque volte in ogni pagina di ogni libro o articolo di relatività generale, e che ha una sua fortissima valenza intuitiva. Quindi la useremo senz'altro anche noi, cercando di chiarirne preliminarmente il significato. Questa scrittura ha un senso del tutto analogo a quello della scrittura $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ per la geometria elementare euclidea, che ora rammentiamo. Premettiamo che non stiamo parlando del differenziale di qualche grandezza, ad esempio il differenziale della lunghezza, perché non esiste nessun differenziale della lunghezza.[59] [60] [61]

[59] Infatti esistono i differenziali delle funzioni (derivabili), mentre la lunghezza addirittura non è neanche una funzione del posto, e quindi non si può neanche immaginare di poterne definire il differenziale. Avendo fissato un punto A nello spazio ordinario e un altro punto B, ogni curva tra quei due punti ha una diversa lunghezza, e quindi la lunghezza non è una funzione del posto B. È vero che la lunghezza è una funzione a valori reali (perciò detta *funzionale*), ma il dominio non è $\mathbb{R}^3$, bensì uno spazio di dimensioni infinita, ovvero lo spazio delle curve da A a B. Naturalmente, se si considera la lunghezza come un funzionale definito sul dominio delle curve, allora esiste anche il suo differenziale, o la sua derivata (che abbiamo definito nel capitolo sul calcolo delle variazioni).

[60] Se uno studente avesse qualche difficoltà nel capire che $\mathrm{d}l$ non è il differenziale di una funzione, cosa che dovrebbe apparire assolutamente ovvia, non si preoccupi troppo, perché è in buona compagnia. Infatti abbiamo fatto recentemente una sconcertante scoperta, riguardante A. Sommerfeld, scienziato tutt'altro che banale, anche se certamente non nei primissimi ranghi nella classifica che usava fare Landau (si veda la introduzione alla traduzione italiana del suo manuale di Meccanica). Sommerfeld aveva scritto delle note alla famosa memoria di Minkowski sullo spaziotempo (riportata in A. Einstein, *The principle of Relativity*, Dover), e nella nota (4) dice: " *As Minkowki once remarked to me, the element of proper time* $\mathrm{d}\tau$ *is not a proper differential.*" Come vedremo poco sotto, l'elemento di tempo proprio è nient'altro che l'analogo dell'"elemento di linea" $\mathrm{d}l$ di cui ora qui ci occupiamo. Ora, Sommerfeld sembra fare gli altri partecipi di una cosa non banale che gli era stata comunicata da Minkowski, mentre noi la abbiamo menzionata in una nota quasi scusandoci, per non offendere il lettore. È vero che la comprensione delle cose è sempre un atto molto significativo, che ciascuno compie a suo modo e a suo tempo.

[61] D'altra parte, l'articolo di Minkowski presenta altre sorprese. Ci riferiamo al punto in cui Minkowski fa osservare che, se si introduce la quantità immaginaria $ict = \tau$ (che egli denota con s), allora $-\mathrm{d}s^2$ assume la forma pitagorica $-\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$. Ora questo fatto è del tutto ovvio, e anche utile. Infatti, già tre anni prima, pochi mesi

Il senso intuitivo classico, è quello per cui $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ è la "versione infinitesima" della scrittura $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$ relativa al vettore $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; qui evidentemente ci si riferisce alla nozione intuitiva che è stata universalmente usata da tutti i classici, ovvero al "segmento infinitesimo" di componenti $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$. In tal senso, la scrittura sopra riportata dovrebbe essere considerata come una "scrittura abbreviata" della scrittura $(\mathrm{d}l)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2$. Come è ben noto, tale senso intuitivo riceve una veste più "rigorosa" nel senso dell'analisi come segue. Si considera innanzitutto nello spazio ordinario una curva Γ (lettera greca gamma maiuscola) rappresentata in forma parametrica, ovvero nella forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ con $\lambda \in I$, dove I è un intervallo $\lambda_0 \le \lambda \le \lambda_1$ (lettera greca lambda). Allora la lunghezza $l(\Gamma)$ può essere definita in due modi (che si mostra essere equivalenti, sotto naturali ipotesi):

1. Geometricamente, come limite (che si dimostra esistere sotto naturali ipotesi) della somma di lunghezze di spezzate approssimanti la curva;

2. Cinematicamente (si pensi al parametro λ come analogo del tempo t, sicché $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\lambda}$ è l'analogo del vettore velocità), come [62]

$$l(\Gamma) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} ||\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\lambda}||\,\mathrm{d}\lambda\ , \tag{5.6.4}$$

   dove la lunghezza, o norma, $||\cdot||$ è valutata con l'assegnata metrica: in coordinate cartesiane ortogonali,

$$||\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\lambda}||^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 . \tag{5.6.5}$$

   Dunque, per un intervallo "infinitesimo"$\mathrm{d}\lambda$ del parametro λ analogo al tempo (stiamo qui usando il "linguaggio abbreviato" solitamente impiegato quando si compie il passaggio al limite per definire un integrale a partire da una somma di Riemann) la lunghezza percorsa è data del

prima dell'articolo stesso di Einstein, Poincaré ne aveva fatto uso per sfruttare il fatto che erano ben conosciuti gli invarianti nel caso pitagorico; e questo fatto egli utilizzò per dare una risposta a un problema fisico interessantissimo, ovvero come si deve cambiare la legge di gravitazione di Newton per renderla compatibile con la relatività. Invece Minkowski sembra muoversi su tutt'altro livello e, forse a causa di una abbondante libagione in qualche birreria di Zurigo, interpretò l'ovvio fatto sopra ricordato esclamando enfaticamente: "*Dunque l'essenza di questo postulato può essere rivestita matematicamente in modo molto pregnante con la mistica (sic !) formula* $3 \cdot 10^5$ *km* $= \sqrt{-1}$ *sec.* È proprio scritto così .

[62]Intuitivamente, per un incremento infinitesimo $\mathrm{d}\lambda$ il punto si sposta di $\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda$, dove $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\lambda}$ è l'analogo della velocità (se λ è l'analogo del tempo), e allora la lunghezza dello spazio percorso è $||\mathrm{d}\mathbf{x}|| = ||\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\lambda}||\mathrm{d}\lambda$. Il fatto che sotto naturali condizioni le due definizioni coincidono costituisce allora un teorema.

prodotto “velocità per tempo”, ovvero[63]

$$|\mathrm{d}l| = ||\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\lambda}||\,\mathrm{d}\lambda = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2}\;\mathrm{d}\lambda\ . \tag{5.6.6}$$

Questo è il modo “rigoroso” analitico di procedere: se è assegnata la funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$, allora $||\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\lambda}||$ è perfettamente definito (si tratta di un vettore, e non di un “infinitesimo”) come funzione di λ, e quindi l’integrale (5.6.4) è anch’esso perfettamente definito. Alla scrittura “analitica” (5.6.5) si fa allora corrispondere la scrittura “simbolica” (o formale)[64]

$$(\mathrm{d}l)^2 = \left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2\right](\mathrm{d}\lambda)^2\ ,$$

o più semplicemente (identificando $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda \equiv \mathrm{d}x$ e così via e denotando $(\mathrm{d}l)^2 \equiv \mathrm{d}l^2$ e così via)

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\,.$$

Si dimostra subito che la lunghezza di una curva non dipende dalla scelta della parametrizzazione (ovvero la lunghezza è una proprietà di una classe di equivalenza di curve parametrizzate). Inoltre, si osserva che tra tutte le scelte per il parametro λ ve ne è una “naturale”, che è quella di prendere per λ la lunghezza stessa. Con ciò si intende quanto segue. Fissata una parametrizzazione con un arbitrario parametro λ, e fisssato un punto O sulla curva Γ e una orientazione di questa in modo che λ cresca in maniera monotóna nella direzione positiva, a ogni punto $P \in \Gamma$, $P = P(\lambda)$, è associata la lunghezza calcolata lungo Γ a partire da O: $l = l(P) = l(\lambda)$, e la funzione $l(\lambda)$ è invertibile. Dunque si può esprimere $\lambda = \lambda(l)$ e si può prendere come parametro proprio l: $P(l) = P(\lambda(l))$. È ovvio (denotando con $\mathbf{x}$ il vettore OP) che $||\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}l}|| = 1$ (in altri termini, se si prende per tempo la lunghezza percorsa, la velocità vale 1).[65]

[63] Esempio. Si abbia nel piano x, y una curva definita in maniera esplicita da una funzione $y = y(x)$. Questo significa che come parametro λ si è scelta proprio la coordinata x, ovvero si ha $x = \lambda$. Si ha allora $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\lambda} = 1$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\lambda} = 0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\lambda} = y'$ (l’apice denota derivata), e dunque la lunghezza è data da

$$l(\Gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x\ .$$

[64] In effetti, a ben vedere, tutte le scritture sono simboliche. Solo, alcune di esse ci sono più familiari.

[65] È un semplicissimo esercizio mostrare che, se si prende come parametro proprio l e si denota $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}l}$, allora risulta che l’accelerazione $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}l}$ è normale alla velocità: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$: basta infatti derivare rispetto a l la relazione $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$.

Dunque, ammettendo di aver capito cosa si intende con la scrittura $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$, si ha che un senso del tutto analogo viene attribuito alla scrittura $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2$, come "versione infinitesima" della scrittura $s^2 = c^2t^2 - l^2$. Naturalmente, in questo caso una "curva" $x^\mu(\lambda)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, nello spaziotempo rappresenterà un movimento se si fa l'ipotesi che la curva sia di "tipo tempo" ovvvero che per ogni valore di λ il vettore $\{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\}$ sia di tipo tempo[66] (ovvero, come si verifica, si ha $v < c$ dove $v = \|\mathbf{v}\|$ è il modulo della ordinaria velocità $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$). Questo comporta in particolare che è possibile scegliere come parametro (in un fissato sistema di riferimento inerziale) il tempo t stesso, ovvero si può rappresentare il movimento nel modo classico della meccanica mediante una funzione

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \ .$$

Quando si opera questa ultima scelta si usa dire che si opera con il " **formalismo tridimensionale**". Si dice invece che si opera con il " **formalismo quadridimensionale**" quando si usa un parametro λ che non è il tempo, ovvero si scrive $x^\mu = x^\mu(\lambda), \mu = 0, 1, 2, 3$, e dunque $t = t(\lambda)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$. Ovviamente, anche nel formalismo quadridimensionale vi è un parametro "naturale", che è la lunghezza (o pseudolunghezza) s calcolata lungo la curva a partire da un suo punto arbitrario. E in tale caso si ha evidentemente $||\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}|| = 1$, con la consueta norma pseudoeuclidea. Di ciò faremo una verifica diretta più sotto, quando parleremo di quadrivelocità.

Una formula di grande importanza è la seguente: per le curve di tipo–tempo si ha

$$\mathrm{d}s = \gamma^{-1} c\mathrm{d}t \equiv \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad c\mathrm{d}t \,. \tag{5.6.7}$$

Con ciò si intende quanto segue (riferendosi alla intuitiva "versione infinitesima"; ma è ovvia la "versione rigorosa"). Se si prende come parametro il tempo t, ricordando[67] $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = v$ (ovvero $\mathrm{d}l = v\mathrm{d}t$) si ha

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - v^2\mathrm{d}t^2 = c^2\mathrm{d}t^2(1 - v^2/c^2) \,.$$

La scelta del segno + quando si prende la radice di $\mathrm{d}s^2$ è puramente convenzionale, e corrisponde al fatto che si sceglie l'orientazione della curva in modo che s cresca al crescere di t.[68]

---

[66] Si noti che la lunghezza del vettore $\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ dello spaziotempo dipende dalla parametrizzazione scelta, ma ne e' invece indipendente la natura del vettore di essere *timelike*, perché questa dipende solo dalla direzione del vettore.

[67] Quando sia assegnata la curva nello spaziotempo, e quindi il movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, la lunghezza l è veramente una funzione di t (cioè si ha $l = l(t)$)e $\mathrm{d}l$ è veramente il differenziale di una funzione, e si ha allora $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = v$.

[68] Naturalmente si potrebbe prendere anche il segno opposto, ed è irrilevante quale scelta si compia. Ciò è vero fin quando non si vogliano descrivere fenomeni connessi a "creazione di coppie", come illustrato da Stueckelberg e da Feynman negli anni '40. Si veda E.C.G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* **14**, 588–594 (1941), R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **74**, 939 (1948) e, per una discussione recente, A. Carati, *Found. Phys.* **28**, 843-853 (1998).

5. La lunghezza nello spaziotempo come tempo proprio, e il paradosso dei gemelli. La formula appena trovata

$$\mathrm{d}s = \gamma^{-1} c \mathrm{d}t$$

permette di capire perché la pseudolunghezza s viene chiamata **tempo proprio, o proper time**). Il motivo è che se la curva Γ nello spaziotempo rappresenta un punto fermo in un certo sistema di riferimento inerziale (quindi con $v(t) = 0$, ovvero $\gamma = 1$), allora per quel movimento si ha $\mathrm{d}s = c\mathrm{d}t$ e dunque s (o piuttosto s/c, ma qui non ci curiamo di questo dettaglio) rappresenta il tempo trascorso tra i due estremi della curva, essendo il tempo quello valutato nel sistema inerziale considerato. Se poi consideriamo una curva di tipo tempo, descrivente un punto che si muove rispetto all'assegnato sistema di riferimento (sistema stazionario) con velocità avente modulo $|v| < c$, in ogni istante t del sistema stazionario il punto avrà una certa posizione e una certa velocità $\mathbf{v} \neq 0$, per cui sarà $\mathrm{d}s = \gamma^{-1} c\mathrm{d}t \neq \mathrm{d}t$. D'altra parte si ricordi che $\mathrm{d}s$ *non* dipende dal sistema di riferimento (è un assoluto, come la lunghezza di una curva nella geometria ordinaria), e quindi possiamo valutarlo in un qualunque sistema di riferimento inerziale. Ora, in ogni istante t del sistema di riferimento stazionario K esiste un sistema di riferimento K' **comobile (o comoving)** con la particella, ossia un sistema K' la cui origine ha, rispetto a K, la stessa velocità $\mathbf{v}$ del punto considerato. Rispetto al sistema comobile, la particella ha velocità nulla ($v' = 0$, e quindi $\gamma' = 1$), e dunque $\mathrm{d}s = c\mathrm{d}t'$ dove $\mathrm{d}t'$ è l'intervallo di tempo trascorso nel sistema comobile K'. Si ha quindi

$$\mathrm{d}s = \gamma^{-1} c \, \mathrm{d}t = c \, \mathrm{d}t' \ .$$

Pertanto $\mathrm{d}s$ rappresenta (a meno dell'inessenziale fattore c, che può sempre essre posto uguale ad 1) il tempo (infinitesimo) trascorso su un orologio attaccato alla particella, ovvero il tempo (infinitesimo) trascorso per un osservatore "a cavallo della particella". Per questo motivo s viene detto "*tempo proprio*". Si noti che dall'ultima relazione segue

$$\mathrm{d}t' = \gamma^{-1} \mathrm{d}t$$

e dunque (essendo $\gamma \geq 1$)

$$\mathrm{d}t' \leq \mathrm{d}t \ .$$

In altri termini:"*Il tempo trascorso per l'osservatore stazionario è maggiore del tempo trascorso per l'osservatore comobile*". E in effetti questa è nient'altro che una versione più generale del fenomeno della **dilatazione dei tempi** che avevamo già discusso nel caso di moti inerziali.

A nient'altro che a questa medesima circostanza si riduce il ben noto "paradosso dei gemelli" (figura 5.16). Il primo gemello sta fermo in un sistema inerziale K (ad esempio nella origine spaziale di K), e quindi tra due

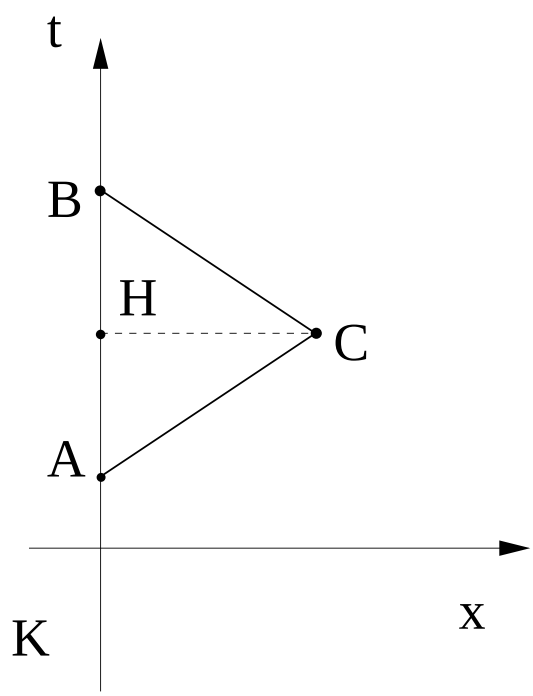

Figura 5.16: Il paradosso dei gemelli.

eventi A, B della sua linea di universo $x = 0$ (curva $\Gamma_1 \equiv AHB$) trascorre per lui un tempo $t_B - t_A$. Invece il secondo gemello si muove, allontanandosi dal primo e poi ritornandogli accanto (si pensi ad una spezzata nello spaziotempo, curva $\Gamma_2 \equiv ACB$). Si noti bene che nel punto C il secondo genello compie un moto accelerato: è questo l'elemento di **asimmetria tra i due gemelli**. Quindi, quando il secondo gemello si ricongiunge al primo in B, avendo percorso il cammino Γ_2, è trascorso per lui un tempo più breve. Equivalentemente, questo fatto si enuncia dicendo che tra le lunghezze delle due curve si ha la relazione $s(\Gamma_2) < s(\Gamma_1)$. Ribadiamo che quello che produce la asimmetria tra i due gemelli è il fatto che uno solo di essi sta fermo in un sistema inerziale, e l'altro no, perchè non esiste nessun sistema inerziale rispetto al quale il secondo gemello stia fermo; si può dire che "il moto (meglio, il moto accelerato) ringiovanisce" .

Si noti bene la differenza rispetto alla metrica euclidea. Nel caso della metrica euclidea, l'ipotenusa del triangolo rettangolo avente cateti $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ ha lunghezza $\mathrm{d}l$ con $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. e quindi vale $\mathrm{d}l^2 > \mathrm{d}x^2$; invece, nel caso pseudoeuclideo, l'ipotenusa del triangolo avente cateti $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$ ha (con $c = 1$) lunghezza $\mathrm{d}s$ con $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2$, e quindi vale $\mathrm{d}s^2 < \mathrm{d}t^2$.[69] Le rette sono curve di lunghezza

[69] In particolare, essendo $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t'$, dove $\mathrm{d}t'$ è il tempo trascorso per l'osservatore comibile, da $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t'$ segue $|\mathrm{d}t'| < |\mathrm{d}t|$ (dilatazione dei tempi).

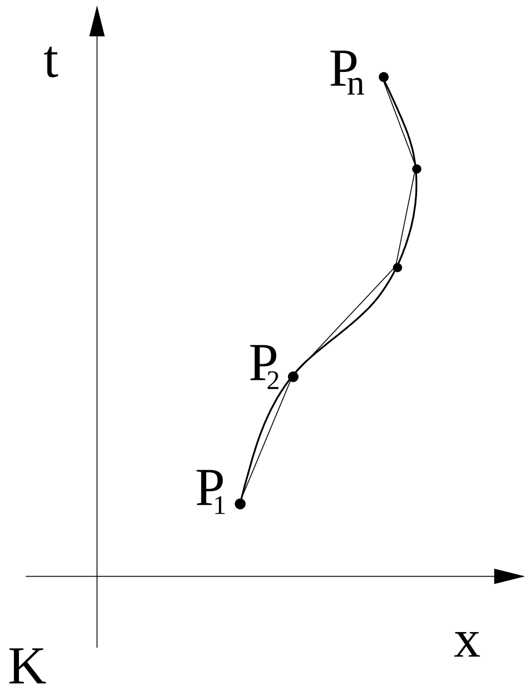

Figura 5.17: La lunghezza di una curva *timelike* come tempo proprio.

minima nello spazio ordinario. Invece le rette rappresentanti nello spaziotempo moti rettilinei uniformi (di tipo tempo) sono curve di pseudolunghezza massima.[70]

Un'ultima osservazione riguarda la nozione di sistema comobile quando si ha a che fare con un moto non uniforme, e si definisce il corrispondente tempo proprio come la corrispondente lunghezza. Infatti in tal caso si considera un diverso sistema di riferimento inerziale (detto comobile) ad ogni istante, e quindi può lasciare perplessi il fatto che parliamo di tempo in una situazione in cui non stiamo facendo riferimento a un unico sistema inerziale. A questo proposito può essere rilevante la seguente osservazione, che abbiamo già segnalato all'inizio del presente capitolo. Quando confrontiamo orologi di diversi sistemi inerziali (la banchina o il treno), dobbiamo tenere presente che ci riferiamo a una situazione in cui uno dei due sistemi ha subíto delle accelerazioni. Infatti abbiamo costruito gli orologi in diverse copie equivalenti, restando in un unico sistema inerziale (la banchina); poi ne abbiamo messo una copia su un treno fermo, e abbiamo accelerato il treno (moto noninerziale) fino a fargli raggiungere una desiderata velocità relativa

[70]In ogni caso, si è in presenza di punti di stazionarietà o critici (detti anche estremali). Come si è visto nel capitolo sui principi variazionali, le leggi fisiche sono caratterizzate da proprietà di stazionarietà, che in casi particolari possono corrispondere a proprietà di massimo o di minimo.

alla banchina, dopodiché lo abbiamo lasciato andare di moto uniforme. Con tale operazione di tipo noninerziale l'orologio ha subito una modificazione, e segna ora il tempo proprio del nuovo sistema di riferimento inerziale. In tal caso, parafrasando un commento di Sommerfeld a proposito di questa giustissima perplessità[71], è conveniente pensare che la modificazione (rallentamento degli orologi) non è dovuta al fatto che il sistema si muove, ma al fatto che il sistema è stato accelerato. Se si è capito questo, allora il gioco è fatto. Perché posso ora considerare, in un sistema "stazionario" K, una successione di movimenti uniformi rappresentati ciascuno da un diverso segmento di retta. Ottengo in tal modo una spezzata, mediante la quale approssimo un preassegnato moto non uniforme (una "curva" non coincidente con una retta). Per ciascun segmento è allora definita la lunghezza (ovvero il tempo proprio) nel modo suddetto, e per somma si ottiene il tempo proprio (la lunghezza) della linea spezzata. Infine si può definire il tempo proprio della curva come limite nel modo consueto (figura 5.17). Questo procedimento è del tutto analogo a quello con cui si definisce la lunghezza di una curva nello spazio ordinario, approssimando una curva con spezzate, ovvero con segmenti di rette (per i quali è definita la lunghezza), e passando poi al limite. È proprio in questo modo che si definisce la lunghezza s delle curve nello spaziotempo, e quindi il tempo proprio del corrispondente movimento.

5.7 Applicazione fisica: la lagrangiana della particella libera e la relazione $E = mc^2$ (o piuttosto $E = m\gamma c^2$).

Vogliamo ora illustrare la potenza *dinamica* del principio di costanza della velocità della luce, come essa si manifesta attraverso il corrispondente assioma che attribuisce una metrica pseudoeuclidea allo spaziotempo. Una prima conseguenza, già messa in luce, è che le possibili velocità $\mathbf{v}$ delle particelle libere sono un insieme limitato, poiché deve essere in ogni caso $v \equiv ||\mathbf{v}|| < c$. Ciò è dovuto al fatto che se fosse possibile accelerare una particella fino ad una velocità $\mathbf{v}$ con $v > c$, allora si potrebbe pensare ad un sistema di riferimento solidale (comobile) con la particella, e questo allora avrebbe velocità $\mathbf{v}$ rispetto al sistema di riferimento "stazionario" K, mentre sappiamo che i sistemi inerziali sono connessi da trasformazioni di Lorentz con velocità relative $\mathbf{v}$ con $v < c$, a causa della divergenza del fattore γ nell'espressione del cambiamento di coordinate. Vogliamo ora mostrare che una analoga conseguenza dinamica sia la celebre relazione di Einstein $E = mc^2$,

[71] luogo citato, nota (4): " *The retardation of the moving clock does not therefore actually indicate "motion", but "accelerated motion".*

che noi scriveremo piuttosto nella forma $E = m\gamma c^2$.[72] Più precisamente, tale relazione appare come un corollario di un'altra proprietà, che è l'attribuzione di una lagrangiana alla particella libera, nella forma

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ .$$

Stabilito che la lagrangiana ha la forma suddetta, si precede poi come consueto nel formalismo lagrangiano per dedurre l'energia dalla lagrangiana, e in tal modo si dedurrà[73] la relazione $E = m\gamma c^2$.

1. La lagrangiana della particella libera. Si tratta dunque di capire da dove venga la suddetta prescrizione per la lagrangiana della particella libera. Vogliamo mostrare come tale prescrizione sia proprio collegata all'assegnazione della metrica pseudoeuclidea $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2$ ovvero (per le curve di tipo–tempo) $\mathrm{d}s = \gamma^{-1}c\mathrm{d}t$. Si noti bene che si procede qui in maniera induttiva, ovvero non si deduce un teorema, ma si induce, si inventa, un assioma. Il principio che si segue è quello della **geometrizzazione della dinamica**, in cui si caratterizza il movimento rettilineo uniforme (pensato come una curva nello spaziotempo, munito della metrica di Lorentz) analogamente al modo in cui si caratterizza una linea retta nello spazio ordinario, rispetto alla metrica ordinaria. L'analogia consiste anzitutto nel fatto che un moto rettilineo uniforme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t$ (con due assegnati vettori $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v}_0$) è una *retta nello spaziotempo.* Ora (si ricordi il capitolo sul calcolo delle variazioni), le rette nello spazio ordinario sono geodetiche[74], ovvero estremali (detti anche punti critici o punti stazionari) della lunghezza, ossia sono le curve Γ (lettera greca gamma maiuscola) nello spazio caratterizzate da $\delta l(\Gamma) = 0$ dove $l(\Gamma)$ è la lunghezza euclidea della curva e δ denota l'analogo del differenziale nell'ambito dell'analisi funzionale. Se ora riguardiamo ad un movimento come ad una curva di tipo tempo (cioè con $v < c$) nello spaziotempo (munito della metrica di Lorentz), è naturale attendersi che le rette dello spaziotempo (moti rettilenei uniformi) siano anch'esse geodetiche, ovvero estremali della corrispondente lunghezza, vale a dire siano curve Γ tali che $\delta s(\Gamma) = 0$ dove $s(\Gamma)$ è la lunghezza pseudoeuclidea (tempo proprio) della curva Γ. In effetti ciò è proprio vero, e si dimostra che: *Le rette di tipo tempo nello spaziotempo (moti rettilinei uniformi con $v < c$) sono geodetiche, ovvero estremali della lunghezza pseudoeuclidea.*

Per dimostrare questo fatto, si osserva che la lunghezza di una curva nello spaziotempo è un funzionale, del tipo di quelli che si erano considerati nel capitolo sul

[72] Si tratta di una pura questione di *notazione.* Einstein denota con m_0 la cosidetta massa a riposo (vedi sotto) che noi denotiamo con m; Einstein invece denotava con m la quantità $m_0\gamma$.

[73] Si veda anche il procedimento seguito in A. Schild, Phys. Rev. **92**, 1009 (1953).

[74] In inglese *geodesic.* Per questo motivo, anche molti studiosi italiani chiamano le geodetiche con il nome di geodesiche.

calcolo delle variazioni. Ricordando infatti l'espressione dell'"elemento di linea" $\mathrm{d}s = \gamma^{-1}\, c\mathrm{d}t$, si ha che la lunghezza s di una curva rappresentata nella forma tridimensionale $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ è data da

$$s[\mathbf{x}(t)] = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_\Gamma \sqrt{1 - v^2/c^2}\, c\mathrm{d}t\ , \quad \text{con} \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\ .$$

Quindi la lunghezza pseudoeuclidea $s[\mathbf{x}(t)]$ di una curva nello spaziotempo, rappresentata in forma tridimensionale mediante una funzione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, ha lo stesso aspetto che ha in ambito lagrangiano l'azione $S[\mathbf{q}(t)] = \int L\mathrm{d}t$ corrispondente a un movimento $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$. Nel caso della curva nello spaziotempo, l'analogo della lagrangiana è ora la funzione $L = c\gamma^{-1}$. Quindi il problema di ricercare i movimenti $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ che sono estremali della lunghezza nello spaziotempo è equivalente a ricercare i movimenti relativi alla lagrangiana suddetta. Dobbiamo dimostrare che gli estremali sono moti rettilinei uniformi. D'altra parte, ciò è vero come immediato corollario della seguente proposizione.

Lemma. Ogni lagrangiana $L = f(v^2)$ con una funzione f arbitraria[75] produce moti rettilenei uniformi.

Dimostrazione. Una generica lagrangiana è a priori una funzione $L = L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Poichè la lagrangiana $L = f(v^2)$ non dipende da $\mathbf{x}, t$ sappiamo che si conservano il momento $\mathbf{p}$ e l'energia E definiti da

$$\begin{cases} \mathbf{p} := & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \\ E := & \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L \end{cases} .$$

Si trova immediatamente (si ricordi $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$)

$$\begin{cases} \mathbf{p} = & 2\mathbf{v}f'(v^2) \\ E = & 2v^2 f'(v^2) - f(v^2) =: g(v^2) \end{cases}$$

(f' è la derivata di f rispetto al suo argomento). Dunque, dal fatto che E è costante del moto segue che v^2 costante del moto (si ammette che la funzione g non sia identicamente costante), e quindi dal fatto che $\mathbf{p}$ è costante del moto segue che $\mathbf{v}$ è costante del moto. Quindi il moto è rettilineo uniforme.

Abbiamo pertanto come corollario il

Teorema 3 *Le rette di tipo tempo dello spaziotempo (moti rettilinei uniformi con $v < c$) sono estremali del funzionale lunghezza $s = \int \mathrm{d}s = \int \sqrt{1 - v^2/c^2}\, c\mathrm{d}t$, ovvero, come si dice, sono geodetiche (di tipo tempo) per la lunghezza pseudoeclidea.*

Dunque, in virtù dell'analogia fra i moti rettilinei uniformi (rette dello spaziotempo) e le rette dello spazio ordinario (entrambe sono estremali della

[75] L'arbitrarietà potrebbe essere precisata in un modo che apparirà ovvio dalla dimostrazione.

corrispondente lunghezza, o, come si dice, sono geodetiche), saremmo indotti a prendere per lagrangiana della particella libera la funzione $L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = c\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Ricordiamo tuttavia che nella scelta della lagrangiana si ha sempre libera una costante moltiplicativa (perché essa non altera le equazioni di moto), e quindi possiamo prendere come lagrangiana la funzione

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = a\,\sqrt{1 - v^2/c^2}\ ,$$

con un fattore moltiplicativo a ancora indeterminato. La convenienza di questa scelta è legata al fatto che possiamo determinare univocamente il fattore a in modo da poter soddisfare quello che potremmo chiamare " **principio di corrispondenza**". Tale principio viene usato quando si fonda una nuova teoria che ne estende una vecchia, e si richiede che la nuova si riduca alla vecchia in un opportuno limite. Il nome fu coniato a proposito della relazione tra meccanica quantistica e meccanica classica (la prima si deve ridurre alla seconda quando le azioni in gioco sono grandi, formalmente nel limite $\hbar \to 0$, dove $\hbar$ è la costante (ridotta) di Planck). Qui analogamente si richiederà che la nuova teoria, quella relativistica, si riduca a quella classica quando le velocità in gioco sono piccole rispetto alla velocità della luce (formalmente, $c \to \infty$, o meglio $v/c \to 0$).

Dunque, nel caso della relatività, soddisfare il principio di corrispondenza vuol dire garantire che si abbia (si ricordi che nella lagrangiana le costanti additive sono irrilevanti)

$$L \simeq \frac{1}{2}mv^2 + \mathrm{cost} \quad \text{per} \quad \frac{v}{c} \to 0\ .$$

Ora, questa condizione viene soddisfatta in maniera univoca con una opportuna scelta della costante moltiplicativa a. Infatti, per il noto sviluppo della radice ($\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$), per $v/c \ll 1$ si ha

$$L \equiv a\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq -\frac{a}{2}\frac{v^2}{c^2} + a\ ,$$

sicché il principio di corrispondenza fornisce univocamente

$$a = -mc^2\ .$$

Siamo così pervenuti al seguente

Assioma: La lagrangiana L per la particella libera in relatività speciale è data (in un sistema inerziale) da

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\ .$$

Abbiamo dunque trovato (con le parole che forse userebbe Levi–Civita) che, tra tutte le lagrangiane che producono moti rettilinei uniformi ($L =$

$f(v^2)$), ne esiste una, precisamente $L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$, che è una modificazione della lagrangiana classica che risulta impercettibile per piccole velocità, e conduce a un'azione $S = \int L \mathrm{d}t$ che ha carattere geometrico nello spaziotempo, poichè è un multiplo della lunghezza della corrispondente curva: $S = -mc\int \mathrm{d}s$. In altri termini, i due principi:

1. principio di geometrizzazione della dinamica (caratterizzare i movimenti mediante un'azione avente carattere geometrico, cioè con valore indipendente dal sistema di riferimento),

2. principio di corrispondenza,

fissano univocamente l'azione della particella libera e così anche, in ogni sistema inerziale, la corrispondente lagrangiana. In tal modo i movimenti della particella libera risultano essere geodetiche dello spaziotempo.

La profondità di questo risultato sta nel fatto che è possibile mostrare[76] che anche i moti dei raggi di luce sono geodetiche dello spaziotempo, solo con la peculiarità di corrispondere a curve di lunghezza nulla (dette "geodetiche nulle"). Quindi lo stesso "elemento di linea" $\mathrm{d}s$ (ovvero la stessa metrica o lo stesso prodotto scalare) fornisce il moto sia delle particelle materiali (dotate di massa $m > 0$), sia dei raggi di luce: entrambi sono caratterizzati come moti geodetici.

2. L'energia e il momento della particella libera. Ci si può giustamente chiedere perché abbiamo fatto tanta fatica per giustificare l'assioma che ci ha fornito la lagrangiana della particella libera. Infatti, nella meccanica ordinaria, di solito la lagrangiana è fissata, e si resta poi con il problema di calcolare i movimenti che essa determina, attraverso le corrispondenti equazioni di Lagrange. Qui la situazione è capovolta, perché stiamo studiando la particella libera, di cui ben conosciamo i movimenti. Anzi, questi vengono utilizzati addirittura per definire i sistemi inerziali: nei sistemi inerziali i moti della particella libera sono rettilinei unformi. Abbiamo visto che esistono infinite lagrangiane che producono tali movimenti, e tra esse ne abbiamo selezionata una ben precisa, possiamo dire "con il fiocco rosa", mediante il principio di geometrizzazione della dinamica e il principio di corrispondenza. Ora vediamo il frutto di tutta questa fatica, perché possiamo impiegare gli strumenti della meccanica analitica per dedurre, dalla nota forma della lagrangiana, la forma della energia della particella libera. Questa ci fornirà in particolare la famosa formula $E = mc^2$ per la cosiddetta energia a riposo. Vediamo dunque come si procede.

Si procede esattamente come nel capitolo sulle equazioni di Lagrange, introducendo il momento $\mathbf{p} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ e l'energia generalizzata $E := \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L \equiv \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L$, e anche la corrispondente Hamiltoniana $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$. Con

[76] Si veda ad esempio T. Levi Civita *Fondamenti di meccanica relativistica*, Zanichelli (Bologna, 1928), facilmente reperibile, come appendice, nella edizione inglese *The absolute differential calculus*, Dover (New York, 1977), Parte III.

calcoli immediati, che non sono altro che una particolarizzazione di quelli sopra riportati per una generica lagrangiana $L = f(v^2)$ (qui con $f(v^2) = -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}$), si ottiene allora il

Teorema 4 *Per la particella libera, il momento* $\mathbf{p}$ *e l'energia* E *sono dati da*

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m\gamma\mathbf{v} \\ E &= m\gamma c^2 \ . \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

Inoltre $\mathbf{p}$ *ed* E *non sono indipendenti, ma si ha*

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \ . \tag{5.7.2}$$

Da quest'ultima relazione si ottiene poi l'hamiltoniana (energia in funzione di $\mathbf{p}$*) l'espressione*

$$H^2 = c^2\left(\mathbf{p}^2 + m^2c^2\right) \ , \tag{5.7.3}$$

ovvero, scegliendo il segno + per la radice,

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2} \quad . \tag{5.7.4}$$

In particolare, nel limite nonrelativistico ($v^2/c^2 \ll 1$ *o equivalentemente* $p^2/(m^2c^2) \ll 1$*) si ha*

$$\begin{aligned} \mathbf{p} =& m\mathbf{v} \\ E =& \frac{1}{2}mv^2 + mc^2 \\ H =& \frac{p^2}{2m} + mc^2 \ . \end{aligned} \tag{5.7.5}$$

Dimostrazione. La relazione $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ segue dalla definizione $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$, eseguendo la derivata e ricordando $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$. Analogamente, per E basta usare il risultato appena trovato per $\mathbf{p}$ e calcolare $E = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L$, ovvero:

$$\begin{aligned} E =& m\gamma v^2 + m\gamma^{-1}c^2 = m\gamma c^2\left(\frac{v^2}{c^2} + \gamma^{-2}\right) \\ =& m\gamma c^2\left(\frac{v^2}{c^2} + 1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m\gamma c^2 \ . \end{aligned} \tag{5.7.6}$$

Così anche si trova

$$(E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2c^2 \ .$$

Infine, l'Hamiltoniana è nient'altro che l'energia generalizzata, $E = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L$, solo espressa attraverso il momento $\mathbf{p}$ anzichè la velocità $\mathbf{v}$. Dunque basta risolvere rispetto ad E/c la relazione $(E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$.[77] Da ultimo, le approssimazioni nonrelativistiche si ottengono da $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x$.

Nota: Dirac e le antiparticelle. Nel passare dalla relazione quadratica (5.7.2) alla relazione lineare (5.7.4) attraverso l'estrazione di radice abbiamo compiuto la scelta tradizionale del segno $+$, mentre si potrebbe prendere a priori anche il segno $-$. Questa banale osservazione costituisce il cuore del procedimento con cui Dirac introdusse l'equazione per la descrizione quantistica relativistica dell'elettrone, che lo ha condotto alla previsione delle antiparticelle, osservate poco dopo sperimentalmente da Anderson e da Blackett e Occhialini (si tratta del positrone, 1932). Il procedimento di Dirac, che per genialità è quasi paragonabile a quello con cui Heisenberg pervenne alla formulazione della meccanica quantistica, è illustrato nel capitolo XI (*Relativistic theory of the electron*) del libro di Dirac, [78] a pag 255.

3. Conseguenza fisica: energia a riposo (o rest energy). Dunque, nel limite di piccole velocità abbiamo ottenuto per l'energia l'espressione approssimata

$$E \simeq \frac{1}{2}mv^2 + mc^2 \ ,$$

in cui compare la stessa costante additiva (ma cambiata di segno) che appariva nello sviluppo della lagrangiana. Si scopre in tal modo che la particella libera possiede una energia anche quando è ferma (a riposo, come si dice, cioè con $v = 0$), precisamente, l'energia $E = mc^2 > 0$ (energia a riposo, o *rest energy*). In altri termini, l'energia della particella libera è composta di una parte dovuta al movimento, cioè che essa possiede per il fatto di muoversi rispetto a un sistema inerziale (**energia cinetica**, data da $m\gamma c^2 - mc^2 \equiv mc^2(\gamma - 1) \simeq mv^2/2$ per piccole velocità)[79], e da una ulteriore parte, che essa possiede per il solo fatto di avere una massa, e coincide con l'energia che essa ha nel sistema "comobile". Pertanto, se in una reazione (ad esempio di tipo nucleare) certe particelle (reagenti) si combinano in modo che la massa finale sia minore della somma delle masse dei reagenti, allora la massa mancante dovrà essere stata emessa sotto altra forma di energia, ad esempio radiazione elettromagnetica. Questo è il risultato fondamentale cui

[77] Si noti che valgono anche le relazioni

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v} \ , \qquad \dot{E} = \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} \ .$$

La prima è conseguenza della coppia $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}, E = m\gamma c^2$; la seconda (analoga al teorema dell'energia in meccanica nonrelativistica)si ottiene derivando rispetto al tempo la relazione $(E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$, ottenendo $E\dot{E} = c^2\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}}$, ovvero $\dot{E} = (\frac{c^2}{E}\mathbf{p}) \cdot \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{p}}$.

[78] P.A.M. Dirac. *The principles of quantum mechanics*, Oxford at the Clarendon Press (Oxford, 1958).

[79] Si noti che, per la particella libera, nel caso nonrelativistico l'energia cinetica coincide con la lagrangiana L. Ciò non è assolutamente più vero in relatività, dove l'energia cinetica coincide con l'energia $m\gamma c^2$ a cui si sottragga l'energia a riposo mc^2. In relatività, quindi, la lagrangiana non ha il significato che aveva nella teoria classica.

abbiamo potuto pervenire utilizzando la forma esplicita della lagrangiana della particella libera.[80]

Naturalmente, le considerazioni sopra svolte sembrano presentare una difficoltà essenziale. In effetti, nella meccanica classica siamo abituati a considerare l'energia come definita a meno di una costante additiva (come avviene per la lagrangiana), e allora resta da spiegare perché in relatività la costante additiva sopra trovata per l'energia non possa essere trascurata. La ragione è la seguente. In relatività (come mostreremo qui sotto) l'energia non è uno scalare, ma la componente temporale di un quadrivettore, nello stesso senso in cui ct è la componente temporale del quadrivettore $(ct, \mathbf{x}) = \{x^\mu\}_{\mu=0}^3$ (la ragione degli indici in alto verrà spiegata nel prossimo capitolo). Quindi non è lecito sottrarre un numero all'energia, cioè alla componente di un vettore, perché in generale non si può sommare un numero a un vettore: i vettori possono essere sommati con vettori, o moltiplicati per un numero.

4. Il formalismo quadridimensionale: la quadrivelocità e il quadrimomento. L'energia come "componente temporale" del quadrimomento. La quadriaccelerazione. Dobbiamo quindi mostrare in che senso l'energia è la componente temporale di un vettore, e ciò verrà fatto discutendo il cosiddetto formalismo quadridimensionale; in tal modo verrà tra l'altro fornito un significato alla relazione $(E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$, che sopra appariva come una pura identità.

Veniamo dunque ad illustrare cosa si intende per *formalismo quadridimensionale* e come in particolare si introducono la *quadrivelocità* e il *quadrimomento*. Abbiamo già detto che un vettore nello spaziotempo (quadrivettore) è individuato in un sistema di riferimento inerziale (quando per la parte spaziale si fa uso delle consuete coordinate cartesiane $(x, y, z) \equiv \mathbf{x}$) dalle quattro componenti $\{x^\mu\}_{\mu=0}^3$ con $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Scriveremo anche

$$\{x^\mu\}_{\mu=0}^3 = (ct, \mathbf{x}) \ ,$$

operando in tal modo la *decomposizione in parte temporale e parte spaziale* (rispetto ad un assegnato sistema di riferimento). Un movimento è allora individuato da una curva parametrizzata (anzi, una classe di equivalenza rispetto a cambiamento di parametro), $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ (di tipo tempo). E poichè disponiamo della metrica $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}l^2$, è spontaneo prendere la convenzione di scegliere come parametro quello che abbiamo già chiamato parametro naturale, ovvero la lunghezza s (tempo proprio) lungo la curva:

$$x^\mu = x^\mu(s) \ .$$

[80]Einstein ottiene questo risultato, in una interessantissima maniera diversa, meno formale. Egli fa uso tuttavia di formule relative al campo elettromagnetico, che noi non abbiamo ancora a disposizione. Inoltre, Einstein stesso afferma che il risultato non deve dipendere dall'utilizzazione di un campo particolare, come il campo elettromagnetico. La deduzione qui presentata potrebbe essere la più generale concepibile in ambito puramente meccanico.

Resta allora spontaneamente definita la corrispondente quadrivelocità

$$u^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3) \ , \tag{5.7.7}$$

che risulta essere proprio un vettore (un quadrivettore), in quanto derivata di un vettore rispetto a un parametro che è assoluto, ovvero non dipende dal sistema di riferimento. Inoltre risulta ovviamente (come ricordato più sopra, ma lo verificheremo subito sotto) che il quadrivettore $\{u^\mu\}$ ha norma 1, rispetto al prodotto scalare pseudoeuclideo.

Infatti, allo stesso modo in cui calcoliamo la pseudolunghezza del vettore quadriposizione mediante la formula della metrica pseudoeuclidea, ovvero

$$||\{x^\mu\}||^2 = (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2 \equiv c^2t^2 - \mathbf{x}^2 \ ,$$

così anche per la pseudolunghezza del vettore quadrivelocità avremo

$$||\{u^\mu\}||^2 = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 \ .$$

È ora interessante esprimere le componenti u^μ della quadrivelocità in termini elementari (ovvero in termini tridimensionali). A tal fine basta ricordare $\mathrm{d}s = (c/\gamma)\,\mathrm{d}t$, sicché

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ ,$$

e pertanto si ha

$$u^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \ .$$

Ma $\frac{\mathrm{d}x^0}{c\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(ct)}{c\mathrm{d}t} = 1$, e $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} := \mathbf{v}$. Dunque abbiamo la decomposizione

$$\{u^\mu\} = \gamma(1, \frac{\mathbf{v}}{c}) \equiv (\gamma, \gamma\frac{\mathbf{v}}{c}) \ . \tag{5.7.8}$$

Come esercizio, si controlla $||\{u^\mu\}||^2 = 1$: infatti, $||\{u^\mu\}||^2 = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = \gamma^2 - \gamma^2v^2/c^2 = \gamma^2(1 - v^2/c^2) = 1$.

Introduciamo ora il quadrimomento $\{p^\mu\}$ come multiplo della quadrivelocità $\{u^\mu\}$:[81]

$$p^\mu = mcu^\mu \ , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \ . \tag{5.7.9}$$

Si osservi che risulta evidentemente

$$||\{p^\mu\}||^2 = m^2c^2$$

[81] Può suscitare perplessità la presenza del fattore c. Essa è dovuta al fatto che la definizione classica del momento, ovvero $\mathbf{p} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$, fa intervenire la derivata rispetto al tempo t, mentre qui interviene la derivata rispetto al tempo proprio s, che contiene ct anziché t. Invece, molti autori definiscono come tempo proprio la quantità s/c, e quindi il fattore c manca nella definizione del momento. In effetti, l'atteggiamento che qui si vorrebbe tenere sarebbe di eliminare del tutto c, prendendo unità con $c = 1$.

(infatti se un vettore è multiplo di un altro, la sua lunghezza è uguale alla lunghezza dell'altro moltiplicata per quel medesimo multiplo). D'altra parte, dalla decomposizione $\{u^\mu\} = (\gamma, \gamma\mathbf{v}/c)$ si ha la corrispondente decomposizione $\{p^\mu\} = (m\gamma c, m\gamma\mathbf{v})$, ovvero

$$\{p^\mu\} = (\frac{E}{c}, \mathbf{p}) \tag{5.7.10}$$

e dunque da $||\{p^\mu\}||^2 = m^2c^2$ e dalla definizione di prodotto scalare segue

$$(E/c)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \ . \tag{5.7.11}$$

Questa relazione fornisce l'interpretazione promessa sopra: la relazione che sussiste tra energia (divisa per c) E/c e momento $\mathbf{p}$ esprime il fatto che tali quantità sono le componenti temporale e spaziale di un quadrivettore, il quadrimomento $p^\mu = mcu^\mu$, che ha lunghezza mc perché u^μ ha lunghezza unitaria.

Osservazione (iperboloide di massa). Abbiamo già osservato in un precedente paragrafo che i vettori $\{x^\mu\}$ di tipo tempo aventi lunghezza unitaria giacciono nello spaziotempo sull'iperboloide $c^2t^2 - l^2 = 1$. Allo stesso modo, in relazione allo spazio dei vettori quadrimomento $\{p^\mu\}$, abbiamo qui mostrato che i quardimomenti di una particella di massa m giacciono sull'iperboloide (5.7.11), detto *iperboloide di massa*. Dunque possiamo anche dire che la massa di una particella (cioè sostanzialmente la sua energia a riposo) determina il particolare iperboloide su cui si deve trovare il corrispondente quadrimomento (detto anche quadrivettore energia–momento). È questa una ulteriore conferma del carattere intrinseco della energia a riposo di una particella.

5. Alcune osservazioni sul fotone. È noto che il fotone viene pensato come "*il quanto*" del campo elettromagnetico, e così (come si mostra in elettrodinamica quantistica) viene in qualche modo assimilato a una particella di massa nulla. Vogliamo qui mettere in luce come le formule sopra discusse per l'energia e il momento della particella libera consentano di comprendere perché per una particella debbano essere connesse le due proprietà di avere massa nulla e di muoversi con velocità c. L'osservazione è la seguente: ben sappiamo che la funzione $\gamma = \gamma(v)$ diverge per $v \to c$, mentre d'altra parte E e $\mathbf{p}$ sono entrambi proporzionali al prodotto $m\gamma$. Pertanto, se si vuole che energia e momento restino finiti al limite $v \to c$, è necessario che si abbia contemporaneamente $m \to 0$ in maniera opportuna. In questo senso si può affermare che **ogni particella che ha velocità c deve necessariamente avere massa a riposo nulla**.

Un altro aspetto di questa circostanza è il seguente. Se una particella si muove, in un sistema inerziale, con velocità $v < c$, allora sappiamo che è possibile "attaccare" ad essa un altro sistema inerziale con cui essa sia comobile. Ma questo non è possibile se $v = c$. Dunque in questo senso i fotoni sono particelle "anomale", perché non è possibile pensarle come "a cavallo" di un sistema inerziale (ciò infatti non è consentito dalla trasformazione di Lorentz). Questo sembra ragionevole. Infatti un sistema inerziale deve possedere regoli e orologi, quindi deve in qualche modo essere massivo (costituito di "materia"), e dunque, per quanto osservato sopra, non può avere velocità di traslazione c rispetto a un altro sistema inerziale.[82]

6. La quadriaccelerazione. Per analogia con la definizione della quadrivelocità $u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$, è del tutto spontaneo definire la quadriaccelerazione a^μ come

$$a^\mu := \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} \ . \tag{5.7.12}$$

Esercizio. Si mostri che per la quadriaccelerazione si ha la decomposizione in parte temporale e parte spaziale data da[83]

$$a^\mu \equiv \frac{\gamma}{c^2}\big(\dot\gamma c, \dot\gamma \mathbf{v} + \gamma \mathbf{a}\big) \ . \tag{5.7.13}$$

Si noti in particolare come la "parte spaziale" della quadriaccelerazione contenga non solo un termine proporzionale alla ordinaria accelerazione $\mathbf{a}$, ma anche un termine proporzionale a $\mathbf{v}$.

Esercizio. Si mostri che

$$\mathbf{a} = 0 \quad \mathrm{e}' \ \ \text{equivalente ad} \quad a^\mu = 0 \ .$$

Svolgimento. Che $\mathbf{a} = 0$ comporti $a^\mu = 0$ segue subito dalla decomposizione (5.7.13), usando il fatto che $\dot\gamma$ risulta essere proporzionale ad $\mathbf{a}$. Per dimostrare l'inverso si comincia a uguagliare a zero la componente temporale di a^μ, sicché, essendo $\gamma \neq 0$, segue $\dot\gamma = 0$. Allora, uguagliando a zero la parte spaziale, segue $\mathbf{a} = 0$.

É ora naturale chiedersi come avvenga che la condizione $\mathbf{a} = 0$, che comporta tre equazioni, sia equivalente alla condizione $a^\mu = 0$, che ne comporta quattro. La risposta sta nell'osservazione che le quattro componenti di $a^\mu = 0$ non sono indipendenti. Infatti, già non sono indipendenti le quattro componenti della quadrivelocità u^μ, perché essa ha lunghezza unitaria:

$$||\{u^\mu\}||^2 = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = 1 \ .$$

Così derivando rispetto ad s tale relazione si trova una relazione tra le quattro componenti della qudriaccelerazione, che vedremo esprimere il fatto che

[82] Nota per gli autori. Restano da scrivere tre paragrafi, ovvero: 1. Applicazione fisica: L'ottica relativistica, la formula di Fizeau e l'effetto Doppler, 2. Applicazione fisica: La relazione $E = mc^2$ e le reazioni nucleari,

[83] Si tratta di banali calcoli, che si compiono usando la relazione $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = \frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

quadivelocità e quadriaccelerazione sono ortogonali (su questi fatti ritorneremo quando ci saremo familiarizzati con la scrittura del prodotto scalare nello spaziotempo in forma covariante). D'altra parte, essendo $\gamma \neq 0$, l'equazione temporale $a^0 = 0$ si riduce a $\dot{\gamma} = 0$, cioè $\dot{E} = 0$, e dunque coincide con la legge di conservazione dell'energia, che risulta essere conseguenza dell'equazione di Newton $\mathbf{a} = 0$.

5.7.1 Forma covariante del principio di azione per la particella libera

Già sappiamo che i movimenti della particella libera, riguardati come curve (di tipo tempo) nello spaziotempo, sono geodetiche rispetto alla lunghezza naturale dello spaziotempo, cioè sono estremali della lunghezza $s = \int \mathrm{d}s$, dove "l'elemento di linea" $\mathrm{d}s$ è definito da

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 - v^2/c^2} \;\; c\mathrm{d}t \; . \tag{5.7.14}$$

Ciò ci ha poi condotto ad introdurre per la particella libera l'azione hamiltoniana

$$S = -mc \int \mathrm{d}s$$

in maniera da soddisfare il principio di corrispondenza.

Ora, l'espressione (5.7.14) dell'elemento di linea non è scritta in forma covariante, perché corrisponde alla scelta che le curve nello spaziotempo siano parametrizzate dal tempo, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, come si fa nella meccanica elementare. Vogliamo invece dare ora una descrizione covariante, ovvero di tipo tensoriale, in cui il tempo non viene privilegiato, e dunque una curva nello spaziotempo viene rappresentata da una funzione

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \tag{5.7.15}$$

con un parametro λ arbitrario e $x^\mu \equiv \; (ct, \mathbf{x})$. Ricordiamo che le x^μ sono coordinate cartesiane ortogonali rispetto alla metrica, ovvero sono coordinate in cui la metrica ha forma diagonale, con coefficienti di modulo 1, precisamente

$$g_{\mu\nu} = \; \mathrm{diag}\; (1, -1, -1, -1) \; .$$

In altri termini, si ha

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \equiv \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x^\mu \; , \tag{5.7.16}$$

o anche

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \; \mathrm{d}\lambda^2 = \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu \; \mathrm{d}\lambda^2 \; , \tag{5.7.17}$$

o equivalentemente

$$\mathrm{d}s = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} \; \mathrm{d}\lambda \equiv \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} \; \mathrm{d}\lambda \; , \tag{5.7.18}$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo scritto

$$\dot{x}^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} .$$

Notazione tensoriale. Abbiamo qui cominciato a impiegare le notazioni consuete del calcolo tensoriale, che verranno discusse nel prossimo capitolo. Non sarebbero qui necessarie, ma può essere conveniente cominciare a familiarizzarsi con esse. Si tratta di quanto segue:

- 1) Le componenti dei vettori hanno indici in alto, ad esempio x^μ;
- 2) Le somme sugli indici ripetuti (uno in alto, uno in basso) sono sottintese (è la cosiddetta *convenzione di Einstein*). Ad esempio,

  $$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \equiv \sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu ;$$

- 3) Scriviamo

  $$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\ \nu} \equiv \mathrm{d}x_{\ \mu}$$

  (operazione di abbassamento di un indice), e quindi

  $$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \equiv \dot{x}_\mu\dot{x}^\mu .$$

Sappiamo inoltre che, tra tutti i parametri λ che parametrizzano le curve, è particolarmente comodo il "parametro naturale", cioè s stesso, che ha il significato (a meno di un fattore c) di "tempo proprio", sicché si avrà la parametrizzazione

$$x^\mu = x^\mu(s) . \tag{5.7.19}$$

La corrispondente velocità nello spaziotempo è la familiare quadrivelocità definita da

$$u^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} , \tag{5.7.20}$$

che sappiamo avere la proprietà di avere lunghezza unitaria:

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 , \qquad (u_\mu u^\mu = 1). \tag{5.7.21}$$

Infatti tale relazione evidentemente è equivalente a prendere la definizione (5.7.16) oppure (5.7.17) di $\mathrm{d}s^2$, e dividerla per $\mathrm{d}s^2$.

Analogamente abbiamo poi introdotto la quadriaccelerazione a^μ, definita da

$$a^\mu := \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} , \tag{5.7.22}$$

di cui si mostra subito che è ortogonale alla quadrivelocità, ovvero si ha

$$g_{\mu\nu}u^\mu a^\nu = 0 \qquad (u_\mu\, a^\mu = 0) . \tag{5.7.23}$$

Basta infatti derivare rispetto ad s la relazione (5.7.21) che esprime la normalizzazione della quadrivelocità, ed osservare che

$$g_{\mu\nu}a^\mu u^\nu + g_{\mu\nu}u^\mu a^\nu = 2g_{\mu\nu}a^\mu u^\nu \ ,$$

in virtù della simmetria del prodotto scalare, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

Abbiamo allora la

Proposizione. Per la particella libera, le geodetiche di tipo tempo sono caratterizzate dalla condizione

$$a^\mu = 0 \ .$$

Dimostrazione. Usando un generico parametro λ e ricordando la (5.7.18), il funzionale lunghezza ha la forma

$$s = \int \tilde{L} \mathrm{d}\,\lambda$$

con

$$\tilde{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\mu}$$

(si ricordi che il punto denota derivata rispetto a λ). Gli estremali (le geodetiche) sono allora le funzioni $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ che sono soluzioni delle corrispondenti equazioni di Eulero–Lagrange, ovvero

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} = 0 \ ,$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = 0 \ .$$

Si calcola subito

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\ \dot{x}^\nu}} \ ,$$

e si potrebbero quindi scrivere esplicitamente le equazioni delle geodetiche relative a una arbitraria parametrizzazione. Ma si capisce qui la grande convenienza di scegliere il parametro naturale (il tempo proprio s), perché la corrispondente quadrivelocità $u^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$ è di lunghezza unitaria, $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$, sicché il denominatore a destra dell'ultima formula diventa uguale a 1, e si resta con

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} = g_{\mu\nu}u^\nu \equiv u_\mu \ . \tag{5.7.24}$$

Pertanto le geodetiche sono caratterizzate dalla condizione $\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = 0$, ovvero $a_\mu = 0$, a sua volta equivalente ad $a^\mu = 0$. [84] **Q.E.D.**

Esercizio. Dimostrare che le medesime equazioni di moto $a^\mu = 0$ si ottengono prendendo la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}mg_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \ . \tag{5.7.25}$$

[84]NOTA PER GLI AUTORI: aggiungere il quadrimomento dedotto dalla lagrangiana. Citare il vincolo anolonomo sulle velocita' (con ipersuperficie nello spazio delle fasi). Citare lagrangiana degenere.

In altri termini, il moto della particella libera è anche estremale di un diverso funzionale S', dsfinito da

$$S' = \frac{1}{2} \int g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} \mathrm{d}\lambda \ .$$

Questo fatto è in analogia con il caso nonrelativistico, dove si considerano le due azioni $S = \int T \mathrm{d}t$, $A = \int \sqrt{T} \mathrm{d}t$, rispettivamente di Hamilton e di Maupertuis.

PARTE SECONDA: Particella in campo elettromagnetico, trattazione non covariante

5.8 Scopo di questa seconda parte

Nella prima parte di questo capitolo abbiamo discusso in maniera elementare (seguendo sostanzialmente la esposizione divulgativa di Einstein) la cinematica relativistica, mostrando in particolare come il principio di costanza della velocità della luce conduce a postulare che lo spaziotempo è munito di un opportuno prodotto scalare pseudoeuclideo. Abbiamo poi mostrato come questa geometrizzazione dello spaziotempo induca spontaneamente (attraverso il principio di Hamilton dell'azione stazionaria) a fornire una espressione per la lagrangiana della particella libera, la cui conseguenza più rilevante è che esiste per ogni particella una energia a riposo, data dalla celebre formula di Einstein $E = mc^2$. Questi argomenti corrispondono sostanzialmente a quelli discussi nell'articolo del 1905 di Einstein: la cinematica nella prima parte (paragrafi da 1 a 5), la dinamica nell'ultimo paragrafo, il decimo.[85])

Resta ora da occuparsi della seconda parte dell'articolo originario di Einstein (paragrafi dal 6 al 9), che è dedicata all'elettrodinamica. In queste note, la trattazione viene svolta a due livelli. In questa parte del presente capitolo la trattazione verrà svolta a livello "elementare", ovvero senza fare ricorso al calcolo tensoriale, come d'altra parte avviene nella trattazione originale di Einstein. Preliminarmente, verranno forniti dei richiami sulle equazioni di Maxwell in modo da costruire un ponte con la trattazione familiare allo studente dai corsi di Fisica Generale.

Invece, nel prossimo capitolo le equazioni di Maxwell e le equazioni di moto per una particella in campo elettromagnetico verranno discusse con i metodi del calcolo tensoriale (che Einstein utilizzò in una fase successiva, quando ne ebbe bisogno per formulare la relatività generale). È ovvio che questa seconda trattazione richiederebbe un lungo *excursus* di tipo geometrico sul calcolo tensoriale, che nel presente corso non abbiamo la possibilità di svolgere in maniera completa. Si deve dunque compiere un difficile compromesso. Siamo fiduciosi che la scelta qui compiuta possa risultare positiva.

[85]Si osservi però che la trattazione della dinamica da parte di Einstein è alquanto diversa da quella che è stata svolta qui, seguendo Planck e Levi–Civita. Si noti in particolare che la relazione $E = mc^2$ viene data da Einstein non nell'originario articolo del 1905, dal titolo *L'elettrodinamica dei corpi in movimento*, ma in una brevissima nota successiva, dal titolo *L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?*, in cui si fa un uso essenziale delle proprietà del campo elettromagnetico, anziché della pura dinamica di una particella.

I risultati nuovi che otterremo, rispetto alle trattazioni nonrelativistiche, sono i seguenti.

- Come si trasformano i campi e le densità di carica e di corrente quando si passa da un sistema inerziale a un altro

- Come si modifica l'equazione di moto per una particella in campo elettromagnetico. e in particolare come si scrive l'hamiltoniana di una particella in campo elettromagnetico (questo serve per il passaggio alla meccanica quantistica)

Comunque, tutte queste cose nuove appariranno in una forma molto semplificata ed elegante quando si posseggano i primi elementi del calcolo tensoriale, che verranno forniti nel prossimo capitolo. Se si vuole, quindi, si può scorrere rapidamente questa seconda parte del presente capitolo, sostanzialmente per familiarizzarsi con la notazione qui utilizzata per il campo elettromagnetico, e passare poi rapidamente al prossimo capitolo.

5.9 Le equazioni di Maxwell e i potenziali elettromagnetici

5.9.1 Le equazioni di Maxwell (con sorgenti assegnate)

Le equazioni di Maxwell (1873) costituiscono un miracolo della storia della fisica, sì da fare esclamare enfaticamente a Boltzmann, citando il Faust di Goethe: *"War es ein Gott welcher diese Zeichen schrieb ?"* (Fu un Dio che scrisse queste righe ?). Esse compendiano in linea di principio tutto l'elettromagnetismo. In particolare, il termine descrivente la *"corrente di spostamento"*, introdotto da Maxwell per puri motivi di consistenza interna della teoria, fa sì che le equazioni prevedano l'esistenza di onde elettromagnetiche nel vuoto, che si propagano esattamente con la velocità della luce c, sicché l'ottica stessa viene ridotta a fenomeno elettromagnetico. La propagazione di onde elettromagnetiche con frequenze di gran lunga inferiori a quelle ottiche venne successivamente osservata da Hertz (su suggerimento di Helmholtz), e questo fatto diede poi origine a tutte le applicazioni che ben conosciamo: la radio, la televisione...[86]

È noto che in elettromagnetismo si considerano quattro campi descritti dai vettori $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$, che però nel vuoto si riducono a due soli, perché si ha $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Noi ci limiteremo alle equazioni nel vuoto, e faremo riferimento ai campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ che chiameremo semplicemente *campo elettrico* e *campo magnetico*. Si ammette che *l'azione ponderomotrice* dei campi (cioè

[86] I lavori di Hertz sono riprodotti in un volume della Dover.

l'azione meccanica, la forza, esercitata sulla materia) sia data dalla *forza di Lorentz*

$$\mathbf{F}^{(em)} = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}) \tag{5.9.1}$$

su una particella di carica "e" e velocità $\mathbf{v}$; inversamente, la distinzione tra campo elettrico $\mathbf{E}$ e campo magnetico $\mathbf{H}$ è proprio la circostanza che il primo agisce anche su una particella ferma, mentre il secondo produce una forza proporzionale alla velocità della particella,[87] e dunque non agisce su una particella ferma. Proprio questa circostanza mostra che la distinzione tra campo elettrico e campo magnetico (ovvero il corrispondente spezzamento della forza di Lorentz) è relativa e non assoluta (cioè dipende dal sistema di riferimento). Su questo punto importante ritorneremo nel prossimo capitolo, mostrando che i campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ costituiscono una unità (*Tensore di Faraday*, di ordine 2 ed emisimmetrico) nello spaziotempo, nello stesso senso in cui costituisce una unità un vettore in $\mathbb{R}^n$, che è un oggetto assoluto, ovvero indipendente dalla base eventualmente scelta (mentre le componenti del vettore non sono assolute, ma dipendono dalla base). Ma per ora procediamo in maniera elementare.

Le equazioni di Maxwell nel vuoto hanno la forma (usiamo il sistema CGS elettromagnetico, forse poco familiare allo studente, ma la scelta delle unità è del tutto irrilevante)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \tag{5.9.2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{j}/c \quad , \end{aligned} \tag{5.9.3}$$

dove $\rho = \rho(t, \mathbf{x}), \mathbf{j} = \mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ sono la *densità di carica* e la *densità di corrente*, che si pensano assegnate funzioni di $(t, \mathbf{x})$ (*materia data o assegnata*, come si usa dire), mentre c è la velocità della luce nel vuoto.[88] Le prime due equazioni si dicono costituire la *coppia omogenea* (non hanno secondi membri), mentre le altre due costituiscono la *coppia non omogenea, o con sorgenti.* Come si vede, si tratta di equazioni *lineari* nei campi, sicché vale

[87] Almeno per particelle non dotate di momento magnetico intrinseco.

[88] Dal punto di vista mnemonico, è semplicissimo ricordare in quale modo c figuri nelle equazioni. Dove appare il tempo t, lì c'è sempre c, in maniera che appaia la formazione ct (sicché si potrebbe prendere come variabile in luogo del tempo la quantità $\tau = ct$). Per questo motivo avviene anche che la velocità $\mathbf{v}$ appare sempre nella forma $\mathbf{v}/c$ (si pensi $\mathbf{v}$ come la derivata della posizione di una particella rispetto al tempo), e lo stesso avviene per la corrente o la densità di corrente (perché la densità di corrente dovuta a una particella è proporzionale alla sua velocità).

il *principio di sovrapposizione* (che è un teorema): "i campi generati da $(\rho_1 + \rho_2, \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2)$ sono la somma dei campi creati da $(\rho_1, \mathbf{j}_1)$ e da $(\rho_2, \mathbf{j}_2)$".

Osservazione Come detto sopra, abbiamo qui usato il sistema CGS elettromagnetico, comune a tutti i grandi trattati di fisica teorica, come tipicamente il classico testo di Landau e Lifshitz. L'elemento più caratteristico è forse il fatto che tale sistema fa intervenire nelle equazioni di Maxwell la velocità della luce c, mentre nelle equazioni scritte nella forma probabilmente nota agli studenti[89] intervengono la costante dielettrica ϵ_0 e la permeabilità magnetica μ_0 del vuoto. Questa introduzione di c è resa possibile dal fatto che la quantità $1/(\mu_0\epsilon_0)$ ha le dimensioni di una velocità al quadrato, e il suo valore risulta essere proprio c^2, una circostanza questa che era nota prima di Maxwell, e che faceva già presagire che l'elettricità e il magnetismo potessere essere connessi anche con l'ottica. Ciò è proprio vero. Infatti, le equazioni di Maxwell costituiscono anzitutto una generalizzazione delle equazioni che riassumono l'elettrostatica e la magnetostatica al caso di campi dipendenti dal tempo, in modo da includere la legge di induzione di Faraday. Maxwell però aggiunge nella seconda equazione inomogenea un opportuno termine (la "corrente di spostamento" $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$), il quale ha la conseguenza che si hanno onde elettromagnetiche che, nel vuoto, si propagano proprio con velocità c, la stessa della luce, sicché anche l'ottica viene incorportata nell'elettromagnetismo. Questi fatti vengono richiamati qui sotto.

Cominciamo con l'osservare che l'elettrostatica e la magnetostatica si ottengono dalle equazioni di Maxwell come casi particolari statici (in cui cioè $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0$). Infatti in tal caso le equazioni (5.9.2) e (5.9.3), opportunamente redistribuite, si riducono alle due coppie (con ρ e $\mathbf{j}$ indipendenti dal tempo)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho \quad \text{elettrostatica} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j}/c \quad \text{magnetostatica.} \end{aligned}$$

Ricordiamo che in elettrostatica e in magnetostatica si introducono rispettivamente il **potenziale scalare** Φ ($\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \Rightarrow \exists \Phi : \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$) e il **potenziale vettore** $\mathbf{A}$ ($\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{A} : \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$), entrambi non definiti univocamente (si può scegliere $\mathbf{A}$ in modo che $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$; si veda più sotto), e dunque l'elettrostatica è compendiata nell'equazione[90]

$$-\Delta\Phi = \rho$$

[89]Ovvero, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \big(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\big)$, $B = \mu_0 H$, $D = \epsilon_0 E$. Si veda ad esempio R. Becker, *Electromagnetic fields and interactions*, Dover (New York, 1964), Sez. 53, pag. 257.

[90]Si introduce l'operatore "laplaciano" $\Delta := \operatorname{div}\operatorname{grad} = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ in coordinate cartesiane ortogonali. Qui si è usata la notazione $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial^2_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ e così via.

e la magnetostatica nell'equazione[91]

$$-\Delta \mathbf{A} = \mathbf{j}/c \ .$$

Nella sostanza, l'elettrostatica nel vuoto (e nello spazio infinito – altrimenti si hanno problemi di condizioni al contorno) si riduce alla legge di Coulomb, e la magnetostatica nel vuoto si riduce alla Legge di Biot e Savart, che può leggersi dall'equazione $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}/c$ mediante il teorema di Stokes.

Nel caso generale (non statico) si passa alle equazioni di Maxwell cambiando l'equazione $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$ nell'equazione $\mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$, che traduce in termini differenziali la legge di induzione di Faraday (una variazione di campo magnetico produce un certo ben definito campo elettrico). Si pensi all'analogia con $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}/c$. Qui si ha $\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$: quindi, se è assegnato $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, questo campo svolge un ruolo analogo a quello svolto da $\mathbf{j}$ nell'equazione di Biot e Savart, e quindi produce un certo campo elettrico $\mathbf{E}$ analogo al campo magnetico $\mathbf{H}$ di Biot e Savart creato da $\mathbf{j}$.

Infine, nel passaggio all'elettromagnetismo si cambia anche l'equazione $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}/c$ nell'equazione $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\big(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\big)$ che si legge nel modo seguente: una variazione di campo elettrico produce un campo magnetico esattamente (a parte un segno) come nella legge di Faraday una variazione di campo magnetico produce un campo elettrico. In altri termini, $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ agisce come una corrente elettrica e viene detto *corrente di spostamento*[92]. Proprio questo termine, introdotto da Maxwell per pure ragioni teoriche, fa sì che esistano le onde elettromagnetiche nel vuoto (l'analoga proprietà in presenza di materia verrà dimostrata più sotto facendo uso dei potenziali elettromagnetici). Si ha infatti la

Proposizione 2 *In assenza di materia ($\rho = 0, \mathbf{j} = 0$) i campi $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ soddisfano nel vuoto l'equazione di d'Alembert*[93]

$$\Box\, \mathbf{E} = 0\,, \quad \Box\, \mathbf{H} = 0 \quad \big(\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\big)\ .$$

Dimostrazione. Si prende il rotore della seconda equazione omogenea (5.9.2), ottenendo $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{H}$ (si scambiano $\frac{\partial}{\partial t}$ e rot per il teorema di Schwartz). Si sostituisce poi $\mathrm{rot}\mathbf{H}$ prendendolo dalla seconda equazione inomogenea (5.9.3) (ma con $\mathbf{j} = 0$); usando rot rot = grad div $-\ \Delta$ e anche $\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$, si ottiene $-\Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$. Analogamente si trova l'equazione per $\mathbf{H}$ prendendo il rotore della seconda equazione inomogenea (con $\mathbf{j} = 0$). **Q.E.D.**

[91] Si ricordi l'identità rot rot = grad div $-\ \Delta$, su cui diremo qualcosa più sotto.

[92] Perché in effetti si dovrebbe considerare $\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, e il vettore $\mathbf{D}$ veniva chiamato "*spostamento*" elettrico.

[93] L'operatore $\Box$ viene chiamato "*quadratello*" oppure "*dalembertiano*".

Resta ora da capire di dove venga la necessità di aggiungere il termine con la corrente di spostamento nella seconda equazione inomogenea. Ciò è dovuto al fatto che si richiede, come nella meccanica dei sistemi materiali, che la densità di carica ρ e la densità di corrente $\mathbf{j}$ soddisfino *l'equazione di continuità*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0 \ . \tag{5.9.4}$$

Ora, in magnetostatica, prendendo la divergenza nell'equazione $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}/c$, in virtù dell'identità div rot $= 0$ si trova $\mathrm{div}\mathbf{j} = 0$. Se invece, seguendo Maxwell, poniamo $\mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}/c$, abbiamo $\mathrm{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{E}$, e dall'equazione $\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho$ otteniamo l'equazione di continuità.

Dal punto di vista matematico, si avrebbe l'interessante problema di studiare il *problema di Cauchy* per i campi, e l'ancor più interessante problema di studiare vari *problemi al contorno*; ma di questi problemi qui non ci occupiamo.

Osservazione. Il principio di relatività e le equazioni di Maxwell: non assolutezza della distinzione tra campo elettrico e campo magnetico. Si consideri il seguente banale esempio: determiniamo il campo elettromagnetico "creato" da un particella ferma in un sistema inerziale K. Avremo in K il campo elettrico coulimbiano, e campo magnetico nulla. Ma rispetto ad un altro sistema inerziale K', in moto rispetto a K, la particella ha un moto rettilineo uniforme, e quindi K' "vede una corrente, sicché è chiaro che per K' sarà presente anche un campo magnetico, oltre a un certo ben definito campo elettrico. Duqnue è evidente che **la distinzione tra campo elettrico e campo magnetico non è assoluta, ma dipende dal particolare sistema di riferimento considerato**.

Ciò è in completa analogia con quanto avviene per le componenti di un vettore al variare del sistema di riferimento nello spazio euclideo tridimensionale: il vettore è una quantità assoluta, indipendente dal sistema di riferimento, mentre ne dipendono le componenti (la prima componente di un vettore può essere nulla in un sistema e non in un altro). Così anche vedremo che il campo elettromagnetico costituisce una unità (un tensore emisimmetrico del secondo ordine), e che il campo elettrico e il campo magnetico ne sono le componenti, alcune delle quali possono essere nulle in un sistema inerziale e non una altro. Allo stesso modo vedremo che densità di carica e densità di corrente costituiscono una unità (un quadrivettore) di cui la componente temporale (la carica) o quella spaziale (la corrente) possono essere nulle in un sistema di riferimento e non in un altro

Osservazione: Il problema della self force e l'equazione di Abraham–Lorentz–Dirac. Facciamo qui un ultimo commento, riguardante il *problema della autointerazione delle particelle cariche attraverso il campo elettromagnetico da esse prodotto.* Osserviamo anzitutto che, se si hanno delle particelle cariche, ad esse vengono associate certe densità di carica e di corrente, e dunque le particelle "creano", come sorgenti nelle equazioni di Maxwell inomogenee, certi campi elettromagnetici. Ma d'altra parte le particelle subiscono (attraverso la forza di Lorentz) anche delle forze dovute ai campi, e quindi in qualche modo anche una forza dovuta ai campi creati da esse stesse. È questo il cosiddetto **problema dell'autocampo**, o della **self force**. Si capisce così come nel discutere il moto di particelle in campi elettromagnetici si distingue allora tra una trattazione semplificata e una trattazione generale. Il problema semplificato consiste nello studiare il *moto di particelle con campi assegnati.* È questa l'approssimazione in cui si pensa che i campi assegnati siano talmente intensi da non essere sostanzialmente modificati dai campi creati dalle particelle stesse. Ed è questa proprio l'approssimazione (campi dati) in cui lavoreremo sotto.

Ma il problema più difficile è invece quello in cui si studia il moto delle particelle quando si tenga conto anche dei campi creati dalle particelle stesse (*problema della self force*). Questo problema fu affrontato attorno al 1903 da Abraham e Lorentz e poi in ambito relativistico, nel 1938, da Dirac.[94] Si giunge in tal modo alla cosiddetta *equazione di Abraham–Lorentz–Dirac*, di cui non abbiamo qui il tempo di occuparci. Facciamo solo osservare che a tale equazione sono associati problemi di principio a tutt'oggi non ancora completamente risolti, neanche nel corrispondente problema quantistico (si veda Feynman, Manuale di Fisica, vol II cap. 27). Si pensi che la lagrangiana e la hamiltoniana classiche per il sistema costituito dal campo elettromagnetico e da cariche puntiformi sono state scritte solo pochissimi anni fa.[95]

5.9.2 I potenziali elettromagnetici

Un obiettivo centrale che ci poniamo nella seconda parte di questo capitolo è quello di scrivere la lagrangiana, la hamiltoniana e l'azione hamiltoniana di una particella in un campo elettromagnetico assegnato (mentre nella prima parte avevamo studiato la particella libera). Per affrontare tale problema avremo però bisogno dei potenziali elettromagnetici, che ora ci apprestiamo ad introdurre.

Proposizione 3 *Si considerino le equazioni di Maxwell omogenee (5.9.2) ed inomogenee (5.9.3). Allora si ha:*

i) Le equazioni di Maxwell omogenee (5.9.2) si traducono nella seguente proprietà: esistono un potenziale scalare Φ *e un* potenziale vettore $\mathbf{A}$*, che forniscono i campi* $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ *mediante le relazioni*

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathrm{rot}\mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \ . \end{aligned} \tag{5.9.5}$$

ii) I potenziali $\Phi, \mathbf{A}$ *non sono univocamente determinati, e l'arbitrarietà è regolata nel modo seguente: dati dei potenziali buoni* $\Phi, \mathbf{A}$*, ogni altra coppia di potenziali buoni* $\Phi', \mathbf{A}'$*, si ottiene mediante le relazioni*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \mathrm{grad}\chi \\ \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned} \tag{5.9.6}$$

[94] P.A.M. Dirac, *Classical theory of radiating electrons*, Proc. Royal Soc. (London) A **167**, 148–168 (1938). Si noti che questo fondamentale lavoro di Dirac, concepito e sviluppato in ambito completamente classico, venne scritto circa 10 anni dopo la formulazione che egli aveva dato dell'elettrodinamica quantistica !

[95] Si veda M. Marino, *Classical electrodynamics of point charges*, Annals of Physics **301**, 85 (2002).

attraverso una funzione $\chi(t, \mathbf{x})$ arbitraria. Quando si compie uan scelta si usa dire che è stato scelto un "gauge"*. In particolare, i potenziali possono essere scelti in maniera di soddisfare la cosiddetta **"condizione di Lorentz" (gauge di Lorentz)***

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{5.9.7}$$

*oppure la condizione (**gauge di Coulomb**)*

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \; . \tag{5.9.8}$$

iii) In termini dei potenziali, le equazioni di Maxwell inomogenee (5.9.3) prendono, nel gauge di Lorentz, la forma delle equazioni delle onde con sorgenti, precisamente

$$\begin{aligned} \Box\,\Phi &= \rho \\ \Box\,\mathbf{A} &= \mathbf{j}/c \; . \end{aligned} \tag{5.9.9}$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede nel modo seguente.

i) Le formule che esprimono i campi attraverso i potenziali sono una immediata conseguenza delle equazioni di Maxwell omogenee (5.9.2), quando si ricordino le proprietà che un campo solenoidale (ovvero con divergenza nulla) può sempre esprimersi come il rotore di un opportuno campo vettoriale, e che un campo irrotazionale (ovvero con rotore nullo) può sempre esprimersi come il gradiente di un opportuno campo scalare[96]. Dunque dalla prima equazione $\mathrm{div}\mathbf{H} = 0$ segue che esiste un campo vettoriale $\mathbf{A}$ tale che $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, che è la prima delle (5.9.5). Si sostituisce allora nella seconda equazione omogenea, che diviene (scambiando rot con $\frac{\partial}{\partial t}$)

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 \, ,$$

e dunque esiste un campo scalare Φ tale che si ha $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\Phi$, ovvero la seconda delle (5.9.5).

ii,a) È ovvio che i potenziali non siano univocamente definiti, perché se $\mathbf{A}$ va bene, allora va bene anche $\mathbf{A}'$ dato da

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\,\chi$$

con un arbitraria χ (perché rot grad $\chi = 0$, sicché rot $\mathbf{A}' = \mathrm{rot}\mathbf{A}$). Ogni scelta della funzione χ si dice costituire la scelta di un "*gauge*". Tuttavia, si richiede

[96] Ammettiamo qui di essere in un dominio opportuno: va bene ad esempio il caso in cui il dominio è tutto $\mathbb{R}^3$. La dimostrazione di questi fatti è banalissima quando si usi la trasformata di Fourier. Questo verrà esposto in un'appendice attualmente non ancora scritta.

che, al variare della scelta di χ (al variare del gauge), non variino i campi,[97] e ciò già avviene per $\mathbf{H}$ perché $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{rot}\mathbf{A}'$. Ma nel passaggio da $\mathbf{A}$ ad $\mathbf{A}'$, nella formula data, ovvero la seconda delle (5.9.5), varierebbe $\mathbf{E}$, e quindi occorre controbilanciare la variazione di $\mathbf{A}$ con una opportuna variazione di Φ in modo da ottenere che $\mathbf{E}$ non cambi. È immediato constatare che l'appropriata scelta è $V' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$. Quindi l'arbitrarietà dei potenziali è regolata dalla relazione (5.9.6) con una funzione χ arbitraria.

ii,b) Mostriamo ora come mai è possibile soddisfare la condizione di Lorentz. Assegnati dei potenziali $\mathbf{A}, \Phi$, sia

$$f(t, \mathbf{x}) := \mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \neq 0$$

e ricerchiamo un'opportuna χ in modo che sia $\mathrm{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = 0$. Ma si ha, in virtù delle (5.9.6),

$$\mathrm{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = \mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \Delta\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = f(t, \mathbf{x}) - \Box\,\chi\,.$$

Dunque la condizione di Lorentz è soddisfatta se si sceglie χ in modo che sia

$$\Box\,\chi = f$$

con f assegnata, ed è ben noto che ciò è sempre possibile[98]. In modo analogo si dimostra che si può sodisfare la condizione di Coulomb.

iii) Veniamo infine alle equazioni delle onde per i potenziali, come immediata traduzione delle equazioni di Maxwell inomogenee nel gauge di Lorentz. Dalla prima equazione inomogenea $\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho$, introducendo $\mathbf{E}$ in termini di potenziale, si ha

$$\rho = \mathrm{div}\mathbf{E} = -\mathrm{div}\ (\mathrm{grad}\Phi + \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}) = -\Delta\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}\ ,$$

sicché, usando la condizione di Lorentz, si trova

$$\rho = -\Delta\Phi + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Box\,\Phi.$$

Analogamente, introducendo i potenziali nella seconda equazione inomogenea, si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}/c &= \mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} + \frac{1}{c}(\mathrm{grad}\ \dot{\Phi} + \frac{1}{c}\ddot{\mathbf{A}}) = \\
&= \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} + \frac{1}{c}\mathrm{grad}\ \dot{\Phi} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} = \\
&= \Box\,\mathbf{A} + \mathrm{grad}\ (\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\dot{\Phi}) = \Box\,\mathbf{A}
\end{aligned}$$

in virtù della condizione di Lorentz. **Q.E.D.**

[97] In altri termini, si ammette che i campi siano "oggetti fisici", vale a dire osservabili, e quindi ben definiti come funzioni di t ed $\mathbf{x}$. I potenziali invece, essendo non univocamente determinati, vengono considerati come strumenti "nonfisici", aventi una pura utilità matematica. In realtà, questo atteggiamento tradizionale verso i potenziali è parso scosso dopo la scoperta del cosiddetto "*effetto Aharonov–Bohm*", che a prima vista sembrerebbe comportare che si debba attribuire significato fisico ai potenziali. Ciò tuttavia non è vero. Rimandiamo la discussione ad una appendice (non ancora scritta).

[98] Anche questo fatto appare ovvio quando si usa la traformata di Fourier.

5.10 Trasformazioni dei campi: trattazione elementare

Abbiamo già osservato che la separazione di un campo elettromagnetico in un campo elettrico $\mathbf{E}$ e in un campo magnetico $\mathbf{H}$ è relativa, ovvero dipende dal sistema inerziale considerato. Ad esempio, se in un sistema K si ha il solo campo elettrico $\mathbf{E}$ creato da una particella ferma, tale particella appare mobile rispetto ad un altro sistema K' in moto rispetto a K; dunque K' vede una corrente (una carica in moto) e quindi oltre ad un campo elettrico vede anche un campo magnetico. Daremo qui sotto la legge con cui si trasformano i campi passando da un sistema inerziale ad un altro.

Tale legge di trasformazione si spiega analiticamente nel modo seguente. Nel passaggio da un sistema di riferimento a un altro, avviene che le equazioni di Maxwell cambierebbero di forma (in conseguenza del cambiamento di coordinate secondo la trasformazione di Lorentz) se non si imponesse che anche i campi cambiasssero in maniera adeguata, atta proprio a bilanciare il cambiamento di forma delle equazioni. Ma noi imponiamo che tale bilanciamento avvenga, proprio per soddisfare il principio si relatività. Infatti, il principio di costanza di velocità della luce, nella sua forma più pregnante, si esprime proprio come la condizione che le equazioni di Maxwell non cambino forma al cambiare del sistema di riferimento inerziale. In un certo senso si può dire che finora abbiamo usato tale principio solo in forma ridotta, cioè nel limite dell'ottica geometrica, in cui si pensa alla luce come costituita da raggi, e si impone che la loro velocità sia la stessa (ovvero c) in tutti i sistemi inerziali. Qui richiediamo in più che siano le equazioni di Maxwell stesse a non variare di forma, sicché nessun sistema inerziale risulti privilegiato.

Come esercizio preliminare cominciamo a verificare che invece l'equazione di d'Alembert *non* cambia forma sotto le trasformazioni di Lorentz. In effetti questa osservazione analitica era già stata compiuta da W. Voigt nel 1887.[99] Consideriamo l'equazione di d'Alembert per una quantità $u = u(t, \mathbf{x})$ scalare (ovvero, che non cambia al cambiare del sistema di riferimento) e poniamo per semplicità di notazione $c = 1$. Definiamo[100]

$$\Box\, u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv \Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big) u \ ;$$

l'operatore $\Box$ viene detto "dalembertiano" e mediante esso l'equazione di d'Alembert prende la forma

$$\Box\, u = 0 \ .$$

[99] W. Voigt, *Über das Doppler'sche Princip.* Göttingen Nachrichten, 10 marzo 1887, pag. 41. Si veda la formula (10) a pag. 45. Nelle nostre notazioni, tale formula si legge $x' = x - vt$, $y' = \gamma^{-1} y$, $z' = \gamma^{-1} z$, $t' = t - vx/c^2$. Quindi, per ottenere le trasformazioni di Lorentz occorre passare dalle variabili primate ad altre che si ottengono moltiplicando quelle primate per γ. Tuttavia, ai fini che si proponeva Voigt questo fatto è inessenziale.

[100] Consideriamo il caso di una sola dimensione spaziale

Nel capitolo sull'equazione di d'Alembert abbiamo già osservato che, quando si considera una equazione, in generale essa cambia di forma se si esegue un cambiamento di variabili: ad esempio passando dalle coordinate (t, x) alle coordinate $(\xi, \eta) = (t - x, t + x)$ l'equazione di d'Alembert assume la forma (denotiamo $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial^2_{xx} \equiv \partial_x \partial_x$ etc)

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0 \ ,$$

e anzi proprio di questo artificio ci siamo serviti per integrare l'equazione. Si ha invece la

Proposizione 4 *Sotto trasformazioni di Lorentz il dalembertiano non cambia forma, ovvero si ha*

$$\Box\,' = \Box$$

dove $\Box\,' = \partial^2_{t't'} - \partial^2_{x'x'}$, $\Box = \partial^2_{tt} - \partial^2_{xx}$.

Dimostrazione. (**metodo forza bruta**). Dalla trasformazione di Lorentz $t' = \gamma(t - vx), x' = \gamma(x - vt)$, in virtù della formula fondamentale per la derivata di una funzione composta si ha

$$\partial_t = \frac{\partial t'}{\partial t}\partial_{t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\partial_{x'} \ , \quad \partial_x = \frac{\partial t'}{\partial x}\partial_{t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\partial_{x'}$$

ovvero, nel caso delle trasformazioni di Lorentz,

$$\begin{aligned} \partial_t =& \gamma(\partial_{t'} - v\partial_{x'}) \\ \partial_x =& \gamma(\partial_{x'} - v\partial_{t'}) \ . \end{aligned} \tag{5.10.1}$$

Si trova dunque

$$\begin{aligned} \partial_t - \partial_x &= \gamma(1 + v)(\partial_{t'} - \partial_{x'}) \\ \partial_t + \partial_x &= \gamma(1 - v)(\partial_{t'} + \partial_{x'}) \ . \end{aligned}$$

Pertanto, osservando che si ha $\Box = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)$,[101] otteniamo

$$\Box = \gamma^2(1 - v^2)\Box\,' = \Box\,' \ .$$

Q.E.D.

Osservazione. Questa proprietà di invarianza in forma del dalembertiano sotto trasformazioni di Lorentz costituisce di fatto la controparte (in termini di operatori differenziali) della invarianza in forma della metrica relativistica sotto trasformazioni di Lorentz:

$$c^2 t'^2 - l'^2 = c^2 t^2 - l^2 \ .$$

[101] Questa identità operatoriale è analoga alla familiare identità algebrica $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$.

Allo stesso modo si mostra immediatamente che sotto rotazioni nel piano si ha l'invarianza in forma dell'operatore laplaciano:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}$$

come traduzione in termini di operatori differenziali dell'invarianza in forma della metrica sotto rotazioni:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

(qui ci riferiamo evidentemente a sistemi di riferimento cartesiani ortogonali, ovvero a sistemi di vettori base ortonormali rispetto all'assegnato prodotto scalare).

In effetti, come vedremo nel prossimo capitolo, le trasformazioni (5.10.1) sulle derivate parziali $(\partial_t, \partial_x) \to (\partial_{t'}, \partial_{x'})$ sono nient'altro che le trasformazioni delle componenti dei covettori indotte dalle trasformazioni delle componenti dei vettori. Troveremo che le derivate parziali si trasformano con l'inversa della trasposta della matrice che fornisce la trasformazione delle componenti dei vettori. Nel nostro caso, il tutto ammonta a cambiare v in $-v$.

Veniamo dunque alla legge di trasformazione dei campi. Il sistema K' si muove con velocità $\mathbf{v}$ lungo l'asse x del sistema K; è conveniente allora decomporre i vettori $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ nella forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\|} + \mathbf{E}_{\perp}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{\|} + \mathbf{H}_{\perp}$$

dove $E_{\|}$ denota la componente di $\mathbf{E}$ parallela a $\mathbf{v}$, cioè all'asse x, e $E_{\perp}$ la corrispondente componente ortogonale, cioè nel piano y, z. Analogamente sia

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\|} + \mathbf{E}'_{\perp}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}'_{\|} + \mathbf{H}'_{\perp}.$$

Così anche, denotando con ρ, ρ' e $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}'$ le densità di carica e di corrente rispetto ai due sistemi di riferimento, poniamo

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\|} + \mathbf{j}_{\perp}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j}'_{\|} + \mathbf{j}'_{\perp}\ .$$

Si ha allora la

Proposizione 5 *Le equazioni di Maxwell non cambiano forma sotto trasformazioni di Lorentz se si ammette che i campi e la densità di carica e di corrente si trasformino nel modo seguente (con $c = 1$):*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\|} &= \mathbf{E}_{\|} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} - \mathbf{H} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_{\|} &= \mathbf{H}_{\|} \\ \mathbf{H}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{H}_{\perp} + \mathbf{E} \times \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho' &= \gamma(\rho - v j_x) \\ j'_x &= \gamma(j_x - v\rho) \\ \mathbf{j}'_{\perp} &= \mathbf{j}_{\perp} \quad (\text{ovvero} \quad j'_y = j_y\,, j'_z = j_z)\ . \end{aligned}$$

Nota. La legge di trasformazione di densità di carica e densità di corrente può anche essere stabilita a priori, utilizzando l'ipotesi che la quantità di carica sia un invariante, indipendente dal sistema di riferimento.[102]

Dimostrazione. [103] Consideriamo la trasformazione di Lorentz inversa $t = \gamma(t' + vx')$, $x = \gamma(x' + vt')$, $y = y'$, $z = z'$. Con calcoli analoghi a quelli usati per dimostrare l'invarianza del dalembertiano si ha

$$\partial_{t'} = \gamma(\partial_t + v\partial_x)\,, \quad \partial_{x'} = \gamma(\partial_x + v\partial_t)\ , \quad \partial_y = \partial_{y'}\ , \partial_z = \partial_{z'}\ . \tag{5.10.2}$$

i) Cominciamo a considerare le equazioni omogenee

$$\partial_t \mathbf{H} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0\ ,\ \mathrm{div}\mathbf{H} = 0\ ;$$

in particolare, la prima componente della prima equazione, e la seconda equazione, forniscono

$$\partial_t H_x = \partial_z E_y - \partial_y E_z\ , \quad \partial_x H_x = -(\partial_y H_y + \partial_z H_z)\ . \tag{5.10.3}$$

Vediamo ora cosa sappiamo su $\partial_{t'} H_x$. Dalla trasformazione di Lorentz $\partial_{t'} = \gamma(\partial_t + \partial_x)$ otteniamo

$$\partial_{t'} H_x = \gamma[\partial_t H_x + v\partial_x H_x]\ ,$$

e quindi, per le (5.10.3),

$$\begin{aligned}\partial_{t'} H_x &= \gamma(\partial_z E_y - \partial_y E_z) - \gamma v(\partial_y H_y + \partial_z H_z)\\ &= \partial_z \gamma(E_y - vH_z) - \partial_y \gamma(E_z + vH_y)\ .\end{aligned} \tag{5.10.4}$$

Per confronto con l'originaria equazione

$$\partial_t H_x = \partial_z E_y - \partial_y E_z$$

si vede allora che le due equazioni sono della stessa forma se si pone[104]

$$H'_x = H_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - vH_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + vH_y)$$

ovvero

$$\mathbf{H}'_{\|} = H_{\|}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} - \mathbf{H} \times \mathbf{v})\ .$$

ii) Si procede poi analogamente usando le equazioni inomogenee $\mathrm{rot}\mathbf{H} - \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{j}$, $\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho$. Si ha

$$\partial_t E_x = \partial_y H_z - \partial_z H_y - j_x, \quad \partial_x E_x = -(\partial_y E_y + \partial_z E_z) + \rho\ ,$$

[102] Si ua il fatto che, a causa della contrazione delle lunghezze lungo la direzione di traslazione di K' rispetto a K (mentre restano inalterate le lunghezze trasversali), passando da K a K' i volumi si contraggono del fattore γ^{-1}. Dunque, dovendo restare inalterata la carica contenuta in un volume, deve cossispondentente variare la desità di carica.

[103] A parte la notazione, seguiamo qui quasi alla lettera il paragrafo 6 del lavoro di Einstein del 1905.

[104] In effetti, basterebbe porre $H'_x = \alpha H_x, E'_y = \alpha\gamma(E_y - vH_z), E'_z = \alpha\gamma(E_z + vH_y)$ con una costante α (dipendente parametricamente da v). Ma, come nella deduzione dell'invarianza della metrica, si assume $\alpha = \alpha(v^2)$ e si mostra $\alpha^2 = 1$, da cui $\alpha = 1$ per continuità in $v = 0$.

e si ottiene

$$\partial_{t'} E_x = \partial_{y'} \gamma(H_z - vE_y) - \partial_{z'} \gamma(H_y + vE_z) - \gamma(j_x - v\rho)$$

che, per confronto con l'equazione originale, fornisce

$$\mathbf{E}'_\parallel = E_\parallel \quad H_\perp{}'_\parallel = \gamma(H_\perp + \mathbf{E} \times \mathbf{v}) \ , \qquad \mathbf{j}'_\parallel = \gamma(\mathbf{j}_\parallel - v\rho) \ .$$

Resta da determinare la legge per ρ. A tal fine si usa la condizione che valga

$$\mathrm{div}' \, \mathbf{E}' \equiv \partial_{x'} E'_x + \partial_{y'} E'_y + \partial_{z'} E'_z = \rho' \ .$$

Ma allora il primo membro può essere calcolato e si trova[105]

$$\mathrm{div}' \, \mathbf{E}' = \gamma \, \mathrm{div}\mathbf{E} - \gamma \, v(\partial_t E_x - \partial_y H_z + \partial_z H_y) \ .$$

D'altra parte, usando le equazioni di Maxwell $\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho$ e la prima componente di $-\partial_t \mathbf{E} + \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}$, questa equazione diviene

$$\mathrm{div}' \, \mathbf{E}' = \gamma \, (\rho - v j_x) \ ,$$

sicché la condizione $\mathrm{div}' \, \mathbf{E}' = \rho'$ fornisce

$$\rho' = \gamma(\rho - v j_x) \ .$$

Q.E.D.

Osservazione . Le leggi di trasformazione della densità di carica e corrente mostrano che $\rho, \mathbf{j}$ si trasformano esattamente come $t, \mathbf{x}$; in altri termini $\rho, \mathbf{j}$ costituiscono un quadrivettore. Più precisamente, ripristinando $c \neq 1$, si ottiene che

$$\{j^\mu\}_{\mu=0}^3 = (c\rho, \mathbf{j})$$

costituisce un quadrivettore.

Si ha dunque il

Corollario 1 *I potenziali scalare e vettore Φ, $\mathbf{A}$ costituiscono un quadrivettore, diciamo di componenti $\{A^\mu\}_{\mu=0}^3$, ovvero si ha che le quantità*

$$\{A^\mu\} \equiv (\Phi, \mathbf{A})$$

si trasformano come le componenti di un quadrivettore (cioè come le componenti di $\{x^\mu\} \equiv (ct, \mathbf{x})$.

Dimostrazione. Sappiamo che i potenziali soddisfano, nel gauge di Lorentz, le equazioni $\Box \, \Phi = \rho$, $\Box \, \mathbf{A} = \mathbf{j}/c$, e che l'operatore dalembertiano non cambia forma

[105] Basta usare le relazioni già trovate $E'_x = E_x$, $E'_y = \gamma(E_y - vH_z)$, $E'_z = \gamma(E_z + vH_y)$, $\partial_{x'} = \gamma(\partial_x + v\partial_t)$, $\partial_{y'} = \partial_y, \partial_{z'} = \partial_z$.

sotto trasformazioni di Lorentz. Dunque Φ ed $\mathbf{A}$ devono trasformarsi come ρ e $\mathbf{j}/c$ ovvero come $c\rho$ e $\mathbf{j}$, cioè come ct ed $\mathbf{x}$. **Q.E.D.**

Da ciò segue in particolare, come già osservato, che l'azione S relativa alla particella in campo elettromagnetico ha carattere geometrico nello spaziotempo.

5.11 Equazioni di moto di una particella in campo elettromagnetico; lagrangiana, hamiltoniana ed azione. Trattazione elementare in forma tridimensionale

Abbiamo già detto che in ambito non relativistico si ammette che la forza agente su una particella carica (di carica e) sia la forza elettromagnetica di Lorentz $\mathbf{F}^{(em)}$ definita dalla (5.9.1), ovvero

$$\mathbf{F}^{(em)} = e\Big(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}\Big).$$

Si deve a K. Schwarzschild[106] la seguente osservazione:

Proposizione 6 *La forza di Lorentz ammette un potenziale generalizzato (o potenziale elettromagnetico o potenziale elettrocinetico) $V^{(\mathrm{em})}$ definito in termini dei potenziali Φ ed $\mathbf{A}$ da*

$$V^{(\mathrm{em})} = e\Big(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A}\Big)\ ,$$

nel senso che si ha

$$\frac{1}{e}\mathbf{F}^{(em)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V^{(\mathrm{em})}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial V^{(\mathrm{em})}}{\partial \mathbf{x}}\ .$$

Dimostrazione. La dimostrazione che ora riportiamo, del tutto tradizionale, è un po' macchinosa; essa diventerà invece banalissima quando disporremo del formalismo tensoriale nello spaziotempo (si veda il capitolo successivo). Restando per ora nel formalismo tridimensionale, osserviamo che si ha $\frac{\partial V^{(\mathrm{em})}}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{A}/c$, e

[106] Lo stesso cui si deve la scoperta del campo gravitazionale "creato" da una particella puntiforme nell'ambito della relatività generale. Questo risultato venne illustrato in due famosi lavori scritti nel 1916 nell'ospedale di guerra di Brno, dove Schwarzschild morì poco dopo.

dunque[107]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V^{(\mathrm{em})}}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot \mathrm{grad})\mathbf{A}\right].$$

D'altra parte si ha

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V^{(\mathrm{em})} \equiv \mathrm{grad} V^{(\mathrm{em})} = \mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\mathrm{grad}(\mathbf{v}\cdot \mathbf{A}) \ .$$

Usando l'identità[108]

$$\mathrm{grad}(\mathbf{v}\cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{v}\cdot \mathrm{grad})\,\mathbf{A} - \mathbf{v}\times \mathrm{rot} A \ ,$$

si ha allora

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V^{(\mathrm{em})}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial V^{(\mathrm{em})}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathrm{grad}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times \mathbf{H}\,.$$

Q.E.D.

Ora, già in ambito non relativistico era ben noto che è possibile scrivere le equazioni di moto di una particella in forma lagrangiana anche se si è in presenza di forze $\mathbf{Q}$ dipendenti dalla velocità, purché tali forze $\mathbf{Q}$ ammettano un potenziale generalizzato V, nel senso che si abbia

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \ .$$

Infatti, dalla formula del binomio lagrangiano già sappiamo che l'equazione $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ con $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V_0$ può scriversi nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

con

$$L_0 = T - V_0$$

($T = \frac{1}{2}mv^2$). Dunque, se si considera l'equazione

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{Q}$$

con

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V_0, \quad \mathbf{Q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}},$$

[107] Si usa, come al solito $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathrm{grad}f)\cdot\dot{\mathbf{x}}$ se $f = f(t,\mathbf{x})$ e si considera un movimento $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ sicché si introduce la funzione $\tilde{f}(t) := f(t,\mathbf{x}(t))$. Per un abuso di linguaggio si denota poi $\tilde{f} \equiv f$. Nel nostro caso, invece di f si ha il vettore $\mathbf{A}$ e si considera separatamente ogni componente A_i di $\mathbf{A}$. Per semplicità di notazione scriviamo $(\mathrm{grad}A_i)\cdot \mathbf{v} \equiv (\mathbf{v}\cdot\mathrm{grad})A_i$, esattamente come si fa per le equazioni di Eiulero dei fluidi perfetti.

[108] Si tratta in sostanza della nota identità del doppio prodotto vettore, adattata all'operatore differenziale $\mathrm{rot}A = \mathrm{grad}\times\mathbf{A}$.

tale equazione può scriversi nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0\,, \qquad L = L_0 - V\,.$$

In questo senso, dunque, le equazioni di moto per le particelle soggette a forze dipendenti dalla velocità ma ammettenti un potenziale generalizzato possono essere scritte in forma lagrangiana.

Nel nostro caso, abbiamo una particella carica soggetta a forza di Lorentz, che ammette il potenziale generalizzato $V^{(\mathrm{em})}$. Si ha dunque la

Proposizione 7 *L'equazione di Newton (nonrelativistica)*

$$m\mathbf{a} = e\,(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H})$$

è equivalente all'equazione di Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

dove la lagrangiana L è definita da

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - eV^{(\mathrm{em})}\ . \tag{5.11.1}$$

Abbiamo ora il problema di postulare una forma per l'equazione di moto di una particella relativistica in presenza di campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ assegnati, o equivalentemente in presenza dei corrispondenti potenziali Φ ed $\mathbf{A}$. La più semplice scelta possibile che si riduca all'equazione non relativistica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{(em)}$ per piccole velocità si ottiene procedendo in modo analogo a quello del caso nonrelativistico, usando ora ovviamente la corretta "lagrangiana meccanica"

$$L^{(\mathrm{mecc})} = -mc^2\,\sqrt{1 - v^2/c^2}\ . \tag{5.11.2}$$

Si giunge in tal modo a formulare il seguente

Assioma. La lagrangiana relativistica di una particella in campo elettromagnetico è data da $L = L^{(\mathrm{mecc})} - eV^{(\mathrm{em})}$, ovvero

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\big(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{A}\big)\ . \tag{5.11.3}$$

Naturalmente, per coerenza si deve anche controllare che la corrispondente azione hamiltoniana abbia, come per la particella libera, carattere geometrico. Su questo punto ritorneremo alla fine del presente paragrafo.

Ricordando che $\frac{\partial L^{(\mathrm{mecc})}}{\partial \mathbf{v}} = m\gamma\mathbf{v}$, si ha subito allora la

Proposizione 8 *L'equazione di moto per una particella relativistica in un campo elettromagnetico è data da*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma\mathbf{v}) = e(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}) \tag{5.11.4}$$

Veniamo ora al teorema dell'energia. In meccanica nonrelativistica questo si ottiene mpltiplicando scalarmente per la velocità $\mathbf{v}$ l'equazione $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, e si ha in tal modo $\dot{T} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ dove $T = (1/2)mv^2$ è l'energia cinetica. In ambito relativistico il teorema dell'energia si ottiene analogamente moltiplicando scalarmente per $\mathbf{v}$ la (5.11.4). Si ha allora la[109][110]

Proposizione 9 (Teorema dell'energia). *Si ha*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\gamma c^2 = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\ . \tag{5.11.5}$$

Dimostrazione. *Basta verificare l'identità*

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\gamma\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m\gamma c^2\ ,$$

e questo è un utile esercizio.[111] ***Q.E.D.***

Abbiamo infine il problema di scrivere l'hamiltoniana di una particella in campo elettromagnetico; ciò è necessario ad esempio per scrivere l'equazione di Schrödinger (in meccanica quantistica) per una particella in campo elettromagnetico. Come sappiamo dal formalismo hamiltoniano, a tal fine è sufficiente considerare l'energia generalizzata

$$E = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - L\,, \tag{5.11.6}$$

ed esprimerla in termini del momento

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \tag{5.11.7}$$

anziché della velocità $\mathbf{v}$.

Il procedimento che si segue ripercorre passo passo quello che si era seguito per la particella libera. In presenza di campo elettromagnetico, analogamente con immediati calcoli si trova il

[109] Landau chiama energia cinetica la quantità $E = m\gamma c^2$, anche se essa contiene l'energia a riposo mc^2.

[110] Si noti che alla variazioe di energia non contri buisce il campo magnetico, perché esso esercita una forza ortogonale alla velocità.

[111] Poniamo $c = 1$. Si ha

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma\mathbf{v} = \dot\gamma\ v^2 + \gamma\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\ .$$

Ma dalla definizione di γ si trova $\dot\gamma = \gamma^3\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}$ da cui segue $\gamma\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = \dot\gamma/\gamma^2$ ovvero, ricordando $\gamma^2 = 1/(1-v^2)$,

$$\gamma\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = \dot\gamma(1-v^2)\ ,$$

e dunque

$$\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma\ \mathbf{v} = \dot\gamma\ (v^2 + 1 - v^2) = \dot\gamma\ .$$

Lemma 4 *Per la particella relativistica in campo elettromagnetico si ha*

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \qquad (5.11.8)$$

$$E = m\gamma c^2 + e\Phi\,. \qquad (5.11.9)$$

Da queste relazioni si ottiene poi la

Proposizione 10 *L'hamiltoniana di una particella in campo elettromagnetico, con lagrangiana (5.11.3) ovvero*

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\big(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{A}\big)\ ,$$

è data da

$$H = e\Phi + c\sqrt{m^2c^2 + (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2} \qquad (5.11.10)$$

In particolare, nel limite nonrelativistico $(v/c)^2 \ll 1$*, per l'hamiltoniana* H *e per l'energia* E *si ha*

$$H = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + e\Phi + mc^2\,. \qquad (5.11.11)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + e\Phi + mc^2\ . \qquad (5.11.12)$$

Dimostrazione. Basta esprimere l'energia E in termini del momento $\mathbf{p}$. Dal lemma 4 si osserva $(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}) = m\gamma\mathbf{v}$, $E - e\Phi = m\gamma c^2$, e dunque si ha

$$\left(\frac{E-e\Phi}{c}\right)^2 - (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 = m^2\gamma^2(c^2 - v^2) = m^2c^2\ ,$$

ovvero

$$(E - e\Phi)^2 = c^2\left[m^2c^2 + (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2\right]\ .$$

Q.E.D.

Osservazione. Da un punto di vista mnemonico, è utile osservare che l'hamiltoniana di una particella in campo elettromagnetico si ottiene da quella in assenza di campo ($H = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$, oppure nel limite nonrelativistico $H = p^2/(2m) + mc^2$) con la semplice sostituzione

$$\mathbf{p} \quad \to \quad \mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\,,$$

oltre all'aggiunta del termine $e\Phi$.

Terminiamo questo paragrafo con un commento sul carattere geometrico dell'azione hamiltoniana di una particella in campo elettromagnetico. A tal fine facciamo uso di una proprietà che dimostreremo più avanti, ovvero che, nello stesso senso in cui $\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{x})$ è un quadrivettore, così è un quadrivettore anche $\{A^\mu\} = (\Phi, \mathbf{A})$. Ricordando poi che $\{u^\mu\} \equiv \{\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\} = (\gamma, \gamma\frac{\mathbf{v}}{c})$ è un quadrivettore e che il prodotto scalare tra due quadrivettori ha la struttura pseudo–euclidea ben nota, si trova che il prodotto scalare $g(u, A)$ tra i quadrivettori $u \equiv \{u^\mu\} = (\gamma, \gamma\frac{\mathbf{v}}{c})$ ed $A \equiv \{A^\mu\} = (\Phi, \mathbf{A})$ è dato da

$$g(u, A) = \gamma\Phi - \gamma\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A} = \gamma\,(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A})$$

e dunque, ricordando $\mathrm{d}s = \frac{c}{\gamma}\mathrm{d}t$ (ovvero $\mathrm{d}t = \frac{\gamma}{c}\mathrm{d}s$) otteniamo

$$\int_{t_0}^{t_1} V^{(\mathrm{em})}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t_1} \gamma(\Phi - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A})\,\mathrm{d}s = \frac{1}{c}\int g(u, A)\,\mathrm{d}s\,.$$

Pertanto, ricordando che $\int L^{(\mathrm{mecc})}\mathrm{d}t = -mc\int \mathrm{d}s$, otteniamo che l'azione S relativa alla lagrangiana $L = L^{(\mathrm{mecc})} - eV^{(em)}$ si scrive nella forma

$$S = -\int \Big[mc + \frac{e}{c}\,g(u, A)\Big]\ \mathrm{d}s\ .$$

Questa ha carattere geometrico nello spaziotempo, perché hanno carattere geometrico sia ds (elemento di linea, lunghezza di un tratto di curva) sia il prodotto scalare $g(u, A)$.

In conclusione, l'assioma per il moto di una particella in un campo elettromagnetico in ambito relativistico, che sopra è stato formulato con la scelta della lagrangiana (5.11.3), può equivalentemente essere formulato in termini di azione hamiltoniana nel modo seguente:

Assioma. L'azione hamiltoniana relativistica di una particella in campo elettromagnetico è data, per ogni curva Γ di tipo tempo nello spaziotempo, da

$$S(\Gamma) = -\int_\Gamma \Big[mc + \frac{e}{c}\,g(u, A)\Big]\ \mathrm{d}s\,. \tag{5.11.13}$$

È molto istruttivo a questo punto confrontare il metodo qui seguito per giustificare questo assioma, con il metodo seguito da Landau e Lifshitz (*Teoria dei campi*). Noi abbiamo scelto un procedimento di tipo induttivo, che può forse avere qualche utilità dal punto di vista pedagogico. Non vi è dubbio tuttavia che il procedimento diretto e compatto di Landau e Lifshitz è estremamente più comodo e significativo, almeno quando si sia in grado di apprezzarlo pienamente.

Sulle dimensioni delle quantità di interesse. Le componenti del vettore $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$ sono lunghezze (L). Così anche s è una lunghezza; dunque $mc\,\mathrm{d}s$ è un'azione (energia per tempo). La quadrivelocità, per come è stata da noi definita, è adimensionale (abbiamo preso la derivata rispetto ad s anziché rispetto a t).

Per quanto riguarda la carica elettrica ed i potenziali elettromagnetici, dall'equazione $\Box\,\Phi = \rho$, dove ρ è una densità di carica (carica per unità di volume), si ottiene che Φ (e ogni componente di A^μ) ha le dimensioni *carica*/L. A sua volta, per la carica, basta ricordare che e^2/r è un'energia e che anche $e\Phi$ (e più in generale eA^μ) è un'energia. Dunque, infine, $(e/c)g(u,A)\mathrm{d}s$ è una azione.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Einstein, *L'elettrodinamica dei corpi in movimento (1905)*, in A. Einstein, *Opere scelte*, Bollati Boringhieri (Torino, 1988), pag. 148.

2. A. Einstein, *Relatività: esposizione divulgativa* (1917,1950), in A. Einstein, *Opere scelte*, pag. 389.[112].

3. H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'electron*, Comptes Rendus (1905), Rendiconti del circolo matematico di Palermo (1906), ristampati in H. Poincaré, *La nouvelle mécanique*, J. Gabay (Parigi, 1989) e (solo il secondo articolo) in H. Poincaré, *Scritti di fisica–matematica*, UTET (Torino).

4. H. Poincaré *La science et l'hypothèse*, Flammarion (Parigi, 1968).

5. H. Weyl, *Space, time, matter*, Dover (New York, 1952)

6. W. Pauli, *Teoria della relatività*, Boringhieri (Torino, 1958))

7. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *The classical theory of fields*, Pergamon Press (Oxford, 1962).

8. W. Kopczynski, A. Trautman, *Spacetime and gravitation*, J. Wiley and Sons (Chichester, 1992).

9. B. Dubrovin, S. Novikov, A. Fomenko, *Geometria contemporanea: metodi ed applicazioni* Vol. I, Editori Riuniti (Roma, 1987). Questo volume costituisce una ottima introduzione generale alla geometria, con notevole attenzione alla fisica e lo consigliamo vivamente.

9\. M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall (Englewood Cliffs, 1991), trad. ital. Bollati Boringhieri (Torino, 1997). Sezioni 7.2 e 7.3

10\. B. O'Neill, *Semi–riemannian geometry, with applications to relativity*, Academic Press (New York, 1983); si veda particolarmente la parte finale del capitolo 2 (per le forme bilineari simmetriche) e il capitolo 6 (per la relatività).

[112]Si veda anche la edizione Borighieri del 1961, in cui sono tradotte altre celebri opere, tra le quali in particolare B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria), Dissertazione (1854).

Indice