

## Capitolo 7

# Esempi classici di Sistemi Integrabili

VERSIONE PRELIMINARE

### 7.1 Il problema di Keplero

Uno degli eventi più importanti per la fisica, e per la scienza in generale, fu sicuramente la soluzione, ottenuta da Newton, del cosiddetto problema di Keplero, ovvero la determinazione del moto di un punto materiale soggetto ad una forza centrale la cui intensità varia con l'inverso del quadrato della distanza dal centro attrattore<sup>1</sup>. Ad una tale schematizzazione si può ricondurre il moto di un pianeta attorno al Sole (quando si trascurino le influenze degli altri pianeti), ed anche il moto di due corpi elettricamente carichi (quando si trascurino l'irraggiamento e l'effetto della velocità finita di propagazione delle forze elettriche). Questo secondo ambito è di fondamentale importanza per la fisica atomica, perché permise di interpretare gli esperimenti di Rutherford del 1911 sulla diffusione delle particelle alfa da parte di una sottile lamina d'oro, come processi dovuti alla presenza di un nucleo carico essen-

---

<sup>1</sup>È questo in effetti il cosiddetto *problema diretto*: determinare il moto dato il campo di forze. Si ha anche il *problema inverso*: determinare il campo di forze quando siano dati i movimenti. Anche questo problema fu risolto da Newton, che fu capace di risalire alla forza gravitazionale partendo dalle leggi fenomenologiche di Keplero. Si tratta di un punto assai rilevante, perché naturalmente le forze che si esercitano tra i corpi celesti non vengono misurate direttamente. Si noti anche come l'ipotesi della forza gravitazionale, indotta dalle leggi di Keplero riguardanti i moti ellittici, conduca poi, mediante la soluzione del problema diretto, anche ai moti iperbolici (oltre a quelli parabolici), che non erano stati osservati. Si ha dunque, proprio in questa svolta cruciale della storia della fisica, un esempio in cui le osservazioni portano ad indurre una legge matematica che permette di prevedere una nuova fenomenologia.

zionalmente puntiforme posto al centro dell'atomo.<sup>2</sup> In effetti, in entrambi i casi (Kepleriano e Coulombiano) si avrebbe a che fare con un *problemi a due corpi*. Come mostrato nel Capitolo 1, questo problema si riduce a un problema ad un corpo per il moto relativo, pur di prendere come massa  $m$  il valore della massa ridotta del sistema (definita da  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ).<sup>3</sup>

Incominceremo con il discutere le soluzioni limitate (dette *stati legati*) del problema di Keplero, cioè le soluzioni che descrivono i moti dei pianeti. In seguito, nella seconda parte, daremo una descrizione del processo di diffusione (*stati d'urto*) con il calcolo della cosiddetta *sezione d'urto differenziale*.

Dal punto di vista matematico, si tratta di trovare le soluzioni della seguente equazione differenziale

$$m\ddot{\mathbf{q}} = K \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3}, \quad (7.1.1)$$

dove  $\mathbf{q}$  è il vettore posizione del punto considerato rispetto al centro di attrazione,  $m$  la massa del punto, mentre la costante  $K$  dipende dal problema considerato: nel caso gravitazionale  $K = -GmM_S$ , dove  $G$  è la costante di gravitazione universale ed  $M_S$  la massa del Sole, mentre nel caso Coulombiano (cioè nel caso di corpi carichi elettricamente)  $K$  è pari al prodotto delle cariche elettriche dei due corpi (e quindi in particolare è positivo nel caso di cariche di segno opposto).<sup>4</sup> Le (7.1.1) sono le equazioni di Lagrange relative alla lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \frac{K}{|\mathbf{q}|}.$$

La trattazione può essere svolta in modo simile a quanto visto nel Capitolo 1: essendo la forza di tipo centrale, il momento angolare  $\mathbf{L} = \mathbf{q} \wedge m\dot{\mathbf{q}}$  si conserva (è una costante del moto), per cui il moto si svolge in un piano (ortogonale al vettore costante  $\mathbf{L}$ ). Se introduciamo in tale piano le coordinate polari  $(r, \theta)$  aventi il polo coincidente con il centro del campo di forze, la lagrangiana diviene

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{r}, \quad (7.1.2)$$

<sup>2</sup>In effetti, il nucleo ha dimensioni dell'ordine di  $10^{-13}$  cm,  $10^5$  volte più piccole di quelle dell'atomo.

<sup>3</sup>In particolare, per il caso planetario,  $m$  differisce realmente poco dalla massa  $M_P$  del pianeta. Anche nel caso della diffusione di Rutherford, il moto del nucleo di oro si può trascurare in prima approssimazione, perché la sua massa è circa 50 volte la massa della particella alfa incidente. Un riscontro più accurato con le misure sperimentali, richiederebbe di considerare il moto di rinculo del nucleo bersaglio, ma questo problema non verrà affrontato in queste note. Per una discussione vedi Landau, Lifschitz, *Corso di Fisica Teorica*, Vol. 1, Meccanica.

<sup>4</sup>Per il caso elettromagnetico, usiamo qui e nel seguito il sistema di unità di Gauss, che è il sistema tradizionale della fisica teorica.

che mostra subito che l'energia ed il momento coniugato a  $\theta$  si conservano, in quanto la lagrangiana non dipende né dal tempo né da  $\theta$ . Abbiamo quindi i due integrali del moto seguenti

$$\begin{aligned} l &= mr^2\dot{\theta} \\ E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{K}{r}, \end{aligned} \tag{7.1.3}$$

essendo  $l$  ed  $E$  rispettivamente l'intensità del momento angolare e l'energia. Si noti che nell'espressione dell'energia cinetica (ovvero  $(1/2)m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2]$ , come al solito, è stata usata per  $\dot{\theta}$  l'espressione ricavata dalla conservazione del momento angolare. Notiamo che  $l/(2m)$  è la classica velocità areolare, cioè la derivata temporale dell'area spazzata dal raggio vettore,<sup>5</sup> e quindi la costanza di  $l$  implica la seconda legge di Keplero o legge delle aree.

Come già discusso nel primo capitolo, l'energia  $E$  ha la stessa forma di quella di un punto materiale che si muove su una semiretta ( $r > 0$ ) soggetto all'azione di un'energia potenziale efficace  $V_{eff}(r)$  (dipendente parametricamente da  $l$ , e denotato con  $V_l^*(r)$  nel primo capitolo), data da

$$V_{eff}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{K}{r},$$

il cui grafico è riportato in Figura 7.1 per il caso Kepleriano (cioè il caso con  $K < 0$ , che descrive anche il caso Coulombiano attrattivo, con cariche di segno opposto). Si vede chiaramente che i moti risultano illimitati per  $E \geq 0$  (si tratta dei cosiddetti *stati d'urto*), mentre sono confinati (*stati legati*), precisamente in una corona circolare  $r_m < r < r_M$ , per energie comprese tra un ben definito valore minimo<sup>6</sup> e zero. Negli istanti in cui il raggio  $r$  assume il valore massimo  $r_M$  oppure minimo  $r_m$ , la derivata  $\dot{r}$  deve naturalmente annullarsi (condizione necessaria per l'esistenza di un estremo), per cui (come si vede dalla seconda delle (7.1.3))  $r_M$  ed  $r_m$  possono essere determinati come soluzioni dell'equazione

$$E = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{K}{r};$$

in altri termini, si tratta dei punti in cui l'energia potenziale efficace coincide con l'energia totale. Moltiplicando entrambi i membri per  $r^2$  si ottiene una

<sup>5</sup>Infatti in un tempuscolo  $dt$ , il punto si sposta di una quantità pari a  $d\mathbf{r}$ , e l'area  $dA$  spazzata dal raggio vettore per la definizione di prodotto vettoriale risulta essere

$$dA = |\mathbf{q} \wedge d\mathbf{q}|/2 = r^2 d\theta, \quad r = |\mathbf{q}|.$$

Dividendo per  $dt$  si ottiene il risultato.

<sup>6</sup>Tale minimo è determinato dal valore costante di  $l$ , a sua volta determinato dallo stato iniziale.

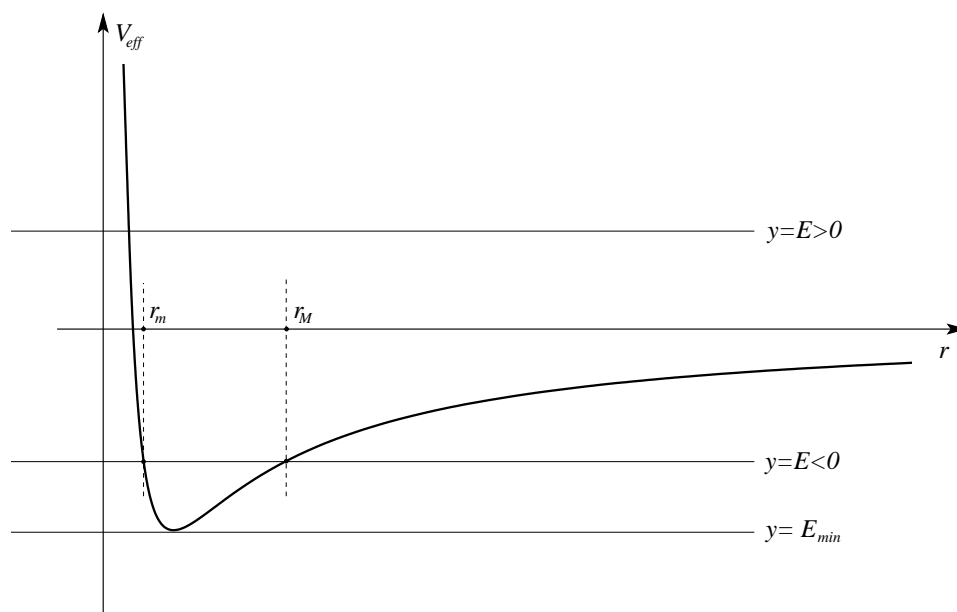


Figura 7.1: Grafico del potenziale efficace nel caso in cui  $K < 0$ , per  $l \neq 0$ .

equazione di secondo grado nell'incognita  $r$ , sicché le note relazioni tra radici e coefficienti dell'equazione si traducono nelle relazioni

$$r_M r_m = \frac{-l^2}{2mE}, \quad r_M + r_m = \frac{K}{E}, \quad (7.1.4)$$

che saranno utilizzate nel seguito.

Per completezza di informazione, accenniamo ora a come si perviene a determinare la forma delle orbite seguendo un procedimento del tutto generale, valido nel caso di dipendenza arbitraria della forza dalla distanza. Vedremo poi come nel nostro caso particolare la trattazione venga di fatto semplificata, facendo uso del fatto che allora esiste una ulteriore costante del moto (integrale di Laplace–Runge–Lenz). Si osserva anzitutto che l'espressione (7.1.3) dell'energia può essere riguardata come una equazione differenziale del primo ordine per  $r$  (ovviamente non posta in forma normale), una volta che siano assegnati i valori di  $E$  ed  $l$ , cioè una volta che si siano assegnati i dati iniziali. Infatti ricavando  $\dot{r}$  dalla seconda di (7.1.3) otteniamo (supponiamo ad esempio che sia inizialmente  $\dot{r}_0 > 0$ )

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}},$$

che è una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Come è noto<sup>7</sup>, la soluzione è fornita (in forma implicita, cioè a meno di una inversione)

<sup>7</sup>Consideriamo l'equazione  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  in un intervallo in cui sia  $f(x) \neq 0$ . Allora la

dall'espressione

$$t(r) - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dx}{\sqrt{E - l^2/(2mx^2) - K/x}}. \quad (7.1.5)$$

Questa espressione ha dei problemi per  $r = r_m$  o per  $r = r_M$ , in quanto l'espressione integranda diverge, coerentemente con il fatto che  $\dot{r}$  si annulla in tali punti. Lo studio del problema dell'inversione degli integrali costituisce un capitolo molto bello dell'analisi complessa, ma noi non ne avremo bisogno, perché nel seguito troveremo la legge oraria come soluzione della cosiddetta equazione di Keplero, da lui trovata già nel 1610 (prima cioè della formulazione della legge di gravitazione universale da parte di Newton e dunque dell'equazione del moto). Naturalmente a tale equazione si perviene anche calcolando l'integrale precedente, ma tale calcolo di forza bruta oscurerebbe le ragioni del risultato che si ottiene.

Analogamente, l'orbita  $r = r(\theta)$  si può ottenere risolvendo l'equazione differenziale

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sqrt{2m} r^2}{l} \sqrt{E - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}},$$

che si ottiene ricordando<sup>8</sup> che  $dr/d\theta = \dot{r}/\dot{\theta}$ , ed usando per  $\dot{\theta}$  l'espressione che si ricava dalla conservazione del momento angolare, e per  $\dot{r}$  l'espressione trovata più sopra utilizzando la conservazione dell'energia. Anche questa equazione differenziale è a variabili separabili, e la soluzione è data implicitamente dall'espressione

$$\theta - \theta_0 = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dx}{x^2 \sqrt{E - l^2/(2mx^2) - K/x}}.$$

Calcolando l'integrale ed invertendo la relazione ottenuta, si trova che l'orbita è una sezione conica. In particolare, nel caso attrattivo (caso gravitazionale o caso Coulombiano con cariche di segno opposto) si ha un'ellisse (in particolare un cerchio) o una parabola o un'iperbole o una parabola secondo il valore dell'energia (rispettivamente,  $E < 0$ ,  $E = 0$ ,  $E > 0$ ).

Si ha dunque il risultato che, nel caso di forze attrattive che decrescono come il quadrato della distanza, per energie negative tutte le orbite sono **periodiche**. Si noti che si tratta di un caso eccezionale, l'unico altro caso essendo quello dell'oscillatore armonico). Infatti si dimostra che, tranne che in tali due casi (kepleriano e armonico), per forze centrali a simmetria sferica si trovano orbite dense nella corona circolare  $r_m < r < r_M$ . Andiamo dunque ad illustrare la ragione di tale comportamento eccezionale, con un argomento che al contempo ci fornirà anche un metodo per determinare l'orbita, senza dovere fare ricorso al calcolo di alcun integrale.

Osserviamo anzitutto che se (avendo fissato i valori dell'energia e del momento angolare) l'orbita risulta essere periodica, ciò significa che deve esserci un'altra costante del moto. Infatti, avendo fissato un certo valore di

---

funzione  $x = x(t)$  è monotóna, ed è dunque definita la funzione inversa  $t = t(x)$ , e per la formula della derivata della funzione inversa si ha allora  $\frac{dt}{dx} = 1/f(x)$ .

<sup>8</sup>Vale forse la pena di ricordare che la conservazione del momento angolare implica che la velocità angolare  $\dot{\theta}$  è sempre diversa da zero, cioè  $\theta$  è una funzione monotóna del tempo e dunque può essere invertita a dare  $t = t(\theta)$ .

$\theta$  (cioè una semiretta nel piano in cui si svolge il moto) devono allora risultare univocamente determinati i valori di  $r$  e di  $\dot{r}$ <sup>9</sup> mentre le informazioni della conservazione dell'energia e del momento angolare ci direbbero soltanto che una di quelle due variabili è funzione dell'altra. Fissato  $\theta$ , si ha dunque che  $r$  ed  $\dot{r}$  devono soddisfare un altro vincolo, oltre la conservazione dell'energia e del momento angolare, in modo che il loro valore risulti univocamente determinato. Ma l'esistenza di un altro vincolo tra posizione e velocità significa che esiste un altro integrale del moto oltre a quelli già trovati. Mostriamo ora che infatti esiste un certo vettore, detto vettore di Runge-Lenz (o di Laplace) che è una costante del moto indipendente dall'energia e dal momento angolare. Si tratta del vettore  $\mathbf{C}$  definito da

$$\mathbf{C} \stackrel{\text{def}}{=} K \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} - \mathbf{L} \times \dot{\mathbf{q}}, \quad (7.1.6)$$

Per dimostrare che  $\mathbf{C}$  si mantiene costante lungo le soluzioni dell'equazione di Newton, l'idea centrale consiste nel seguire l'evoluzione temporale del versore  $\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$  diretto verso il punto mobile, e osservando che si ha l'identità (si usi  $|\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}}$ )

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{\dot{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|} - \mathbf{q} \frac{\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}}{|\mathbf{q}|^3} = \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3} = (\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \times \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^3},$$

dove si è usata la nota formula del doppio prodotto vettore

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Usando l'equazione di moto (7.1.1) e ricordando che  $\mathbf{L} = \mathbf{q} \times m\dot{\mathbf{q}}$ , la relazione precedente si scrive come

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{1}{K} \mathbf{L} \times \ddot{\mathbf{q}},$$

e dunque, essendo  $\mathbf{L}$  costante del moto, si trova

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} - \frac{1}{K} \mathbf{L} \times \dot{\mathbf{q}} \right) = 0.$$

Il vettore  $\mathbf{C}$  ovviamente giace nel piano del moto, e si vede inoltre facilmente che è nullo nel caso in cui il moto sia circolare. Nei punti in cui  $\dot{r} = 0$ , cioè nei punti di massima e minima distanza dal centro di forze (cioè all'afelio ed al perielio nel caso dei pianeti), la velocità è puramente tangenziale, per cui  $\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{q}}$  è un vettore puramente radiale, ovvero diretto come  $\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ , e dunque la direzione di  $\mathbf{C}$  coincide con quella di  $\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$  nei punti di massima o minima distanza. Viceversa, i punti aventi distanza massima  $r_M$  e quelli aventi distanza minima  $r_m$  dal centro delle forze, che a priori potrebbero giacere su rette (passanti per il centro di forze) aventi una direzione qualsiasi nel piano, devono invece giacere sulla retta diretta come il vettore  $\mathbf{C}$  che è un vettore costante. In altri termini, esiste una retta passante per il

<sup>9</sup>Si considerano orbite periodiche semplici, che compiono un solo giro attorno all'origine.

centro delle forze (la retta diretta come  $\mathbf{C}$ ) avente la proprietà che le orbite la attraversano in soli due punti; dunque le orbite sono chiuse (e i moti periodici). Vedremo che le orbite sono coniche, con asse disposto lungo il vettore  $\mathbf{C}$ .

Per quanto riguarda il modulo  $C$  del vettore  $\mathbf{C}$ , ovviamente si ha (si ricordi che abbiamo denotato con  $l$  l'intensità del vettore  $\mathbf{L}$ , e che  $\mathbf{L}$  è ortogonale a  $\dot{\mathbf{q}}$ )

$$\begin{aligned} C^2 &= K^2 + l^2 \dot{\mathbf{q}}^2 - \frac{2K}{|\mathbf{q}|} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{q}}) = \\ &= K^2 + \frac{2l^2}{m} \left( E - \frac{K}{|\mathbf{q}|} \right) + \frac{2K}{m|\mathbf{q}|} l^2 \end{aligned}$$

ovvero

$$C^2 = K^2 + \frac{2El^2}{m}, \quad (7.1.7)$$

dove si è usata la costante dell'energia per esprimere  $\dot{\mathbf{q}}^2$  in funzione dell'energia  $E$  e del potenziale, e la proprietà del doppio prodotto misto  $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{L} \cdot (\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q})$ .

Ora l'equazione dell'orbita si ottiene direttamente senza bisogno di alcuna integrazione. Infatti scriviamo la (7.1.6) nella forma

$$\mathbf{L} \times \dot{\mathbf{q}} = K \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} - \mathbf{C};$$

prendendo il modulo al quadrato di entrambi i membri ed usando, come sopra, l'espressione di  $\dot{\mathbf{q}}^2$  in funzione dell'energia  $E$  e del potenziale, si trova

$$\frac{2}{m} l^2 \left( E - \frac{K}{|\mathbf{q}|} \right) = C^2 + K^2 - 2CK \cos(\theta - \theta_0),$$

dove  $\theta$  e  $\theta_0$  sono gli angoli che il vettore posizione  $\mathbf{q}$  e il vettore  $\mathbf{C}$  formano con la semiretta  $\theta = 0$ . Usando l'espressione (7.1.7) per  $C^2$  si ottiene

$$-\frac{Kl^2/m}{r} = K^2 \left( 1 - \frac{C}{K} \cos(\theta - \theta_0) \right)$$

che si scrive anche come

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (7.1.8)$$

dove le costanti  $p$  ed  $\varepsilon$  hanno le espressioni seguenti in termini delle costanti del moto  $l$  ed  $E$  (oppure  $C$ ), e dei parametri  $m$  e  $K$ :

$$\begin{aligned} p &= -\frac{l^2}{mK} \\ \varepsilon &= -\frac{C}{K}, \quad \varepsilon^2 = \frac{C^2}{K^2} = 1 + \frac{2El^2}{mK^2}. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

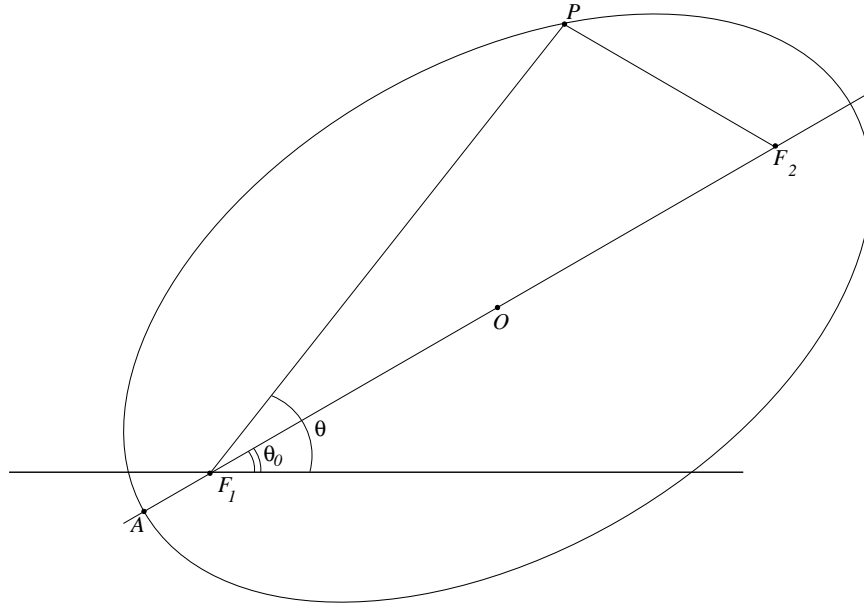


Figura 7.2: Deduzione dell'equazione dell'ellisse in coordinate polari.

### 7.1.1 Moti ellittici ed equazione di Keplero

Cominciamo col mostrare che la (7.1.8) definisce effettivamente una conica. Diamo la dimostrazione nel caso dell'ellisse (nel caso dell'iperbole la dimostrazione è analoga). Con riferimento alla Figura 7.2, l'ellisse è il luogo dei punti  $P$  per cui, assegnati due punti  $F_1$  ed  $F_2$  detti fuochi, vale  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$  (con  $\overline{PF_1}$  denotiamo il vettore spostamento dal punto  $P$  al punto  $F_1$ , e con  $\overline{PF_1}$  la sua lunghezza). Preso  $F_1$  come polo delle coordinate polari, allora vale  $\overline{PF_1} = r$ ; introduciamo anche la costante  $c$  definita come semidistanza tra i due fuochi, ovvero da  $2c \stackrel{\text{def}}{=} \overline{F_1F_2}$ . Ora quadrando la relazione che definisce l'ellisse<sup>10</sup> si trova

$$\overline{PF_2}^2 = r^2 + 4a^2 - 4ar .$$

D'altra parte, per il teorema di Carnot si ha anche<sup>11</sup>

$$\overline{PF_2}^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc \cos(\theta - \theta_0) ,$$

e si perviene in tal modo alla relazione

$$4a^2 - 4ar = 4c^2 + 4rc \cos(\theta - \theta_0) , \quad (7.1.10)$$

<sup>10</sup>Nel caso dell'iperbole cambia solo il segno del termine  $4ar$ .

<sup>11</sup>Se  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ , allora si ha  $c^2 \equiv \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

che fornisce<sup>12</sup>

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} ,$$

in cui figurano le quantità  $p$  (parametro) ed  $\varepsilon$  (eccentricità) definiti da

$$\varepsilon = c/a , \quad p = a(1 - \varepsilon^2) .$$

Ricordiamo qui per inciso dei fatti ben noti. Si riconosce immediatamente che l'ellisse è simmetrica rispetto all'asse focale e anche rispetto all'asse normale all'asse focale per il punto medio del segmento  $F_1F_2$  (centro). È quindi spontaneo introdurre un sistema di coordinate avente  $U$  per origine, con l'asse  $x$  lungo l'asse focale. Si riconosce subito che  $a$  ha il significato di ascissa dell'intersezione dell'ellisse con l'asse delle  $x$ , mentre le intersezioni con l'asse delle  $y$  hanno ordinate  $\pm b$  con  $b^2 + c^2 = a^2$  e dunque si ha  $b < a$  e anche  $c < a$ , da cui segue in particolare che per l'ellisse si ha  $\varepsilon < 1$ . In termini delle costanti  $a, b$ , le costanti  $\varepsilon, p$  hanno la forma

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} , \quad p = \frac{b^2}{a} .$$

Notiamo che dalla seconda delle (7.1.9) si trova che, per energie  $E$  negative, l'eccentricità risulta minore di 1, come deve essere se la conica è un'ellisse. Inoltre da  $p = a(1 - \varepsilon^2)$ , usando le espressioni per  $p$  ed  $\varepsilon$  in termini del momento angolare e dell'energia si trova la relazione notevole

$$E = \frac{K}{a} ,$$

che mostra come il semiasse  $a$  della conica dipenda solamente dal valore dell'energia.

Infine, poiché il modulo del vettore  $\mathbf{C}$  (a parte la costante  $K$ ) determina l'eccentricità dell'orbita, e la sua direzione determina l'asse della conica, talvolta tale vettore viene anche chiamato *vettore eccentricità*.

Vi è un'altra familiare parametrizzazione dell'ellisse (vedi Figura 7.3), cioè quella riferita a coordinate cartesiane la cui origine coincida con il centro  $O$  dell'ellisse. Se  $P$  è un punto sull'ellisse, di coordinate (cartesiane)  $(x, y)$ , allora vale

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ,$$

sicché evidentemente esiste un angolo  $u$  tale che valga

$$x = a \cos u , \quad y = b \sin u .$$

---

<sup>12</sup>Si osservi che scegliendo  $\theta_0 = 0$  o  $\theta_0 = \pi$  si ha rispettivamente

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta} , \quad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta} .$$

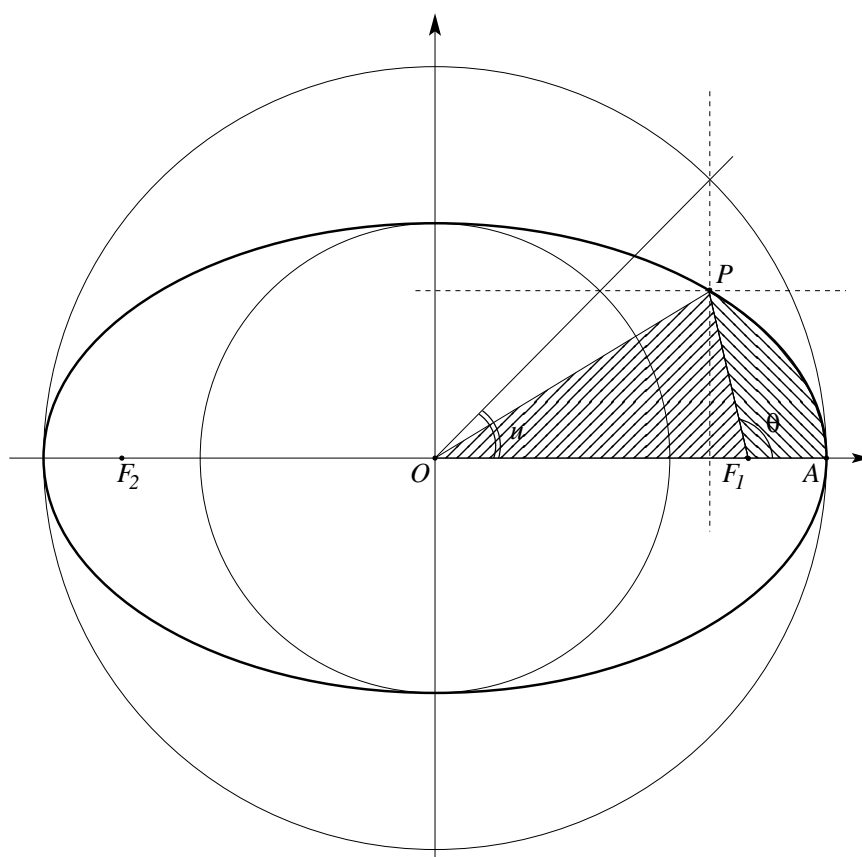


Figura 7.3: Deduzione dell'equazione di Keplero per l'anomalia eccentrica.

Il valore dell'angolo  $u$  è legato al valore dell'area  $S$  del settore di ellisse  $AOP$  dalla relazione<sup>13</sup>

$$S = \frac{ab}{2} u ,$$

l'analogia della relazione che esiste nel cerchio tra area del settore circolare ed angolo al centro. In astronomia, l'angolo  $\theta$  viene chiamato *anomalia vera*, mentre l'angolo  $u$  viene chiamato *anomalia eccentrica*. Il punto  $A$  dell'orbita più vicino al centro di forze (il fuoco assunto come origine delle coordinate polari) viene chiamato *perielio* (dal greco vicino al sole -elio), e l'angolo  $\phi$  definito dal rapporto  $\phi \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi t/T$ , dove  $t$  è il tempo necessario

<sup>13</sup>Infatti, come si vede dalla Figura 7.3, l'angolo  $u$  non coincide con l'angolo al centro come nel caso del cerchio. Il calcolo dell'area del settore  $AOP$  si effettua agevolmente calcolando l'integrale di  $(y dx - x dy)/2$  sulla frontiera di  $AOP$ . Ora, sui segmenti  $OA$  ed  $OP$  in cui  $y = \alpha y$ , vale  $y dx - x dy = 0$  come un semplice calcolo mostra, mentre sull'arco  $\widehat{AP}$  vale  $y dx - x dy = ab du$ , come si verifica semplicemente usando la parametrizzazione dell'ellisse indicata.

a percorrere l'arco  $\widehat{AP}$  e  $T$  il periodo di rivoluzione, viene detto *anomalia media* (perché evidentemente cresce con velocità costante). La relazione tra anomalia eccentrica ed anomalia vera è di tipo puramente geometrico e viene determinata molto semplicemente osservando che  $r \cos \theta = x - c$  (vedi Figura 7.3) mentre, in virtù dell'equazione dell'ellisse nella forma 7.1.10, vale  $ar = b^2 - cr \cos \theta$ . Sostituendo ad  $r \cos \theta$  l'espressione precedente segue  $ar = a^2 - cx$ , cioè

$$r = a(1 - \varepsilon \cos u) .$$

Usando l'equazione dell'ellisse in coordinate polari

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} ,$$

si giunge infine, eguagliando le due diverse espressioni per  $r$ , alla seguente relazione tra  $\theta$  ed  $u$

$$(1 + \varepsilon \cos \theta)(1 - \varepsilon \cos u) = (1 - \varepsilon^2) .$$

La legge oraria del movimento viene espressa mediante una relazione tra anomalia eccentrica ed anomalia media che è equivalente ad effettuare esplicitamente l'integrale che compare nella (7.1.5). Abbiamo detto che l'area del settore ellittico  $POA$  vale  $(ab/2)u$ ; tale area risulta somma dell'area del triangolo  $OF_1P$  pari a  $cb/2 \sin u$ , e dell'area  $PF_1A$ , che per la seconda legge di Keplero (o equivalentemente per la conservazione del momento angolare) è pari a  $\pi ab t/T$ . Si ottiene dunque l'equazione di Keplero

$$\frac{2\pi}{T}t = u - \varepsilon \sin u ,$$

che è la relazione che lega anomalia media ed anomalia eccentrica. Invertendo questa relazione si ottiene l'angolo  $u$  come funzione del tempo e dunque la legge oraria del movimento.

### 7.1.2 Scattering di Rutherford

Per discutere la diffusione di un fascio di particelle incidenti da parte di un centro diffusore, bisogna introdurre un concetto nuovo: la cosiddetta *sezione d'urto differenziale*. Si deve pensare che un fascio di particelle provenga dall'infinito, tutte con la medesima velocità asintotica  $\mathbf{v}$ , mentre le posizioni iniziali siano distribuite uniformemente. In termini del parametro d'urto  $b$ , definito come la distanza tra il centro di forze  $\mathbf{F}_1$  (vedi la Figura 7.4) e la retta su cui giace la velocità asintotica, si suppone che i valori di  $b$  relativi alle varie particelle siano distribuiti uniformemente. L'intensità  $I$  del fascio è definita come il numero  $dn$  di particelle che nell'unità di tempo attraversa un certa areola  $da$  posta perpendicolarmente al fascio, e viene assunta essere la stessa in tutti i punti del fascio.

Le particelle incidono sul centro di forza e la loro velocità  $\mathbf{u}$  dopo l'urto (cioè la velocità asintotica delle particelle per  $t \rightarrow +\infty$ ) sarà in generale diversa da  $\mathbf{v}$ , anche se, nel caso che stiamo considerando di *collisione elastica*, sarà eguale in modulo. L'angolo  $\chi$  che la direzione di  $\mathbf{u}$  forma con la direzione di incidenza del fascio viene detto *angolo di diffusione*, o angolo di *scattering*. Il numero di particelle  $dn'$  che dopo l'urto avranno velocità  $\mathbf{u}$  con direzione giacente in un determinato angolo solido  $d\Omega$ ,<sup>14</sup> sarà evidentemente proporzionale (oltre che a  $d\Omega$ ) all'intensità del fascio incidente (lo dimostreremo tra breve), e la costante di proporzionalità viene appunto detta *sezione d'urto differenziale*. Dunque definiamo la sezione d'urto differenziale  $\sigma$  come

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dn'}{I d\Omega} .$$

Se assumiamo che il centro diffusore agisca sulle particelle incidenti mediante un forza centrale, allora il problema è simmetrico per rotazioni aventi come asse la direzione di incidenza del fascio, per cui la sezione d'urto differenziale dipenderà solo dall'angolo  $\chi$  di scattering (e dall'energia delle particelle incidenti, ovviamente). Integrando  $\sigma$  su tutto l'angolo solido otterrò la sezione d'urto totale, cioè il numero di particelle che viene diffuso per questo processo di collisione elastica. Questo processo è l'unico che può avvenire nella situazione semplicissima in cui ci siamo messi. Negli esperimenti reali, gli urti eccitano anche i gradi di libertà interni del centro diffusore, sicché, in tal caso l'energia finale delle particelle potrà essere diversa dall'energia iniziale: si realizza così un processo *anelastico* a cui corrisponderà una determinata sezione d'urto (differenziale o totale).

Ci si può domandare quale sia l'interesse di studiare la sezione d'urto. Mentre è evidente che la sezione d'urto dipende dalle forze di interazione, per cui, come tra breve mostreremo, è possibile calcolare la sezione d'urto per tutte le energie e tutti gli angoli di diffusione, viceversa è anche possibile risalire dalla sezione d'urto alle forze di interazione. Questa fu proprio l'idea di Rutherford che riuscì a stabilire, misurando la sezione d'urto, che il potenziale di interazione tra atomi di oro e particelle alfa fosse con buonissima approssimazione quello determinato da una carica positiva puntiforme. Si fu quindi forzati ad abbandonare l'idea che la carica positiva fosse distribuita come un continuo in tutto il volume dell'atomo, per adottare il cosiddetto modello planetario in cui tutta la carica positiva (ed essenzialmente anche la massa) dell'atomo è concentrata in un volume trascurabile al centro di questo. In seguito, usando particelle di energia molto più alta di quelle disponibili all'epoca di Rutherford, si è cominciato a sondare la distribuzione di carica all'interno del nucleo atomico.

<sup>14</sup>Naturalmente se siamo sufficientemente lontani dal centro diffusore, come avviene negli usuali esperimenti di fisica atomica e nucleare, le particelle che hanno  $\mathbf{u} \in d\Omega$ , sono quelle che effettivamente vengono rivelate nell'angolo solido  $d\Omega$ .

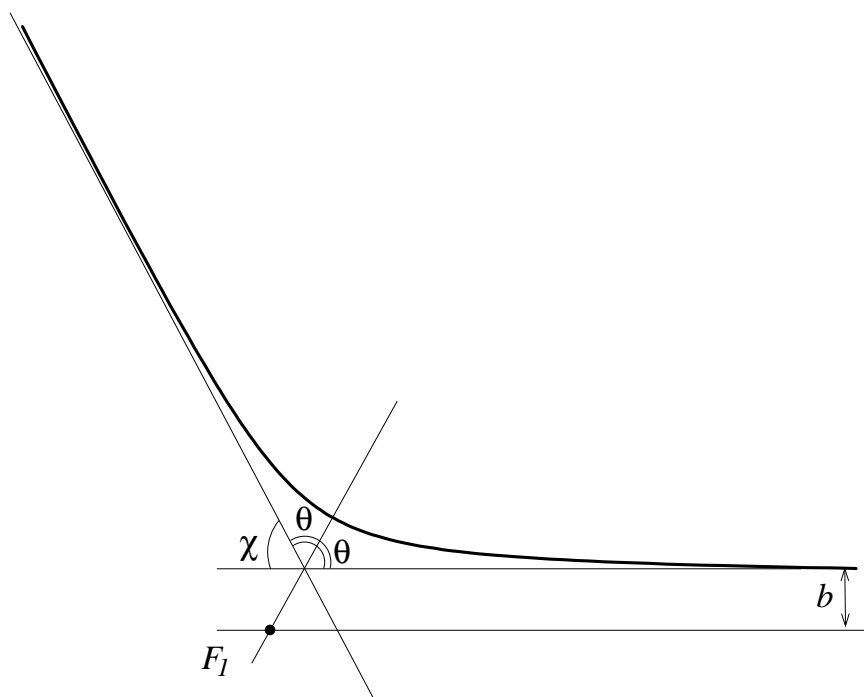


Figura 7.4: Descrizione cinematica dei processi di urto.

Tornando al calcolo della sezione d'urto, cominciamo preliminarmente ad osservare che ad ogni parametro d'urto  $b$  corrisponde una ben precisa traiettoria e quindi un ben preciso angolo di scattering  $\chi = \chi(b)$ . Allora il numero  $dn'$  di particelle che viene diffuso sotto un angolo tra  $\chi$  e  $\chi + d\chi$  sarà eguale al numero di particelle che incide con un parametro d'impatto tra  $b$  e  $b + db$ . Per la definizione di intensità del fascio tale numero è evidentemente  $dn' = I 2\pi b db$ , per cui dalla definizione di sezione d'urto, ricordando che  $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ <sup>15</sup> si ottiene

$$\sigma = \frac{dn'}{I d\Omega} = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|. \quad (7.1.11)$$

Notiamo che, in questa formula,  $\sigma$  è intesa dipendente da  $b$ , per cui bisogna ancora invertire la relazione  $\chi = \chi(b)$  per trovare  $b = b(\chi)$  e poter quindi determinare  $\sigma$  in funzione di  $\chi$ , che è proprio quello che effettivamente si misura negli esperimenti di diffusione. Tale inversione è assicurata se si ha  $d\chi/db \neq 0$ , come mostreremo che avviene nel caso di Rutherford.<sup>16</sup>

<sup>15</sup>Abbiamo sfruttato la simmetria cilindrica del problema, andando a calcolare il numero di particelle che cadono nel cono  $(\chi, \chi + d\chi)$ . La distribuzione è ovviamente uniforme per rotazioni attorno all'asse del cono.

<sup>16</sup>Nel caso di potenziali generici questa condizione non è sempre verificata, per cui la

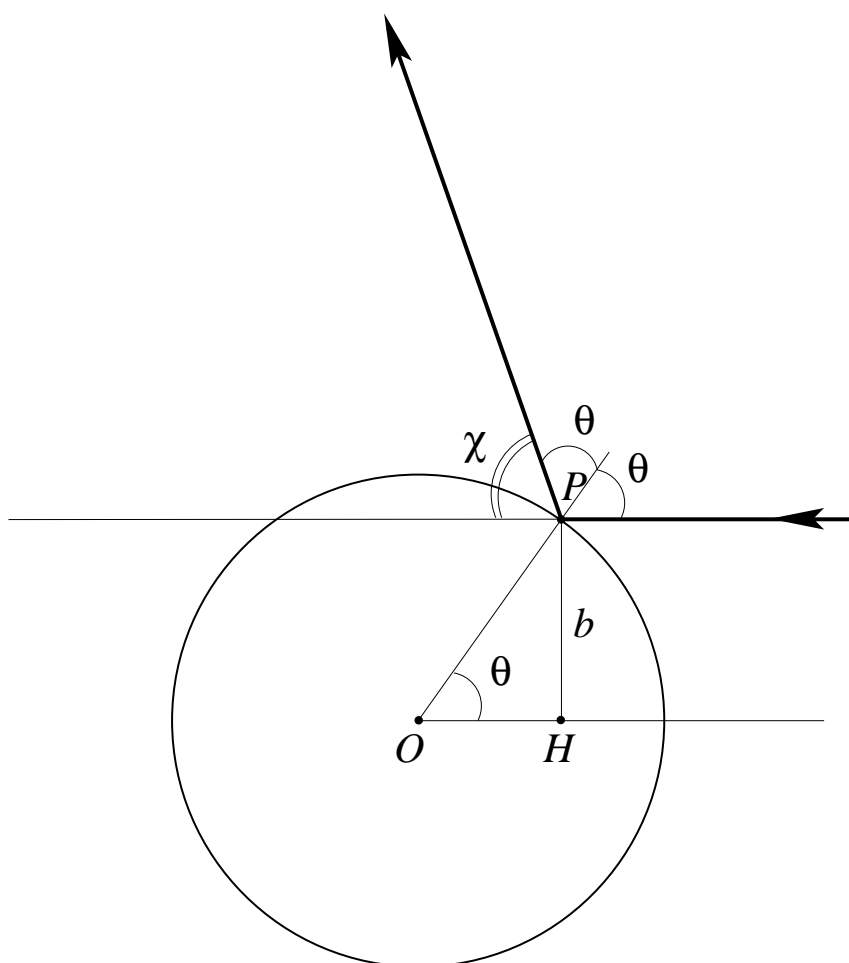


Figura 7.5: Diffusione da una sfera rigida.

Per comprendere meglio il significato delle quantità introdotte, proviamo a considerare, come esercizio, la diffusione di una particella puntiforme da parte di una sfera rigida di raggio  $a$ .

**Esercizio 1. (Diffusione da una sfera rigida).** Calcolare la sezione d'urto  $\sigma(\chi)$  differenziale e la sezione d'urto  $\sigma_T$  totale, per la diffusione da parte di una sfera rigida di raggio  $a$ .

**Soluzione.** L'interazione tra sfera e particella incidente avviene secondo la legge della riflessione, in modo cioè che l'angolo di riflessione sia eguale all'angolo di incidenza. Allora, come si vede dalla figura 7.5, detto  $\chi$  l'angolo di diffusione e  $\theta$

---

funzione  $b = b(\chi)$  risulterà in generale multivoca, cioè si avranno diversi valori  $b_i$  per ogni valore di  $\chi$ . In questo caso la sezione d'urto si ottiene sommando i diversi contributi, dati dalla (7.1.11) calcolata per ogni ramo  $b_i$ .

l'angolo di incidenza si ha  $\pi - \chi = 2\theta$ . Sempre dalla figura si vede che il legame tra il parametro d'urto  $b$  e l'angolo  $\theta$  è dato da  $b = a \sin \theta$ , dove  $a \stackrel{\text{def}}{=} \overline{OP}$  è il raggio della sfera. La relazione tra parametro d'urto ed angolo di diffusione è dunque dato da

$$b = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} .$$

Ora, la sezione d'urto si trova applicando la relazione (7.1.11), che fornisce immediatamente

$$\sigma = \frac{a^2 \cos \frac{\pi - \chi}{2} \sin \frac{\pi - \chi}{2}}{2 \sin \chi} = \frac{a^2}{4} ,$$

dove si è usata la formula di duplicazione per il seno a numeratore, e poi le proprietà del seno di angoli supplementari. Si trova quindi che la sezione d'urto differenziale è una costante, cioè il numero di particelle diffuse sotto ogni angolo è il medesimo. Sotto questo apposto la sfera si comporta come una sorgente sferica di particelle. La sezione d'urto totale vale  $\sigma_T = \pi a^2$  (si trova semplicemente moltiplicando  $\sigma$  per  $4\pi$ , l'angolo solido sotteso dalla sfera), cioè pari alla superficie della sezione del bersaglio, la sfera in questo caso. È per questo motivo che talvolta la sezione d'urto totale viene intesa come indicazione della "dimensione del bersaglio", anche quando il bersaglio interagisce con la particella incidente mediante un potenziale di interazione liscio, e non mediante un urto.

A differenza con quanto visto nell'esercizio, per lo scattering da un potenziale Coulombiano si ha una forte dipendenza della sezione d'urto dall'angolo di diffusione. Come mostreremo tra breve la sezione d'urto  $\sigma$  è data infatti da

$$\sigma = \frac{K^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \chi/2} . \tag{7.1.12}$$

In particolare questo implica che la sezione d'urto totale risulta infinita, cioè vi è un numero infinito di particelle che vengono diffuse dalla forza Coulombiana. Questo è dovuto al fatto che  $\sigma$  diverge in maniera non integrabile per  $\chi \rightarrow 0$ , ovvero per  $b \rightarrow \infty$  (come mostra l'espressione per  $b = b(\chi)$  data più avanti). In altri termini, nel caso Coulombiano non esiste una distanza tipica, oltre la quale la forza si possa considerare ininfluenza per il moto delle particelle. Per questo si usa dire che la forza Coulombiana è a lungo raggio d'azione (*long range* in inglese).

Per determinare  $b$  in funzione di  $\chi$  nel caso Coulombiano, notiamo che, come si vede dalla Figura 7.4, l'angolo di scattering  $\chi$  è legato all'angolo  $\theta$  che l'asintoto dell'iperbole forma con l'asse della conica dalla relazione seguente

$$\chi = \pi - 2\theta .$$

Ora, dall'espressione in coordinate polari caso dell'iperbole

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta} , \quad \varepsilon > 1 ,$$

si vede che  $r$  diventa infinito per  $\cos \theta = 1/\varepsilon$ , e dunque l'angolo  $\theta$  sarà proprio dato da  $\theta = \arccos 1/\varepsilon$ .<sup>17</sup> L'eccentricità dell'iperbole risulta dunque legata all'angolo di diffusione dalla relazione seguente

$$\varepsilon = \frac{1}{\sin \chi/2} .$$

L'unica difficoltà che resta è di esprimere l'eccentricità in funzione del parametro d'urto  $b$ , ma questo si può fare agevolmente, come vedremo subito, e si trova

$$b = \frac{K}{2E} \cot \chi/2 .$$

Infatti dalla definizione di parametro d'urto si ha

$$l = m|v|b = \sqrt{2mE} b ,$$

da cui, tramite la (7.1.9), segue

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{4E^2}{K^2} b^2 ,$$

da cui si ricava

$$b = \frac{K}{2E} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \chi/2} - 1} = \frac{K}{2E} \cot \chi/2 ,$$

che è l'espressione data sopra.

Sostituendo questa espressione nella formula generale (7.1.11), si trova alla fine

$$\sigma = \frac{K^2}{8E^2} \frac{\cot \chi/2}{\sin \chi} \frac{1}{\sin^2 \chi/2} ,$$

che è equivalente all'espressione (7.1.12) data sopra per la sezione d'urto.

## 7.2 Piccole Oscillazioni

Se si dovesse seguire un percorso storico nello studio della meccanica, la primissima parte da studiare sarebbe la **statica**, cioè la scienza che studia sotto quali condizioni i corpi non si muovono. E' evidente l'importanza fondamentale di avere manufatti stabili (dagli oggetti di uso comune, alle abitazioni, alle grandi opere pubbliche) e si comprende dunque come le condizioni per ottenere tale stabilità siano da sempre oggetto di indagine approfondita.

<sup>17</sup>Nel caso di un generico potenziale centrale l'angolo  $\theta$  è dato invece da

$$\theta = \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_m}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{E - V_{eff}(x)}} ,$$

mentre il resto delle considerazioni rimane inalterato.

Meno evidente, e per lo più sconosciuto, è il fatto che da questo sforzo intellettuale, è nata la dinamica, cioè lo studio dei corpi **in movimento**, che dalla statica ha preso ad esempio il concetto di forza e del suo carattere vettoriale, oppure il principio dei lavori virtuali, oltre che l'impostazione generale. Un tentativo di elucidare questi rapporti sarà dato in un'altra parte di queste dispense,<sup>18</sup> e ci limiteremo per ora ad alcuni cenni di come si possa, in un certo senso, recuperare la statica a partire dalla dinamica. Da un punto di vista logico, ad esempio, se un punto non si muove, vuol dire che la sua posizione è costante nel tempo, cioè è data da  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$  per tutti i  $t$ . Da questo punto di vista un punto fermo rappresenta solo un particolare caso di un corpo in moto, il caso cioè di un corpo avente velocità sempre nulla. Come abbiamo cercato di avvertire più sopra, una tale visione rischia di banalizzare il problema, ma in questo modo la statica si riduce allo studio delle soluzioni costanti dell'equazioni di Lagrange. In un certo senso, è poi la matematica stessa a vendicare la statica, perché questi moti costanti risultano giocare un ruolo fondamentale per guidare la stessa evoluzione dinamica generica dei sistemi, come è illustrato ad esempio nel primo capitolo delle note di Meccanica Razionale II degli stessi autori. In altri termini, anche rimanendo al solo livello matematico, questi moti costanti risultano avere un carattere distintivo che giustifica il loro studio particolareggiato.

Nel paragrafo seguente daremo una esposizione molto elementare della nozione di punto di equilibrio e nella sezione successiva (DA SCRIVERE) tratteremo alcuni esempi elementari e tuttavia significativi tratti dalla statica.

Nel paragrafo successivo si introduce il concetto di punto di equilibrio stabile (che risulta fondamentale per la statica) e si dà un criterio per la stabilità di un punto di equilibrio. Mediante esempi viene anche presentato il problema della linearizzazione delle equazioni di moto attorno al punto di equilibrio e di come si affronta lo studio delle piccole oscillazioni. Ad una trattazione sistematica di questo problema è dedicata l'ultimo paragrafo.

Un paragrafo è dedicato alle piccole oscillazioni di una catena lineare di particelle, che è il più semplice tra una classe di problemi di notevole importanza ad esempio nella fisica statistica.

### 7.2.1 Punti di equilibrio

Cominciamo dunque a dare un nome alle cose, e per un sistema di equazioni differenziali del primo ordine

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) ,$$

definiamo le **soluzioni di equilibrio** vpm le soluzioni costanti nel tempo, cioè del tipo  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \forall t \in \mathbb{R}$  (i punti non si muovono, nel linguaggio della

---

<sup>18</sup>Ancora da scrivere.

dinamica). Naturalmente affinché tali moti siano soluzioni occorre che  $\mathbf{x}_o$  abbia un valore ben determinato. Infatti, poiché abbiamo assunto  $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$ , deve essere

$$0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) ,$$

cioè  $\mathbf{x}_o$  deve essere un punto in cui si annulla l'assegnato campo vettoriale  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Tali punti vengono detti punti di equilibrio.

Nel caso delle equazioni di Newton, o più in generale nel caso Lagrangiano, la situazione è leggermente più complicata, poiché le equazioni sono del secondo ordine e non del primo; comunque la definizione di soluzione di equilibrio rimane la medesima. Ci limiteremo a considerare il caso di Lagrangiane indipendenti dal tempo, in cui cioè si ha  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

**Definizione 1** Una soluzione costante delle equazioni di Lagrange, cioè nella forma  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_o \forall t \in \mathbb{R}$ , è detta soluzione di equilibrio.

Le soluzioni di equilibrio nel caso Lagrangiano, sono caratterizzate da un valore  $\mathbf{q}_o$  per cui vale

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\mathbf{q}_o, 0) = 0 \quad i = 1, \dots, n . \quad (7.2.1)$$

Infatti se nelle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

si sviluppa la derivata temporale al membro di sinistra in forma esplicita, si trova

$$\sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \sum_k \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n , \quad (7.2.2)$$

per cui soluzioni  $\mathbf{q}(t)$  statiche, cioè con tutte le derivate nulle, rendendo identicamente nullo il membro di sinistra, devono necessariamente rendere nullo il membro di destra, cioè soddisfare la (7.2.1). Questo giustifica la definizione seguente

**Definizione 2** Il punto  $\mathbf{q}_o$  si dice punto di equilibrio se risulta che la coppia  $(\mathbf{q}_o, 0)$  è soluzione della (7.2.1).

Naturalmente nel caso di Lagrangiane naturale  $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{q}$  non dipende dalle velocità (tranne nel caso del campo elettromagnetico), per cui comunemente si sottintende che la velocità debba essere nulla. Possiamo addirittura fare riferimento alla forma più generale delle equazioni di Lagrange, in cui si hanno forze attive  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, \dots, N$  dove  $N$  è il numero di punti materiali costituenti il sistema) che possono anche non ammettere energia potenziale. In tal caso si vede immediatamente che la condizione di equilibrio si esprime

nella forma (si ammette che le reazioni vincolari siano perfette, cioè non lavorino per spostamenti conformi ai vincoli)

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{x}_k = 0, \quad (7.2.3)$$

per tutti gli spostamenti  $d\mathbf{x}_k$  compatibili con i vincoli, cioè della forma

$$d\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial q_i} dq_i.$$

La relazione 7.2.3 esprime appunto il **Principio dei Lavori Virtuali**.

Tale principio, che appare ovvio a posteriori, fu invece conquistato comprendendo che esso sintetizza i risultati relativi alle macchine semplici, cioè a leve, piani inclinati e carrucole. In quest'ottica risulta notevole il teorema di Torricelli, che afferma la stabilità di un corpo pesante, se tutti i movimenti ammissibili provocano l'innalzarsi del baricentro. Risolveremo ora, sotto forma di esercizi, alcuni problemi elementari di statica. Il lettore non interessato alla statica, può saltare questa parte, e riprendere con la sezione successiva in cui si discute la stabilità dei punti di equilibrio.

## 7.2.2 Alcuni esempi tratti dalla statica

### 7.2.3 Classificazione dei punti di equilibrio

Una classificazione interessante dei punti di equilibrio è fatta mediante il concetto di stabilità. Intuitivamente una pallina ferma in fondo ad una scodella è in una situazione ben differente di una pallina in cima ad un colle. Infatti nel primo caso la pallina oscilla di poco se la spostiamo di poco dalla posizione di equilibrio, mentre nel secondo caso un piccolo spostamento causa grosse alterazioni del movimento. Nel primo caso diciamo che l'equilibrio è stabile. In realtà la nozione di equilibrio stabile, che ora formalizzeremo, è ancora più sottile, perché dice non solo che la soluzione si scosta di poco in seguito a piccole perturbazioni dei dati iniziali, ma che ci può scostare di *arbitrariamente poco* pur di scegliere perturbazioni dei dati iniziali opportunamente piccole. La definizione di punto di equilibrio stabile recita infatti

**Definizione 3** *Il punto di equilibrio  $(\mathbf{q}_o, 0)$  si dice stabile se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che se considero dati iniziali con  $|\mathbf{q}_o - \mathbf{q}(0)| \leq \delta$  e  $|\dot{\mathbf{q}}(0)| \leq \delta$ , allora  $\forall t > 0$  vale  $|\mathbf{q}_o - \mathbf{q}(t)| \leq \varepsilon$  e  $|\dot{\mathbf{q}}(t)| \leq \varepsilon$  per tutti i tempi.*

I punti di equilibrio che non sono stabili, vengono detti instabili. Per questi ultimi punti, comunque si fissi un  $\delta$  positivo piccolo piacere, esiste un dato iniziale, a distanza dal punto di equilibrio minore di  $\delta$ , che l'evoluzione seguente porta a distanza finita.

È possibile capire se un punto di equilibrio è stabile, senza dover conoscere le soluzioni dell'equazioni di moto per tutti i dati iniziali di un certo intorno del punto di equilibrio? Una risposta è data dall'importantissimo

**Teorema 1 (di Dirichlet)** *Per Lagrangiane naturali (indipendenti dal tempo), i punti  $\mathbf{q}_o$  di minimo per il potenziale  $V(\mathbf{q})$ , sono punti di equilibrio stabile.*

Una idea intuitiva della dimostrazione è la seguente: considero l'energia  $E(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + V(\mathbf{q})$ , e le superfici  $\Sigma_h$  di energia costante  $E(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = h$ . Per  $h_{min} = V(\mathbf{q}_o)$  la superficie  $\Sigma_{h_{min}}$  si riduce al solo punto  $(\mathbf{q}_o, 0)$  (essendo l'energia cinetica sempre non negativa). Per  $h_{min} < h < h_o$  con  $h_o$  abbastanza piccolo, queste superfici (almeno localmente) delimitano degli intorni aperti del punto  $(\mathbf{q}_o, 0)$  che sono invarianti per l'evoluzione (l'energia è una costante del moto). Ora se fisso un  $\varepsilon > 0$ , trovo (per continuità) una energia  $h'$  tale che  $\Sigma_{h'}$  è contenuta interamente nell'intorno di raggio  $\varepsilon$  del punto  $(\mathbf{q}_o, 0)$ . Ora non resta che trovare un intorno di raggio  $\delta$  contenuto interamente all'interno della superficie  $\Sigma_{h'}$  per avere la dimostrazione.

Nel seguito ci limiteremo a considerare lagrangiane naturali indipendenti dal tempo, proponendoci di studiare le equazioni di Lagrange (7.2.2) nell'intorno della posizione di equilibrio.

**Esercizio 2. (Due masse mobili sulla retta).** Siano dati due punti mobili  $P_1$  e  $P_2$  di egual massa  $m$  liberi di muoversi su di una retta orizzontale, interagenti tra di loro (vedi figura 7.6) mediante una molla. Inoltre il punto  $P_1$  è soggetto all'azione di una seconda molla il cui secondo estremo  $O$  è fisso, così come  $P_2$  è soggetto all'azione di una ulteriore molla il cui altro estremo  $Q$  è parimenti fisso. Tutte le molle hanno lunghezza a riposo trascurabile, e hanno il medesimo valore  $k$  della costante elastica. Studiare i punti di equilibrio del sistema.

**Soluzione.** Prendiamo come coordinate lagrangiane  $q_1$  e  $q_2$  rispettivamente le distanze di  $P_1$  e  $P_2$  da  $O$ . Allora, indicata con  $l$  la lunghezza del segmento  $OQ$ , il potenziale sarà dato da

$$V(q_1, q_2) = \frac{k}{2}(\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2Q}^2) = \frac{k}{2}(q_1^2 + (q_2 - q_1)^2 + (l - q_2)^2) .$$

I punti di equilibrio saranno i punti stazionari del potenziale, cioè le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \partial_{q_1} V &= k(2q_1 - q_2) = 0 \\ \partial_{q_2} V &= k(2q_2 - q_1 - l) = 0 . \end{aligned}$$

Si controlla facilmente che l'unica soluzione è  $q_1 = l/3$  ed  $q_2 = 2l/3$ , cioè, come era prevedibile, all'equilibrio i punti sono equispaziati. Poiché il potenziale corrisponde a un paraboloide che diverge a  $+\infty$  per grandi valori di  $q_1$  e  $q_2$ , allora è evidente che il punto di equilibrio è un minimo del potenziale, e dunque abbiamo a che fare con un punto di equilibrio stabile.

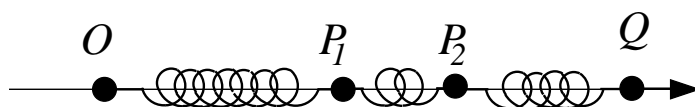


Figura 7.6: Due masse su di una retta.

Lo studio delle oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio si effettua agevolmente introducendo come coordinate quelle corrispondenti allo spostamento del sistema dalla posizione di equilibrio, definendo cioè  $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} q_1 - l/3$  ed  $x_2 = q_2 - 2l/3$ . Il potenziale diventa allora

$$V(x_1, x_2) = \frac{k}{2}((x_1+l/3)^2+(x_2-x_1+l/3)^2+(l/3-x_2)^2) = \frac{k}{2}(l^2/3+x_1^2+(x_2-x_1)^2+x_2^2).$$

Il potenziale non contiene termini lineari in  $x_1, x_2$ , ovviamente, in quanto stiamo facendo l'analogo dello sviluppo di Taylor attorno alla posizione di equilibrio, nel quale le derivate prime sono nulle. Trascurando il termine costante nel potenziale, la lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + x_2^2),$$

da cui si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= k(x_2 - 2x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= k(x_1 - 2x_2). \end{aligned}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali accoppiate, che si possono disaccoppiare ponendo  $r = x_1 - x_2$  ed  $x_b = x_1 + x_2$ . Infatti, sommando e sottraendo le due equazioni differenziali si ottiene

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_b &= -kx_b \\ m\ddot{r} &= -3kr, \end{aligned}$$

che mostra come le variabili  $x_b$  ed  $r$  si muovono di moto armonico con frequenze rispettivamente pari a  $\omega_1 = \sqrt{k/m}$  ed  $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$ . Le variabili in cui le equazioni del moto si disaccoppiano vengono dette **modi normali di vibrazione (o di oscillazione)**. La natura dei modi normali si capisce meglio se si esprimono le variabili  $x_1$  ed  $x_2$  in termini di  $r$  ed  $x_b$ . Si ottengono infatti le relazioni

$$x_1 = \frac{x_b + r}{2}, \quad x_2 = \frac{x_b - r}{2},$$

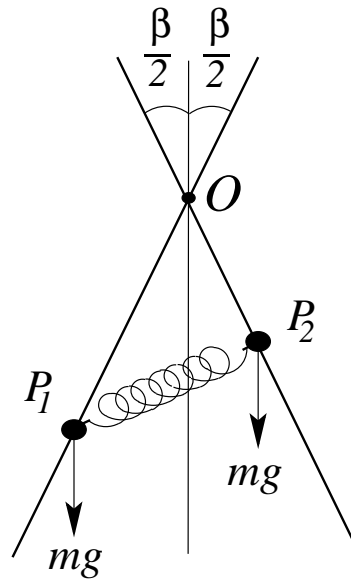


Figura 7.7: Due masse su rette distinte.

le quali mostrano come al modo normale  $x_b$  corrisponde un moto in fase dei punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , mentre al modo normale  $r$  corrisponde un moto in controfase dei punti materiali.

**Esercizio 3. (Masse mobili su rette distinte).** Siano dati due punti pesanti  $P_1$  e  $P_2$  di egual massa  $m$ , tra di loro interagenti (vedi figura 7.7) mediante una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica  $k$ . I punti sono vincolati a muoversi su due rette distinte giacenti in un piano verticale e formanti un angolo  $\beta$  tra di loro. Inoltre la bisettrice dell'angolo risulta verticale. Studiare i punti di equilibrio del sistema, ed il moto nell'intorno di questi.

**Soluzione.** Introduciamo come coordinate lagrangiane  $q_1$  e  $q_2$  le coordinate dei punti  $P_1$  e  $P_2$  sulle rette, avendo preso il punto  $O$  come origine di ambedue e orientandole verso l'alto.<sup>19</sup> Prendendo la quota di  $O$  come quota di riferimento per il potenziale gravitazionale, ed usando il teorema di Carnot per esprimere la distanza  $\overline{P_1P_2}^2$ , il potenziale del sistema diventa

$$V(q_1, q_2) = mgq_1 \cos \frac{\beta}{2} + mgq_2 \cos \frac{\beta}{2} + \frac{k}{2}(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1q_2 \cos \beta) .$$

<sup>19</sup>Per i punti in figura, le coordinate  $q_1$  e  $q_2$  avranno allora valori negativi.

Le posizioni di equilibrio sono le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned}\partial_{q_1} V &= mg \cos \frac{\beta}{2} + k(q_1 - q_2 \cos \beta) = 0 \\ \partial_{q_2} V &= mg \cos \frac{\beta}{2} + k(q_2 - q_1 \cos \beta) = 0 .\end{aligned}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni precedenti si ottiene

$$\begin{aligned}(q_1 + q_2)(1 - \cos \beta) &= -mg \cos \frac{\beta}{2} \\ q_1(1 + \cos \beta) - q_2(1 + \cos \beta) &= 0 ,\end{aligned}$$

che porgono, la seconda  $q_1 = q_2$ , e la prima

$$q_1 = -\frac{mg \cos \beta/2}{4 \sin^2 \beta/2} .$$

L'unico punto di equilibrio è evidentemente un punto di minimo del potenziale, per cui è un punto di equilibrio stabile.

Analogamente a quanto fatto nell'esercizio precedente, per studiare le oscillazioni attorno al punto di equilibrio, introduciamo nuove coordinate  $x_1$  ed  $x_2$  che misurano lo scarto rispetto alla posizione di equilibrio mediante le relazioni

$$x_1 = q_1 + \frac{mg \cos \beta/2}{4 \sin^2 \beta/2} , \quad x_2 = q_2 + \frac{mg \cos \beta/2}{4 \sin^2 \beta/2} .$$

Nelle nuove variabili il potenziale si scrive, trascurando al solito il termine costante, nel modo seguente

$$V(x_1, x_2) = \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \beta) ,$$

in cui, come già spiegato, non compaiono termini lineari in  $x_1$  o in  $x_2$ . Di conseguenza la lagrangiana si scrive come

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos \beta) ,$$

da cui si ottengono le seguenti equazioni del moto

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2 \cos \beta) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1 \cos \beta) .\end{aligned}$$

Questo sistema si può disaccoppiare ponendo, come nell'esercizio precedente,  $r = x_1 - x_2$  ed  $x_b = x_1 + x_2$ . Infatti, sommando e sottraendo le due equazioni differenziali si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_b &= -k(1 - \cos \beta)x_b \\ m\ddot{r} &= -k(1 + \cos \beta)r ,\end{aligned}$$

che mostra come le variabili  $x_b$  ed  $r$  si muovono di moto armonico semplice con frequenze rispettivamente pari a  $\omega_1 = \sqrt{k(1 - \cos \beta)/m}$  ed  $\omega_2 = \sqrt{k(1 + \cos \beta)/m}$ . Come nel caso precedente, al modo normale  $x_b$  corrisponde un moto in fase dei punti

$P_1$  e  $P_2$ , che oscillano entrambi prima verso l'alto e poi verso il basso. Invece, al modo normale  $r$  corrisponde un moto in controfase dei punti materiali, in cui uno sale mentre l'altro scende e viceversa.

Nei due esercizi precedenti ci siamo ricondotti ad equazioni differenziali lineari che si sanno risolvere analiticamente. Nei due esercizi seguenti, le equazioni sono non lineari e non si sanno risolvere esattamente. Si effettua allora l'approssimazione di **linearizzare** le equazioni del moto nell'intorno del punto di equilibrio, di fare cioè lo sviluppo di Taylor trascurando i resti di ordine maggiore al primo. Intuitivamente si può pensare che se partiamo sufficientemente vicino al punto di equilibrio, i termini di ordine superiore al primo siano trascurabili. Naturalmente una tale assunzione va giustificata, perché si stanno approssimando le **equazioni**, mentre ci interessano le approssimazioni delle **soluzioni**. La questione è molto complessa: diremo solo che per tempi non troppo lunghi una tale approssimazione è sufficiente. Questa approssimazione (studiare cioè il sistema linearizzato invece del sistema completo) viene detta approssimazione delle **piccole oscillazioni**. Lo studio sistematico verrà affrontato nel paragrafo 7.2.5, mentre nei due esercizi seguenti si mostrerà su esempi concreti che cosa succede. Il primo esempio, è il familiare pendolo matematico (o pendolo semplice); il secondo esempio concerne invece due pendoli eguali con un piccolo accoppiamento lineare, in cui verrà messo in luce il fenomeno della risonanza.

**Esercizio 4. (Punto pesante su di un cerchio).** Consideriamo un punto  $P$  pesante di massa  $m$  vincolato ad una circonferenza verticale di raggio  $l$  e centro  $O$ . Trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità.

**Soluzione.** Se indichiamo con  $\theta$  (vedi figura 7.8) l'angolo che il segmento  $\overline{OP}$  forma con la direzione verticale, allora la lagrangiana del problema sarà data da

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) ,$$

dove abbiamo indicato con  $g$  l'accelerazione di gravità, e si è preso la quota di riferimento del potenziale corrispondente al punto più basso. I punti di equilibrio  $\theta$  sono soluzione dell'equazione

$$\frac{d}{d\theta} \mathcal{L} = -mgl \sin \theta = 0 ,$$

che ha due soluzioni (fisicamente) distinte  $\theta_1 = 0$  e  $\theta_2 = \pi$ , cioè la posizione inferiore (corrispondente ad un minimo del potenziale) e la posizione superiore (corrispondente ad un massimo). Per il teorema di Dirichlet la posizione  $\theta_1 = 0$ , corrispondendo ad un minimo del potenziale, risulterà di equilibrio stabile. Come si muoverà il punto in un piccolo intorno di  $\theta_1 = 0$ ? Anticipando quanto si farà più sistematicamente nel paragrafo successivo, possiamo sviluppare il potenziale nell'intorno di 0 in serie di Taylor. Si avrà allora

$$mgl(1 - \cos \theta) \sim \frac{mgl}{2} \theta^2 ,$$

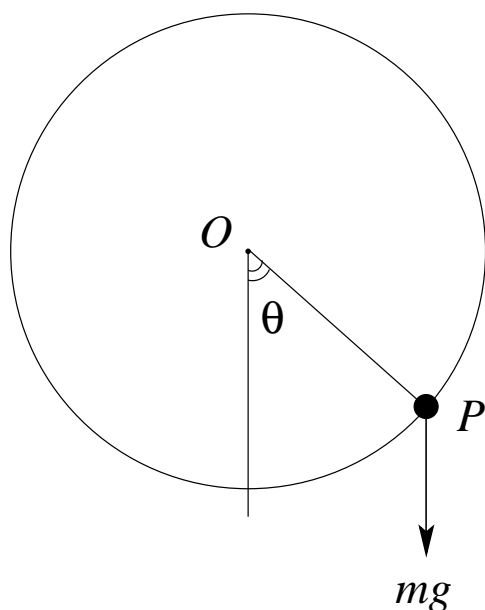


Figura 7.8: Punto vincolato su di una circonferenza verticale.

che corrisponderá alla lagrangiana approssimata

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2l}\theta^2,$$

avendo ommesso il fattore costante  $ml^2$ . Questa risulta la lagrangiana di un oscillatore armonico, la cui frequenza di oscillazione vale  $\omega^2 = g/l$ .

Per quanto riguarda la posizione superiore essa è un punto di massimo per il potenziale e dunque risulta instabile. Per convincersene, basta considerare l'energia nell'intorno del punto di equilibrio superiore. In termini dell'angolo  $\varphi = \theta - \pi$ , (dividendo ancora per il fattore costante  $ml^2$ ) essa è data da

$$E = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{2l}\varphi^2 + O(\varphi^4),$$

che mostra come le linee di livello dell'energia sono (prossime ad) iperboli di asintoti  $\dot{\varphi} = \pm(g/l)\varphi$ . Allora, anche se si parte prossimi quanto si vuole al punto di equilibrio, il punto, muovendosi lungo una curva ad energia costante uscirá da ogni intorno prefissato.

**Esercizio 5. (Due pedoli matematici identici, linearmente accoppiati).** In un piano verticale, consideriamo due punti pesanti  $P_1$  e  $P_2$  di equal massa  $m$  (vedi figura 7.9), vincolati in modo che le distanze  $\overline{O_1P_1}$  ed  $\overline{O_2P_2}$  risultino costanti ed eguali tra loro. I due punti interagiscono mediante una molla ideale elastica di lunghezza a riposo trascurabile. Trovare i punti di equilibrio e studiarne la stabilità. Studiare inoltre le piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio stabile.

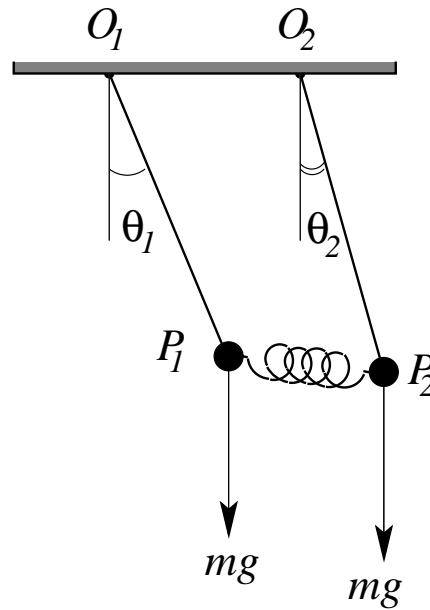


Figura 7.9: Pendoli matematici accoppiati.

**Soluzione.** L'energia cinetica del sistema si scrive senza difficoltà, e si trova

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2),$$

dove  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono gli angoli che i due segmenti  $\overline{O_1P_1}$  ed  $\overline{O_2P_2}$  formano con la verticale (presi come in figura 7.9), e si è posto  $l = O_1P_1 = O_2P_2$ . Il potenziale risulta invece alquanto più complicato, essendo dato dalla somma del potenziale della forza peso che ha la forma usuale, e del potenziale della molla che in questo caso ha una forma analitica complessa. Sicuramente però ha il minimo assoluto in  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  in quanto è minima sia l'energia potenziale gravitazionale (il baricentro del sistema è nel punto più basso possibile) sia l'energia della molla (in quanto l'allungamento è nullo)<sup>20</sup> Per il teorema di Dirichlet, questo punto risulterà allora di equilibrio stabile.

Per studiare le piccole oscillazioni, si tratta allora di sviluppare in serie di Taylor il potenziale nell'intorno del punto  $(0, 0)$  arrestandosi al secondo ordine. Per il potenziale della forza peso si ha

$$V_g(\theta_1, \theta_2) = mgl(1 - \cos \theta_1) + mgl(1 - \cos \theta_2) \simeq \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2).$$

Per quanto riguarda il potenziale elastico, per il calcolo dell'allungamento al primo ordine si può trascurare lo spostamento verticale degli estremi (che risulta del

<sup>20</sup>Ricordo che l'energia potenziale della molla vale  $1/2k(\Delta L)^2$  dove  $\Delta L$  è la variazione di lunghezza della molla rispetto alla lunghezza a riposo.

secondo ordine)<sup>21</sup> per cui vale semplicemente

$$\Delta L \simeq l |\sin \theta_1 - \sin \theta_2| \simeq l |\theta_1 - \theta_2| ,$$

da cui ottengo che lo sviluppo al secondo ordine del potenziale è dato da

$$V_{el} = \frac{kl^2}{2} (\theta_1 - \theta_2)^2 .$$

La lagrangiana diventa quindi, semplificando per il fattore  $ml^2$  la seguente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{\omega^2}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \varepsilon (\theta_1 - \theta_2)^2) ,$$

dove si è posto  $\omega = \sqrt{g/l}$  ed  $\varepsilon = kl/mg$ . La quantità  $\varepsilon$  misura il rapporto tra l'intensità della forza peso e quello della forza elastica. E' interessante studiare il problema per  $\varepsilon \ll 1$  che corrisponde al caso della cosiddetta "risonanza". Infatti per  $\varepsilon = 0$ , cioè se la molla è assente, il problema si riduce a due pendoli identici disaccoppiati, per cui questi oscilleranno con la medesima frequenza. Un accoppiamento, per quanto piccolo, produrrà un grosso effetto: mostreremo infatti che l'energia può passare totalmente da un oscillatore all'altro, in quanti esistono degli stati in cui oscilla uno solo dei pendoli mentre l'altro è fermo, mentre dopo un certo tempo il primo si ferma e comincia ad oscillare il secondo.<sup>22</sup>

Le soluzioni delle equazioni del moto si trovano semplicemente mediante un cambiamento di variabile. Si riesce infatti a disaccoppiare il problema tramite il cambiamento di variabile seguente

$$\chi = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\sqrt{2}} , \quad \xi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{2}} \tag{7.2.4}$$

Infatti un semplice calcolo mostra che

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = \chi^2 + \xi^2 , \quad \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 = \dot{\chi}^2 + \dot{\xi}^2 ,$$

per cui nelle nuove variabili la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\xi}^2 - \omega^2 \xi^2) + \frac{1}{2} (\dot{\chi}^2 - \omega^2 (1 + \varepsilon) \chi^2) ,$$

<sup>21</sup>A scanso di equivoci, detto  $d = O_1 O_2$ , l'allungamento si deve calcolare in questo modo: la distanza  $P_1 P_2$  è data da

$$P_1 P_2 = \sqrt{(d + l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 + (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1)^2} ,$$

per cui l'allungamento vale  $\Delta L = |P_1 P_2 - d|$ . Sviluppando i quadrati si arriva alla seguente espressione del potenziale

$$V_{el} = \frac{k}{2} (d - P_1 P_2)^2 = \frac{k}{2} \left( d - \sqrt{d^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + 4l^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1)/2} \right)^2 .$$

Per angoli piccoli, possiamo approssimare il seno con l'angolo per cui si ottiene

$$d^2 + 2dl(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) + 4l^2 \sin^2(\theta_2 - \theta_1)/2 \simeq d^2 + 2dl(\theta_2 - \theta_1) + l^2(\theta_2 - \theta_1)^2 = (d + l(\theta_2 - \theta_1))^2 .$$

Si ha dunque immediatamente che lo sviluppo di Taylor al secondo ordine risulta quello dato nel testo, in cui si è cercato di dare sinteticamente la ragione di tale risultato.

<sup>22</sup>Nel caso dell'acustica il fenomeno analogo viene detto battimento.

cioè la lagrangiana di due oscillatori indipendenti di frequenza rispettivamente pari ad  $\omega$  ed  $\omega_1 = \omega(1 + \varepsilon/2)$ . Le soluzioni sono le seguenti

$$\begin{aligned}\chi(t) &= A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \xi(t) &= A_2 \cos(\omega t + \phi_2),\end{aligned}$$

con opportune ampiezze  $A_1, A_2$  e fasi iniziali  $\phi_1, \phi_2$ . Consideriamo il caso molto significativo in cui le ampiezze  $A_1$  ed  $A_2$  sono eguali ad un valore comune, diciamo  $A\sqrt{2}$ . Dalla (7.2.4) si ha

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\xi + \chi}{\sqrt{2}} = A \left( \cos(\omega t + \phi) + \cos(\omega_1 t + \phi_2) \right) \\ \theta_2 &= \frac{\xi - \chi}{\sqrt{2}} = A \left( \cos(\omega t + \phi) - \cos(\omega_1 t + \phi_2) \right),\end{aligned}$$

ed applicando le formule di prostaferesi si ottiene

$$\begin{aligned}\theta_1 &= A \cos \left( \frac{\omega - \omega_1}{2} t + \frac{\phi - \phi_2}{2} \right) \cos \left( \frac{\omega + \omega_1}{2} t + \frac{\phi + \phi_2}{2} \right) \\ \theta_2 &= A \sin \left( \frac{\omega - \omega_1}{2} t + \frac{\phi - \phi_2}{2} \right) \sin \left( \frac{\omega + \omega_1}{2} t + \frac{\phi + \phi_2}{2} \right).\end{aligned}$$

La struttura della soluzione è dunque quella di una oscillazione sinusoidale con frequenza  $(\omega + \omega_1)/2$  (cioè essenzialmente  $\omega$ ) ma con ampiezza che varia lentamente, essendo una funzione di  $(\omega_1 - \omega)t = \varepsilon t/2$ . Supponiamo che sia  $t$  tale che

$$\frac{\omega - \omega_1}{2} t + \frac{\phi - \phi_2}{2} = 0 \quad \text{mod } 2\pi.$$

Allora l'ampiezza di oscillazione di  $\theta_2$  è nulla, perciò sta oscillando solamente il primo pendolo. Tale situazione permane per un tempo di ordine  $1/\varepsilon$ , in quanto l'ampiezza varia lentamente. Però dopo un tempo sufficientemente lungo si avrà

$$\frac{\omega - \omega_1}{2} t + \frac{\phi - \phi_2}{2} \simeq \frac{\pi}{2} \quad \text{mod } 2\pi,$$

perciù adesso sarà nulla l'ampiezza di oscillazione di  $\theta_1$ , cioè stara oscillando solo il secondo pendolo. Si avrà dunque un completo passaggio dell'energia dal primo pendolo al secondo. Naturalmente, dopo un tempo convenientemente lungo, si ritornerà alla situazione iniziale in cui oscilla solo il primo pendolo. Nel caso di risonanza dunque, l'energia del sistema viene suddivisa tra i vari oscillatori, e non può essere bloccata in un sottosistema.

Per quanto riguarda l'esistenza di altri possibili punti di equilibrio, notiamo che il potenziale è periodico, perciò si può limitare lo studio dello stesso all'insieme  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Questo insieme è compatto, perciò il potenziale assume sia il suo valore minimo (nel punto  $(0, 0)$ , come abbiamo detto) che il suo valore massimo. Tale punto di massimo sarà un altro punto di equilibrio, sebbene instabile. La presenza di ulteriori punti di equilibrio dipende dal valore della costante elastica  $k$  della molla. Ad esempio se  $k = 0$ , la posizione con i pendoli verticali nella posizione superiore, rappresenta una posizione di equilibrio nonché il massimo del potenziale. Tale posizione rimane un punto di equilibrio (instabile) per ogni valore di  $k$ , ma non necessariamente il massimo per grandi valori della costante elastica.<sup>23</sup>

<sup>23</sup>Tale posizione rappresenta un massimo per il potenziale gravitazionale, ma un minimo per il potenziale elastico. Per grandi valori di  $k$ , il massimo si raggiungerà per posizioni prossime alle posizioni in cui l'energia elastica ha un massimo, cioè  $\theta_1 = -\pi/2$  e  $\theta_2 = \pi/2$ .

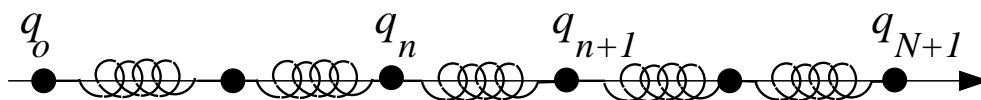


Figura 7.10: Schematizzazione di una catene lineare di particelle interagente a primi vicini.

### 7.2.4 Catena lineare di punti

In questo paragrafo consideriamo il caso di una catena di  $N + 2$  particella identiche vincolate a muoversi lungo una retta, in cui ogni coppia di particelle adiacenti interagisca mediante un medesimo potenziale  $V(r)$ ,  $r$  essendo la distanza tra le due particelle adiacenti (vedi figura 7.10). Supponiamo inoltre che la prima e l'ultima particella siano fisse, cioè, indicando con  $q_i$  la posizione della  $i$ -esima particella, si abbia  $q_0(t) = 0$  e  $q_{N+1}(t) = L$ ,  $\forall t$ .

Mentre gli esempi della sezione precedente erano di natura essenzialmente didattica, questo modello ha una notevole rilevanza teorica: infatti, da una parte, fu il primo in cui si ottenne (Lagrange, 1759) una teoria dei mezzi continui (la corda vibrante) mediante un passaggio al limite ed una rinormalizzazione. Dall'altro è il più semplice modello di solido cristallino, in cui molte proprietà generali possono essere studiate in maniera semplice. Infine, a partire dal lavoro di Fermi, Pasta ed Ulam del 1954, tale modello è stato usato come paradigma per comprendere le proprietà di rilassamento all'equilibrio termodinamico dei sistemi a molti gradi di libertà, campo di ricerca che risulta tuttora molto attivo.

La lagrangiana del sistema si scriverà dunque nel modo seguente

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^N \dot{q}_k^2 + \sum_{k=0}^N V(q_{k+1} - q_k) \quad q_0 = 0, \quad q_{N+1} = L .$$

Si deve notare che la sommatoria nell'energia cinetica si effettua solamente sulle particelle che si muovono (ovviamente), mentre nel potenziale la sommatoria descrive anche l'interazione con le particelle estreme, fisse. I punti

di equilibrio si trovano allora risolvendo il sistema

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = V'(q_i - q_{i-1}) - V'(q_{i+1} - q_i) = 0 \quad i = 1, \dots, N .$$

Notiamo che, derivando rispetto a  $q_i$  la lagrangiana, si trovano due termini perché nel potenziale la variabile  $q_i$  compare nella sommatoria sia quando  $k = i$  che quando  $k = i - 1$ .

Una soluzione di questo sistema si trova immediatamente ponendo  $q_i - q_{i-1} = a \forall i$ , essendo  $a$  una costante. Questa costante deve poi essere determinata dalla condizione che le particelle estreme hanno posizione fissate, cioè dalla condizione  $L = q_{N+1} - q_o = \sum q_{i+1} - q_i$  da cui segue  $a = L/(N+1)$ . Le particelle sono dunque equispaziate e le forze mutue si fanno equilibrio. Naturalmente nulla esclude che, in dipendenza della forma particolare del potenziale, possano esistere altri punti di equilibrio; noi nel seguito ci limitiamo a studiare il caso generale. Introduciamo dunque gli spostamenti  $x_i$  dalle posizioni di equilibrio, definiti da  $q_i = ia + x_i$ , con  $x_o = x_{N+1} = 0$ , e sviluppiamo il potenziale in polinomi di Taylor al secondo ordine

$$V(q_i - q_{i-1}) = V(a + (x_i - x_{i-1})) = V(a) + V'(a)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2}V''(a)(x_i - x_{i-1})^2 .$$

Sostituendo questo sviluppo nella Lagrangiana di partenza si otterrà la Lagrangiana linearizzata seguente (con abuso di linguaggio chiameremo lagrangiana linearizzata la Lagrangiana quadeatica, che conduce alle equazioni linearizzate)

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^N \dot{x}_k^2 + \frac{V''(a)}{2} \sum_{k=0}^N (x_{k+1} - x_k)^2 \quad x_o = 0, \quad x_{N+1} = L , \quad (7.2.5)$$

dove si è ommesso il termine costante  $(N+1)V(a)$ , e si verifica facilmente che i termine lineari in  $x_k - x_{k-1}$  si sommano a zero. Supponiamo che  $V''(a)$  sia positivo e definiamo  $\Omega^2 \stackrel{\text{def}}{=} V''(a)/m$  (notiamo che  $\Omega$  ha le dimensioni di una frequenza); allora le equazioni di moto linearizzate, che si ricavano dalla lagrangiana (7.2.5), si scrivono nel modo seguente

$$\ddot{x}_j = \Omega^2(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) . \quad (7.2.6)$$

Come si vede otteniamo un sistema di equazioni differenziali lineari accoppiate. Per disaccoppiarle bisognerà passare a coordinate opportune, i cosiddetti modi normali di oscillazione, come abbiamo fatto nella sezione precedente. In questo caso però la determinazione delle coordinate risulta più complessa. Cominciamo col determinare i modi normali, cioè soluzioni nella forma  $x_j(t) = \alpha(t)u_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) dove sia la funzione  $\alpha(t)$  sia le costanti  $u_j$  sono da determinarsi opportunamente. Questa soluzione particolare (che vedremo esistere) corrisponde dunque ad una situazione in cui,

ad ogni tempo, la catena ha una certa forma (descritta dalla successione  $u_j$  ( $j = 1, \dots, N$ )) avente una certa ampiezza  $\alpha$  che cambia allo scorrere del tempo. Procedendo come nel caso della corda vibrante, si dimostra in maniera semplice (la dimostrazione è riportata nel prossimo paragrafo, in connessione con lo studio del caso generale) che la ampiezza  $\alpha(t)$  compie un moto armonico semplice di frequenza  $\omega$  opportuna, ovvero  $\alpha(t)$  soddisfa all'equazione differenziale dell'oscillatore armonico  $\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha$ . Noi comunque, per semplicità di discussione, in questo paragrafo procediamo assumendo senz'altro che una soluzione di tale tipo esista, come in effetti poi verificheremo. Classicamente, quando si introduce una precisa forma tentativa per la soluzione, si usa dire che si introduce un *ansatz*. Introduciamo dunque tale *ansatz* nelle equazioni linearizzate di moto. Semplificando per  $\alpha$ , si trova che  $\omega$  e  $u_j$  sono determinate dal sistema lineare seguente

$$-\omega^2 u_j - \Omega^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

e tutto allora è ridotto a mostrare che tale sistema abbia soluzioni non nulle. Ora la via usuale consiste nell'imporre che il determinante del sistema sia nullo, e di ricavare il valore di  $\omega$  risolvendo l'equazione secolare (vedi la sezione successiva), ma questa appare difficilmente praticabile nel presente caso, in quanto bisognerebbe calcolarsi un determinante di ordine  $N$  e risolvere quindi un'equazione algebrica di ordine alto.

Per aggirare il problema cominciamo ad osservare che, dividendo per  $\Omega^2$ , il sistema lineare si riscrive nel modo seguente:

$$u_{j+1} - \left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) u_j + u_{j-1} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (7.2.7)$$

In questa forma appare chiaro che, conoscendo  $u_0$  ed  $u_1$  si può calcolare  $u_2$  prendendo  $j = 1$ , e poi di seguito  $u_3$  prendendo  $j = 2$ ,  $u_4$  con  $j = 3$ , e così via. Ne risulta una successione  $\{u_j\}$  definita *per ricorrenza* anche per valori  $j > N$ . Naturalmente la successione dipende dal parametro  $\omega$  e dai valori iniziali scelti; una soluzione del nostro problema si otterrà se la successione  $\{u_j\}$  verificherà le due ulteriori condizioni  $u_0 = 0$  e  $u_{N+1} = 0$  che determineranno, come vedremo, i valori possibili di  $\omega$ . La semplificazione del problema viene dal fatto che si può dare un'espressione chiusa per la successione  $\{u_j\}$ , per valori generici di  $\omega$ ,  $u_0$  ed  $u_1$ . Infatti se poniamo l'*ansatz*  $u_j = C \exp(i\gamma j)$  (con  $i = \sqrt{-1}$ ), sostituendo nella (7.2.7) e dividendo per  $C \exp(i\gamma j)$ , troviamo

$$e^{i\gamma} - \left(2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right) + e^{-i\gamma} = 0,$$

sicché  $\gamma$  risulta determinata dall'equazione

$$2 \cos \gamma = 2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}. \quad (7.2.8)$$

Per ogni valore di  $\omega$  (purché sia  $\omega^2/\Omega^2 < 2$ ), questa equazione ha come soluzioni due valori opposti di  $\gamma$  (come ci si doveva aspettare perché la ricorrenza (7.2.7) è reale) e quindi  $u_j$  si può scrivere genericamente come  $u_j = C_1 e^{i\gamma j} + C_2 e^{-i\gamma j}$  oppure in forma reale

$$u_j = A \cos(\gamma j) + B \sin(\gamma j) .$$

Imponendo ora le ulteriori condizioni al bordo (*boundary conditions*)  $u_0 = 0$ ,  $u_{N+1} = 0$ , dalla prima condizione si ricava  $A = 0$ , mentre dalla seconda si ottiene

$$\sin(N+1)\gamma = 0 ,$$

da cui si ricava che i valori ammessi di  $\gamma$  sono

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{N+1} .$$

Non è difficile controllare che si ottengono successioni differenti solo per  $k = 1, \dots, N$ , e corrispondentemente, usando la relazione (7.2.8), si troveranno  $N$  distinti valori per le frequenze  $\omega_k$ . Infatti, sostituendovi l'espressione appena trovata per  $\gamma$ , si ottiene la relazione

$$2 \cos \frac{\pi k}{N+1} = 2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}$$

che dà, dopo alcune manipolazioni trigonometriche, le frequenze ammissibili

$$\omega_k = 2\Omega \sin \left( \frac{\pi k}{2(N+1)} \right) . \quad (7.2.9)$$

Corrispondentemente, per ogni  $k = 1, \dots, N$  si avrà un modo normale dato da

$$x_j^{(k)} = \alpha_k(t) \sin \left( \frac{\pi k j}{N+1} \right) ,$$

con  $\alpha_k(t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$ . Si vede dunque che ogni modo normale corrisponde ad un'onda stazionaria, in modo analogo a quanto succede per una corda vibrante (si veda il relativo Capitolo). Nel nostro caso, però, la relazione di dispersione (7.2.9) non è lineare come nel caso della corda (tranne che per i modi  $k$  con  $k \ll N$ , per i quali si può approssimare il seno con l'angolo), sicché la propagazione delle onde avviene con una distorsione del profilo della stessa.

Si può infine mostrare (lo faremo alla fine del prossimo paragrafo), che le ampiezze  $\alpha_k$  possono essere usate come coordinate lagrangiane per i punti del sistema, nel senso che, data una generica configurazione  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  dei punti del sistema,<sup>24</sup> si può scrivere

$$x_j = \sum_{k=1}^N \alpha_k \sin \left( \frac{\pi k j}{N+1} \right) ,$$

<sup>24</sup>Sempre con le condizioni al contorno  $x_0 = x_{N+1} = 0$ .

cioè come combinazione lineare di onde stazionarie. Si può infatti verificare che le  $\alpha_k$  sono date da

$$\alpha_k = \frac{2}{N+1} \sum_{j=1}^N x_j \sin\left(\frac{\pi k j}{N+1}\right), \quad (7.2.10)$$

e che in tali coordinate la lagrangiana si scrive come

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \frac{\dot{\alpha}_k^2 - \omega_k^2 \alpha_k^2}{2},$$

cioè come somma di oscillatori armonici indipendenti. Le coordinate  $\alpha_k$  sono dunque quelle che disaccoppiano il sistema (7.2.6). Ad esempio, se  $N = 2$ , si può facilmente vedere che  $\alpha_1$  corrisponde alla semisomma di  $x_1$  e di  $x_2$ , mentre  $\alpha_2$  corrisponde alla semidifferenza, in completo accordo con i risultati dell'esercizio 1 della sezione precedente, a cui ci si riconduce.

### 7.2.5 Studio dei Modi normali

Torniamo ora allo studio generale della (7.2.2) nell'intorno della posizione di equilibrio: cominciamo col porre  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_o + \mathbf{x}$  (e di conseguenza  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{x}}$ ), considerando quindi  $\mathbf{x}$  piccolo assieme alla velocità  $\dot{\mathbf{x}}$ <sup>25</sup>. In tal modo è plausibile che, facendo gli sviluppi di Taylor delle equazioni di moto ed arrestandosi all'ordine più basso, non si commetta un errore grande se si considerano le soluzioni del sistema ottenuto, in quanto i termini trascurati di ordine superiore risultano molto più piccoli (in genere quadratici) di quelli considerati. Questo procedimento si chiama linearizzazione delle equazioni nell'intorno di un punto di equilibrio. Con riferimento alla (7.2.2), le equazioni nelle nuove variabili  $\mathbf{x}$  si scrivono nel modo seguente

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_o + \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_k} \ddot{x}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_o + \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}_i \partial x_k} \dot{x}_k = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}_o + \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial x_i}.$$

Nel membro di sinistra i termini di ordine più basso si ottengono molto semplicemente valutando le derivate della Lagrangiana nel punto  $(\mathbf{q}_o, 0)$ . Invece lo sviluppo di Taylor del membro di destra diviene, ricordando che  $\partial_x \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0) = 0$  perché siamo nel punto di equilibrio,

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}_o + \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0)}{\partial x_i \partial \dot{x}_k} \dot{x}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0)}{\partial x_i \partial x_k} x_k + o(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Nel caso di sistemi naturali le derivate  $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial \dot{x}_k} \mathcal{L}(\mathbf{q}_o, 0)$  si annullano, per cui alla fine le equazioni del moto divengono, in forma vettoriale, le seguenti

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (7.2.11)$$

<sup>25</sup>La richiesta sulla velocità è ragionevole, in quanto se la velocità è grande, ci si aspetta che pure la posizione diventerà grande dopo un breve intervallo di tempo.

dove la matrice  $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_{\dot{x}_i \dot{x}_k}^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_0, 0)$  è semplicemente la matrice cinetica valutata nel punto di equilibrio  $\mathbf{q}_0$ , mentre la matrice  $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} -\partial_{x_i x_k}^2 \mathcal{L}(\mathbf{q}_0, 0)$  risulta essere la matrice hessiana del potenziale (sempre valutata in  $\mathbf{q}_0$ ). Si verifica facilmente che tali equazioni del moto sono deducibili dalla Lagrangiana seguente (detta con abuso di linguaggio linearizzata, anche se in realtà è quadratica nelle variabili  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ )

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \mathcal{A} \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x} \mathcal{B} \mathbf{x} .$$

Dunque il procedimento di linearizzazione si può compiere. invece che partendo dalle equazioni di moto, sviluppando il potenziale al secondo ordine, scrivendo quindi la Lagrangiana cosiddetta linearizzata, e le corrispondenti equazioni di Lagrange. L'equazione (7.2.11) mette in luce il vantaggio della procedura di linearizzazione, in quanto si ottengono equazioni lineari, che si sanno studiare completamente. Il problema consiste però nel fatto che si stanno approssimando *le equazioni* di moto, mentre si dovrebbero approssimare le *soluzioni* delle equazioni di moto. La discussione completa di questo problema ci porterebbe oltre i limiti di questo corso. Ci limitiamo a segnalare la circostanza che, se il punto di equilibrio è stabile, le soluzioni delle equazioni di partenza vengono approssimate in modo migliore e per tempi sempre più lunghi dalle soluzioni della (7.2.11), via via che i dati iniziali vengono scelti in intorno sempre più piccoli del punto di equilibrio.

Nel resto di questo paragrafo ci dedicheremo a studiare le soluzioni dell'equazione (7.2.11). Seguiremo la strategia seguente: cercheremo inizialmente delle soluzioni speciali di forma particolarmente semplice; la soluzione generale verrà poi determinata, usando il principio di sovrapposizione, come combinazione lineare di tali soluzioni particolari che, nel caso presentino carattere oscillatorio, vengono dette **modi normali di oscillazione**. Mostriamo poi che le soluzioni particolari trovate saranno sufficienti per costruire la soluzione generale.

Cominciamo dunque a cercare soluzioni della forma

$$\mathbf{x}(t) = \alpha(t) \mathbf{u} ,$$

cioè moti che nello spazio delle fasi appaiono come moti rettilinei lungo una retta per l'origine individuata dal vettore  $\mathbf{u}$ . Sostituendo in (7.2.11), troviamo che deve valere

$$\ddot{\alpha}(t) \mathcal{A} \mathbf{u} = -\alpha(t) \mathcal{B} \mathbf{u} ,$$

e, dopo aver diviso per  $\alpha(t)$ , troviamo

$$\frac{\ddot{\alpha}(t)}{\alpha(t)} \mathcal{A} \mathbf{u} = -\mathcal{B} \mathbf{u}$$

Ora, poiché il membro di destra non dipende dal tempo, non può dipendere dal tempo nemmeno il membro di sinistra, cioè devono valere le seguenti proprietà

1. Il rapporto  $\ddot{\alpha}/\alpha$  deve essere costante (indipendente dal tempo); in altri termini deve esistere una costante  $\lambda$  per cui si abbia  $\ddot{\alpha}/\alpha = \lambda$ . Se la costante  $\lambda$  fosse conosciuta, avrei ridotto il problema al moto monodimensionale

$$\ddot{\alpha} = \lambda \alpha . \quad (7.2.12)$$

2. Come conseguenza della (7.2.12), il vettore  $\mathbf{u}$  deve essere soluzione del sistema

$$\lambda \mathcal{A} \mathbf{u} = -\mathcal{B} \mathbf{u} , \quad (7.2.13)$$

con la medesima costante  $\lambda$  del punto precedente. Questa equazione può essere scritta nella forma equivalente<sup>26</sup>

$$\lambda \mathbf{u} = -\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} \mathbf{u} , \quad (7.2.14)$$

e questa si riconosce essere l'equazione agli autovalori per la matrice  $-\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$ .

Però la (7.2.13) può essere discussa evitando di fare alcun riferimento alla matrice inversa  $\mathcal{A}^{-1}$ . Infatti, riscritta la (7.2.13) nella forma

$$(\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B}) \mathbf{u} = 0 ,$$

vediamo che questa si riduce ad un sistema lineare omogeneo per le componenti di  $\mathbf{u}$ , la cui unica soluzione, nell'ipotesi che sia  $\det(\lambda \mathcal{A} - \mathcal{B}) \neq 0$ , è la soluzione nulla. Poiché stiamo cercando vettori non nulli, i valori di  $\lambda$  devono essere scelti in modo che valga

$$\det(\lambda \mathcal{A} + \mathcal{B}) = 0 . \quad (7.2.15)$$

La (7.2.15) viene chiamata *equazione secolare*, ed è una equazione algebrica nell'incognita  $\lambda$  di grado pari al numero gradi di libertà del sistema. Ad ogni radice  $\lambda_i$  corrisponde (almeno) una soluzione<sup>27</sup> non nulla  $\mathbf{u}_i$  della (7.2.13). Corrispondentemente, per ogni  $\lambda_i$ , si potrà trovare una soluzione  $\alpha_i(t)$  dell'equazione differenziale (7.2.12) e costruire quindi una soluzione particolare  $\mathbf{x}_i(t) = \alpha_i(t) \mathbf{u}_i$  delle equazioni (linearizzate) del moto.

In linea di principio, i valori  $\lambda_i$  potrebbero essere complessi, ma, grazie al fatto che  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono matrici simmetriche, risulta che tutte le soluzioni dell'equazione secolare sono reali. La dimostrazione è la seguente: essendo

<sup>26</sup>Ricordiamo che, essendo  $\mathcal{A}$  definita positiva, esiste  $\mathcal{A}^{-1}$ .

<sup>27</sup>In realtà, per ogni valore  $\lambda_i$ , vi è almeno una famiglia di soluzioni  $c \mathbf{u}_i$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Si può univocamente definire un membro di tale famiglia richiedendo che la soluzione abbia lunghezza unitaria.

l'equazione secolare reale, le radici appaiono in coppie  $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$  complesse coniugate. Otterrò dunque vettori  $\mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_i$  le cui componenti sono complesse coniugate le une delle altre. Ora considero la (7.2.13) scritta per  $\lambda_i$ , e la moltiplico scalarmente per  $\bar{\mathbf{u}}_i$  ottenendo

$$\lambda_i \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_i \rangle = \langle -\mathcal{B}\mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_i \rangle .$$

Poiché  $\mathcal{B}$  è simmetrica, essa coincide con la sua aggiunta, per cui ottengo

$$\langle -\mathcal{B}\mathbf{u}_i, \bar{\mathbf{u}}_i \rangle = \langle \mathbf{u}_i, -\mathcal{B}\bar{\mathbf{u}}_i \rangle = \bar{\lambda}_i \langle \mathbf{u}_i, \mathcal{A}\bar{\mathbf{u}}_i \rangle .$$

Poiché anche  $\mathcal{A}$  è simmetrica, le due formule precedenti mostrano che deve essere  $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$ , cioè le soluzioni sono reali come si è detto. La soluzione dell'equazione differenziale (7.2.12) presenta allora tre possibili casi

1. I<sup>0</sup> CASO:  $\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} -\omega_i^2 < 0$ .

L'equazione (7.2.12) si riduce a quella dell'oscillatore armonico, la cui soluzione generale è la seguente

$$\alpha_i(t) = a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t$$

essendo  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie legate ai dati iniziali nel modo usuale,  $a_i = \alpha_i(0)$  e  $b_i = \dot{\alpha}_i(0)/\omega_i$ .

2. II<sup>0</sup> CASO:  $\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \omega_i^2 > 0$ .

In questo caso l'equazione (7.2.12) corrisponde all'equazione del repulsore lineare, la cui soluzione generale è la seguente

$$\alpha_i(t) = c_i e^{\omega_i t} + d_i e^{-\omega_i t}$$

dove le costanti  $c_i$  e  $d_i$  sono legate ai dati iniziali dalle relazioni  $c_i = (\alpha_i(0) + \dot{\alpha}_i(0)/\omega_i)/2$  e  $d_i = (\alpha_i(0) - \dot{\alpha}_i(0)/\omega_i)/2$ .

3. III<sup>0</sup> CASO:  $\lambda_i = 0$ .

Il moto avviene a velocità costante, da cui

$$\alpha_i(t) = \dot{\alpha}_i(0)t + \alpha_i(0) .$$

In questo modo le soluzioni particolari risultano completamente determinate. Nel caso in cui tutte le soluzioni abbiano carattere oscillatorio, queste soluzioni particolari vengono dette *modi normali di oscillazione*. In particolare, se  $\mathbf{q}_o$  è un punto di minimo del potenziale (di modo che il punto sia di equilibrio stabile), allora tutte le soluzioni dell'equazione secolare sono negative, abbiamo cioè modi normali di oscillazione. Questo fatto si dimostra rapidamente osservando che vale

$$\lambda_i = - \frac{\langle \mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} ,$$

ottenuta da (7.2.13) moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{u}_i$ . In questo caso sia la matrice  $\mathcal{A}$  che la matrice  $\mathcal{B}$  sono definite positive, essendo  $\mathcal{B}$  la matrice hessiana in un punto di minimo, per cui abbiamo sia  $\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle \geq 0$  che  $\langle \mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle \geq 0$ , e dunque  $\lambda \leq 0$ .

Discorso esattamente opposto si ottiene nel caso in cui  $\mathbf{q}_o$  sia un punto di massimo, in quanto  $\mathcal{B}$  risulta definita negativa, pur cui tutti gli autovalori sono positivi,  $\lambda_i > 0$ . Si potrebbe dimostrare che la presenza di almeno un valore  $\lambda_i$  positivo implica che il punto  $\mathbf{q}_o$  sia instabile non solo per l'equazione linearizzata ma anche per l'equazione completa. Il lettore interessato è rimandato al testo ..... per una dimostrazione.

Mostriamo che le soluzioni particolari così determinate, sono sufficienti a determinare l'integrale generale, cioè a risolvere il problema di Cauchy. Vale infatti la proprietà seguente

**Proposizione 1** *I vettori  $\mathbf{u}_i$  formano una base di  $\mathbb{R}^n$ , essendo  $n$  il numero di gradi di libertà del sistema.*

Usando questa proprietà la soluzione del problema di Cauchy si effettua in questo modo: i dati iniziali  $\mathbf{x}_o$  e  $\dot{\mathbf{x}}_o$  vengono sviluppati sulla base  $\{\mathbf{u}_i\}$ , cioè si pone

$$\mathbf{x}_o = \sum_{i=1}^n \alpha_i^0 \mathbf{u}_i, \quad \dot{\mathbf{x}}_o = \sum_{i=1}^n \dot{\alpha}_i^0 \mathbf{u}_i;$$

l'equazione (7.2.15) viene quindi risolta prendendo come dati iniziali proprio i coefficienti di tale sviluppo, ponendo  $\alpha_i(0) = \alpha_i^0$  e  $\dot{\alpha}_i(0) = \dot{\alpha}_i^0$ . È del tutto evidente che la funzione  $\mathbf{x}(t) = \sum_i \alpha_i(t) \mathbf{u}_i$  è la soluzione cercata del problema di Cauchy. In particolare essa risulta espressa come sovrapposizione di moti *semplici*, cioè periodici, nel caso di modi normali. Ciononostante, come funzione del tempo tale soluzione non sarà in generale periodica, ma potrà avere un comportamento anche abbastanza complesso, specialmente se il sistema ha molti gradi di libertà.

La dimostrazione<sup>28</sup> che i vettori  $\mathbf{u}_i$  formano una base si fa agevolmente per induzione. Ricordiamo che gli  $\mathbf{u}_i$  sono gli autovettori della matrice  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ , per cui, essendo tutti gli autovalori reali, esiste almeno un autovettore, che noi indicheremo con  $\mathbf{u}_1$ . Consideriamo allora il piano  $\pi_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N : \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = 0\}$ . Tale piano è invariante per la matrice  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ . Infatti se  $\mathbf{v} \in \pi_1$  allora, ricordando che le matrici  $\mathcal{A}$  (e dunque anche le matrici  $\mathcal{A}^{-1}$ ) e  $\mathcal{B}$  sono simmetriche, si ottiene

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = \lambda_1 \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

<sup>28</sup>La necessità della dimostrazione non si pone ovviamente se tutti i  $\lambda_i$  sono distinti, come è il caso generale. Nel caso vi siano radici multiple dell'equazione secolare, potrebbe accadere, in linea di principio, che il numero di autovettori indipendenti sia minore della molteplicità della radice. Noi mostriamo che ciò non si verifica.

cioè  $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{v} \in \pi_1$ . Ci si può dunque restringere al sottospazio  $\pi_1$ , trovare in esso un nuovo autovettore  $\mathbf{u}_2$  (indipendente da  $\mathbf{u}_1$  perché ovviamente questo non appartiene a  $\pi_1$ ), costruire il sottospazio  $\pi_2 \in \pi_1 : \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = 0$ , verificare che anch'esso sia invariante ed iterare la procedura. Naturalmente la procedura terminerà dopo  $n$  passi, fornendo un insieme di autovettori  $\mathbf{u}_i$  per cui vale inoltre

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = \delta_{i,k} .$$

I vettori  $\mathbf{u}_i$  sono dunque ortonormali rispetto al prodotto scalare  $\langle \mathcal{A}\cdot, \cdot \rangle$  definito dalla matrice cinetica  $\mathcal{A}$ , che corrisponde poi all'usuale prodotto scalare dello spazio fisico. Poiché vale la relazione  $\mathcal{B}\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathcal{A}\mathbf{u}_i$ , i vettori  $\mathbf{u}_i$  sono ortogonali anche rispetto al prodotto scalare definito dalla matrice  $\mathcal{B}$ , vale cioè

$$\langle \mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = -\lambda_i\delta_{i,k} .$$

Le due relazioni appena scritte fanno capire l'utilità di usare come base i vettori  $\mathbf{u}_i$ , e come coordinate le componenti del vettore  $\mathbf{x}$  rispetto alla base scelta. Infatti, posto  $\mathbf{x} = \sum_i \alpha_i \mathbf{u}_i$ , se consideriamo i numeri  $\{\alpha_i\}$  come nuove coordinate lagrangiane, e corrispondentemente con  $\{\dot{\alpha}_i\}$  le velocità, la Lagrangiana diverrà

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{x}}\mathcal{A}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\mathcal{B}\mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_k \langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle - \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_i \alpha_k \langle \mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i^2 + \lambda_i \alpha_i^2 . \end{aligned}$$

Ricordando che nel caso dei modi normali abbiamo posto  $\lambda_i = -\omega_i^2$ , in definitiva la lagrangiana nelle nuove variabili risulterà la seguente

$$\mathcal{L}(\alpha_i, \dot{\alpha}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i^2 - \omega_i^2 \alpha_i^2 .$$

Dunque, usando come coordinate i modi normali la Lagrangiana diventa formalmente eguale alla Lagrangiana di un sistema di oscillatori armonici indipendenti.

Sfruttando le proprietà di ortogonalità dei vettori  $\mathbf{u}_i$ , infine, è immediato trovare i valori di  $\alpha_i$ : basta infatti proiettare  $\mathbf{x}$  sui vettori base, per cui si trova dunque

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathcal{A}\mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} .$$

Questa è proprio la formula (7.2.10) della sezione precedente, quando si usi la forma esplicita di vettori  $\mathbf{u}_i$ , si tenga conto che in quel caso  $\mathcal{A}$  è

semplicemente la matrice identità, e che  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = (N + 1)/2$  come un calcolo diretto mostra.<sup>29</sup>

---

<sup>29</sup>Infatti in questo caso la  $k$ -esima componente del vettore  $\mathbf{u}_i$ , è data da  $\sin(\pi ki)/(N+1)$ , per cui si ha

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = \sum_{k=1}^N \sin^2 \left( \frac{\pi ki}{N+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi ki}{N+1} \right) \right),$$

dove si è fatto uso della formula di duplicazione per il seno, e si è aggiunto il termine nullo di indice  $k = 0$  nella sommatoria. La somma dei coseni è evidentemente nulla, per cui si ha infine  $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = (N + 1)/2$ .

