

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA (TRIENNALE)



# I fondamenti della meccanica quantistica e il paradosso EPR

Relatore: Prof. Andrea Carati

Elaborato Finale di:  
Chiara Passoni  
matricola n. 689861

Anno Accademico 2007/2008

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Il paradosso EPR</b>	<b>5</b>
2.1	In cosa consiste il paradosso . . . . .	5
2.2	Introduzione del concetto di <i>Spin</i> . . . . .	8
2.3	Confronto Einstein-Bohm . . . . .	12
2.4	Conclusioni . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Le disuguaglianze di Bell</b>	<b>18</b>
3.1	“Sul paradosso Einstein-Podolsky-Rosen” . . . . .	18
3.2	“Teorema di Bell: la visione ingenua di uno sperimentale” . . . . .	22
3.3	Il teorema di Bell adattato all’esempio di Einstein . . . . .	29
<b>A</b>	<b>Teoria generale del momento angolare</b>	<b>35</b>
<b>B</b>	<b>Previsioni quantistiche</b>	<b>39</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Richiamando il titolo del celebre libro di Gamov <sup>1</sup>, si può affermare che in soli trent'anni la meccanica quantistica riuscì a sconvolgere la fisica. Nei primi anni del '900 infatti, con la graduale introduzione di questa nuova teoria, si è riscontrato un profondo mutamento nella visione che l'uomo aveva dell'universo. Fino alla fine dell'800 l'interpretazione dei fenomeni fisici macroscopici faceva riferimento alle leggi di Newton, che regolavano i fenomeni meccanici, acustici e termici, e a quelle di Maxwell, che regolavano i fenomeni elettrici, magnetici e ottici. Queste due grosse categorie di fenomeni fisici diedero origine ad una distinzione tra natura ondulatoria (o di campo della radiazione elettromagnetica) e natura corpuscolare della materia, ma all'inizio del secolo scorso i fisici si resero conto dell'esistenza di alcuni fenomeni che non era possibile inquadrare nella schema di leggi classiche e che invalidavano la distinzione fra campo e particella, tra cui in particolare la struttura degli atomi e le modalità di emissione e assorbimento di radiazioni da parte della materia. Nacque quindi l'esigenza di introdurre una teoria che, senza annullare i successi ottenuti con la fisica classica, ampliasse quest'ultima arrivando a spiegare anche quei fenomeni che rimanevano non compresi, ovvero che correggesse le approssimazioni della fisica classica superando quei limiti oltre i quali Newton e Maxwell non si erano mai spinti. Fu così che, a partire dai quanti di luce introdotti da Planck e dalle orbite quantiche di Bohr, fino ad arrivare al principio di indeterminazione di Heisenberg e alla teoria delle antiparticelle di Dirac, la meccanica quantistica si sviluppò impetuosamente e andò a toccare ogni campo della fisica teorica.

In sintesi (per quanto sia possibile sintetizzare un'intera teoria), potremmo dire che l'interpretazione della realtà secondo la teoria quantistica si basa principalmente sull'idea di poter associare ad ogni stato di un sistema fisico  $C$  un'opportuna funzione d'onda  $\Psi$ , che contenga tutte le informazioni sul sistema stesso. Della funzione  $\Psi$  noi conosciamo l'evoluzione temporale, data dall'equazione di Schrodinger, ma, al contrario di quello che si è sempre sup-

---

<sup>1</sup> *Thirty years that shook physics*, George Gamov, 1966 [7].

posto in meccanica classica, non si può pensare che un sistema possieda istante per istante una posizione o una velocità determinate, variabili in modo continuo. Nella meccanica quantistica si può parlare solo della probabilità di trovare, tramite un procedimento di misura, un determinato risultato nell'insieme dei risultati possibili. Infatti si ha che, ad ogni grandezza  $A$  è possibile associare un operatore *autoaggiunto*<sup>2</sup>  $\hat{A}$ , il cui spettro costituisce il campo dei valori possibili che la grandezza  $A$  può assumere, ad ognuno dei quali corrisponde uno stato del sistema, rappresentato dall'autostato relativo al valore considerato.

Lo stato di un sistema sul quale non sono state effettuate misurazioni è descritto da una funzione d'onda data dalla sovrapposizione di tutti gli stati possibili, ma nel momento in cui si vuole determinare il valore di una grandezza fisica tramite un procedimento di misura, questo perturba irreversibilmente il sistema facendolo precipitare nello stato relativo all'autovalore trovato. Noto come *postulato di precipitazione*, questo fenomeno porta alla formulazione del così detto *principio di indeterminazione*, secondo cui non è possibile associare a due grandezze *non compatibili*<sup>3</sup> un valore determinato in uno stesso istante.

La meccanica quantistica, così come tutte le sue applicazioni ai vari campi della fisica teorica, trova le sue fondamenta in questi principi, che sono stati tutti dedotti a partire dall'ipotesi di completezza della funzione d'onda, assunzione senza la quale crollerebbe l'intera visione quantistica dell'universo.

A mettere in discussione i risultati ottenuti in campo quantistico fu Albert Einstein, che nel 1935 scrisse, insieme ai colleghi B.Podolsky e N.Rosen, un articolo che sollevava un paradosso insito nella teoria quantistica (il noto paradosso EPR, che prende il nome dai tre autori e che fu poi ripreso e rianalizzato da Bohm in modo più semplice e intuitivo). L'articolo dimostrava sostanzialmente l'incompletezza della funzione d'onda, sulla base di ipotesi che secondo Einstein, Podolsky e Rosen potevano considerarsi talmente evidenti e naturali da essere "ovvie" e indiscutibili. Le polemiche che ne seguirono furono molteplici, soprattutto quelle che contestavano le ipotesi assunte alla base della dimostrazione, e il paradosso diventò uno dei principali temi di discussione in campo fisico, dal quale presero vita due correnti di pensiero opposte: la prima, che faceva capo alla scuola di Copenhagen, sosteneva una visione probabilistica e indeterminata della realtà e riteneva che il paradosso fosse fondato su ipotesi non coerenti con questa interpretazione; la seconda, invece, ispirandosi alle conclusioni tratte

---

<sup>2</sup>Un operatore  $\hat{A}$  è detto *autoaggiunto* se è simmetrico (cioè tale che  $\hat{A} = \hat{A}^T$  e quindi  $\langle \hat{A}u, v \rangle = \langle u, \hat{A}v \rangle$ ) e se il suo dominio coincide con il dominio di  $\hat{A}^T$ . Da questo segue un teorema che dimostra che ogni operatore autoaggiunto possiede un sistema completo di autovettori ortogonali e i corrispondenti autovalori sono reali.

<sup>3</sup>Due grandezze fisiche A e B si dicono *compatibili* se e solo se i corrispondenti operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  *commutano*, cioè se e solo se  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$ .

dal paradosso EPR, era convinta dell'incompletezza della meccanica quantistica e sosteneva quindi che questa dovesse essere completata con l'introduzione di parametri aggiuntivi che spiegassero le strane correlazioni che, come emergeva dalla dimostrazione EPR, sembravano sussistere fra sistemi distanti. È proprio da questa seconda corrente di pensiero che nascono le così dette *teorie a variabili nascoste*, di cui furono sostenitori gli stessi Einstein, Podolsky e Rosen. I fautori di tali teorie vedono nell'aggiunta dei parametri supplementari un duplice vantaggio: non solo la possibilità di completare la teoria quantistica trovando quindi una risposta al paradosso, ma anche la speranza di riportare la realtà ad un livello deterministico, come se l'incompletezza della teoria fosse l'indeterminismo stesso, dovuto al fatto che la meccanica quantistica non tiene conto dei gradi di libertà aggiuntivi.

La prima svolta in questo campo la si deve a Bell, che dimostrò tramite la sua celebre disuguaglianza, l'incompatibilità e l'incoerenza fra meccanica quantistica e teorie a variabili nascoste, concludendo che non possono essere l'una il completamento dell'altra. Analizzando le ipotesi assunte, Bell individua la causa del conflitto nell'ipotesi di località, secondo cui sistemi distanti non possono interagire, ed afferma quindi che, affinché una teoria a variabili nascoste possa essere accettata come completamento della teoria quantistica, allora essa deve necessariamente essere *non* locale.

In seguito alla dimostrazione di Bell si idearono numerosi esperimenti (tra i quali i più completi sono quelli di Aspect), volti a verificare l'esistenza di un reale conflitto tra le due teorie. Le numerose conferme sperimentali della meccanica quantistica infatti non erano sufficienti a discriminare fra le due teorie perché il conflitto nasceva dalla correlazione tra i valori assunti da grandezze non compatibili in punti distanti tra loro, e tali correlazioni non sono usualmente oggetto di indagine sperimentale. Per tale motivo fu necessario costruire degli esperimenti apposta per andare a "sondare" queste aree critiche. Il verdetto sperimentale confermò la teoria quantistica, escludendo quindi l'ipotesi delle variabili nascoste e lasciando irrisolto il paradosso EPR.

In questa trattazione ci occuperemo della rivisitazione dei passi cruciali di tutto il dibattito, con l'analisi dettagliata dei lavori dei suoi principali esponenti, il confronto fra i diversi procedimenti che conducono alle medesime conclusioni, l'approfondimento di alcune dimostrazioni e l'interpretazione fisica dei risultati ottenuti. Non ci siamo soffermati in modo particolare sui singoli passaggi di ogni dimostrazione, privilegiando invece la visione d'insieme al fine di comprendere meglio lo sviluppo dell'intero dibattito, caratterizzato da un continuo susseguirsi di contraddizioni e polemiche, obiezioni e conferme, verifiche e smentite, che alla fine, paradossalmente, riportarono tutto al punto di partenza.

## Capitolo 2

# Il paradosso EPR

### 2.1 In cosa consiste il paradosso

L'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen del 1935 (il paradosso prende proprio il nome dalle iniziali degli autori) vuole dimostrare la non completezza della funzione d'onda, intesa come descrizione della realtà. A tal fine gli autori danno le seguenti definizioni di completezza di teoria fisica e realtà di una grandezza osservabile.

**Definizione 1 (Condizione di completezza di una teoria)** *Una teoria fisica viene detta completa se ciascun elemento della realtà fisica ha una controparte nella teoria.*

**Definizione 2 (Condizione di realtà di una grandezza fisica)** *Una grandezza fisica viene detta reale se è possibile prevederne con certezza il valore senza perturbare il sistema a cui si riferisce.*

Stabiliti questi concetti di base, Einstein, Podolsky e Rosen procedono con un discorso generale che mette in luce il paradosso, partendo proprio dai presupposti della teoria quantistica.

In particolare, riveste un ruolo fondamentale il *principio di indeterminazione*, senza il quale la meccanica quantistica non esisterebbe. Lo enunciamo qui di seguito e lo riprenderemo più avanti nella discussione del paradosso.

**Teorema 1 (Principio di indeterminazione)** *Dato un sistema in uno stato  $\Psi$  e due osservabili,  $A$  e  $B$ , vale*

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \hbar |\langle \Psi[A, B]\Psi \rangle|$$

dove  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  sono le incertezze sulla misura del valore di  $A$  e di  $B$  nello stato  $\Psi$  del sistema.

Dal principio di indeterminazione, si ha che, date due grandezze fisiche A e B, tra loro non compatibili, la conoscenza precisa di una preclude la conoscenza precisa dell'altra. Infatti qualunque tentativo di determinare una grandezza con una misura altera lo stato del sistema in maniera tale che il valore dell'altra grandezza risulta indeterminato. Se si misura successivamente il valore della seconda grandezza, allora il valore della prima cambia, a meno che le due grandezze siano compatibili. In sintesi, il principio afferma che due grandezze fisiche non compatibili non possono avere entrambe valori prevedibili.

Assumendo vera questa affermazione, si arriva a due possibili conseguenze:

1. la descrizione quantistica della realtà, fornita dalla funzione d'onda, è incompleta.
2. quando gli operatori non commutano, le corrispondenti grandezze fisiche non possono essere simultaneamente reali (secondo la definizione 2).

Si può facilmente dimostrare che deve essere per forza vera una delle due conclusioni, perché non esistono altre situazioni possibili.

Infatti, se supponiamo per assurdo che siano false entrambe, possiamo considerare due grandezze fisiche A, B non compatibili che abbiano realtà simultanea (negazione di 2). Allora, per la condizione di realtà, entrambe le grandezze dovrebbero avere valori definiti, che, in base alla condizione di completezza, rientrerebbero nella descrizione completa della realtà. Ma allora, se la funzione d'onda fosse in grado di fornire questa descrizione completa della realtà (negazione di 1), essa conterrebbe tali valori, i quali sarebbero pertanto prevedibili. Questo però ci porta ad un assurdo, poiché contraddice il principio di indeterminazione (Teorema 1), e quindi i fondamenti della meccanica quantistica.

Così si dimostra che le due conclusioni illustrate, sono complementari: se si assume falsa la prima, deve essere vera la seconda, e viceversa.

Supponendo che la funzione d'onda sia completa (negazione di 1), si deduce però che è possibile avere due grandezze fisiche simultaneamente reali nonostante i rispettivi operatori non commutino (negazione di 2), il che sarebbe assurdo.

Per dedurre tale assurdo, Einstein, Podolsky e Rosen costruiscono il seguente ragionamento:

Consideriamo due sistemi I e II (che possono essere corpi puntiformi, corpi rigidi, o qualunque altro generico sistema fisico), descritti rispettivamente dalle variabili  $x_1$  e  $x_2$ , e supponiamo che essi interagiscano dall'istante  $t=0$  all'istante  $t=T$ . Poiché gli stati dei due sistemi prima della loro interazione sono noti, è possibile descrivere, tramite la funzione d'onda  $\Psi$ , lo stato del

sistema composto  $I+II$  per ogni tempo  $t$ , e quindi anche per  $t > T$ , nonostante, dopo l'interazione, non sia più possibile ricavare lo stato di  $I$  o di  $II$ .

Consideriamo ora la grandezza fisica  $A$ , relativa al sistema I, che avrà autovalori  $a_1, a_2, a_3, \dots$  e autofunzioni  $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \dots$ .

La funzione d'onda  $\Psi$ , ad un tempo  $t > T$  fissato, potrà quindi essere espressa nella forma:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1) \quad (2.1)$$

Misuriamo il valore di  $A$  e supponiamo che assuma il valore  $a_k$ . Secondo il *postulato di precipitazione*, dopo una misura, lo stato del sistema è dato da  $\Psi' = P\Psi$ , dove  $P$  è l'operatore di proiezione sull'autospazio relativo all'autovalore trovato. Dato che il sistema  $I$  precipita nello stato descritto dalla funzione d'onda  $u_k(x_1)$ , si ottiene di conseguenza:

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi_k(x_2) u_k(x_1) \quad (2.2)$$

Poiché per sistemi formati da sottosistemi indipendenti, la funzione d'onda è il prodotto delle funzioni d'onda dei singoli sottosistemi, dalla (2.2) si deduce che, dopo la misura, anche il secondo sistema precipita in uno stato definito, che è quello descritto dalla funzione d'onda  $\psi_k(x_2)$ .

Successivamente consideriamo un'altra grandezza fisica  $B$ , sempre relativa al sistema I, con autovalori  $b_1, b_2, b_3, \dots$  e autofunzioni  $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \dots$ .

In questo modo, al posto dello sviluppo (2.1), possiamo scrivere:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x_2) v_m(x_1) \quad (2.3)$$

Analogamente a quanto fatto prima, misuriamo  $B$  e supponiamo che assuma il valore  $b_j$ , allora il sistema  $I$  precipita nello stato descritto dalla funzione d'onda  $v_j(x_1)$  e di conseguenza si ottiene:

$$\Psi(x_1, x_2) = \varphi_j(x_2) v_j(x_1) \quad (2.4)$$

da cui si deduce che il sistema  $II$  precipita nello stato descritto dalla funzione d'onda  $\varphi_j(x_2)$ .

Osserviamo che, in seguito a due misure diverse sul primo sistema, il secondo sistema può precipitare in due stati diversi:  $\psi_k(x_2)$  e  $\varphi_j(x_2)$  e, poiché i due sistemi, I e II, non interagiscono più, le misure effettuate su uno non alterano lo stato dell'altro.



Si conclude, dunque, che è possibile assegnare due diverse funzioni d'onda  $\psi_k$  e  $\varphi_j$  alla stessa realtà. Quindi, se si riuscisse a far coincidere le due funzioni con le autofunzioni di due operatori che non commutano, relativi a due grandezze fisiche  $P$  e  $Q$ , non compatibili, che assumono rispettivamente i valori  $p_k$  e  $q_h$ , allora avremmo automaticamente dimostrato che le due grandezze sono simultaneamente reali (negazione di 2), che è esattamente quello che volevamo.

Per dimostrare quanto detto sono possibili diverse strade.

Einstein, Podolsky e Rosen scelgono di interpretare i due sistemi come due particelle e si servono di due osservabili non compatibili legate al movimento: la posizione  $x$  e il momento lineare  $p$ .

Bohm (1957), invece, vede i due sistemi come i due atomi di una molecola biatomica di spin totale 0, e utilizza come grandezze fisiche non compatibili le componenti dello spin di ogni atomo.

Prima di passare ad analizzare i due diversi procedimenti è però necessario fare una piccola parentesi sul concetto di *spin*: cos'è, da dove è stato dedotto e come ci si lavora.

## 2.2 Introduzione del concetto di *Spin*

I postulati della meccanica quantistica e la teoria di Schrödinger come semplice applicazione del principio di corrispondenza non bastano a spiegare alcune proprietà di atomi complessi (nonostante le correzioni relativistiche). Tali teorie infatti traducono nel formalismo della meccanica quantistica l'idealizzazione della particella come punto materiale dotato di tre gradi di libertà e quindi individuato da tre coordinate; ma dall'effetto Zeeman anomalo<sup>1</sup> emerge il fatto nuovo che il numero di livelli energetici di certi atomi è più elevato del massimo compatibile con la teoria, precisamente il doppio.

Nasce quindi la necessità di apportare alcune modifiche al concetto di particella puntiforme. La più significativa è proprio l'introduzione dello *spin*, che ha origine da una diversa visione della struttura delle particelle atomiche. Infatti, se concepiamo l'elettrone come corpo rigido, allora esso dovrebbe possedere tre gradi di libertà aggiuntivi. Quindi, oltre al solito moto traslazionale, l'elettrone sarebbe dotato di un moto interno da cui hanno origine un *momento magnetico intrinseco* e un *momento angolare intrinseco*. Quest'ultimo è quello che viene chiamato più comunemente *spin*.

---

<sup>1</sup>Fenomeno secondo cui le righe dello spettro di emissione di una sostanza allo stato atomico si scompongono in più componenti ravvicinate quando sulla sostanza emittente si fa agire un campo magnetico di intensità sufficiente. È definito *anomalo* quando non può essere spiegato nell'ambito di modelli classici.

Per rendere più chiaro il concetto, è possibile ricavare il concetto di spin a partire dal momento angolare orbitale  $\mathbf{L}$ . Sappiamo infatti che gli operatori associati alle componenti del momento angolare  $\mathbf{L}$  devono rispettare le seguenti regole di commutazione:

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar\varepsilon_{jkl}\hat{L}_l \quad e \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_j] = 0 \quad (2.5)$$

dove

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

Viceversa, ci chiediamo se, dato  $\mathbf{L}$  con queste proprietà, è possibile scrivere

$$\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$$

cioè se, a partire dalle proprietà illustrate, si ottiene il momento angolare orbitale così come lo conosciamo, dato dal prodotto vettoriale di posizione e momento.

Nel calcolare i possibili valori di  $L^2$  (da cui poi si ricava  $L$ ) si trovano però il doppio degli autovalori previsti, cioè:

$$L^2 = \hbar l(l+1) \quad \text{con } l \in \mathbb{N}$$

come dovrebbe essere per il momento angolare orbitale, ma anche

$$L^2 = \hbar s(s+1) \quad \text{con } s = n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Se ne deduce quindi l'esistenza di un "nuovo" momento angolare che rispetta le leggi di commutazione del momento angolare orbitale e che, come quest'ultimo, possiede uno spettro discreto di autovalori, con l'unica differenza che, anziché variare in  $\mathbb{N}$ , sono seminteri.<sup>2</sup>

Questo "nuovo" momento angolare è proprio lo *spin*, detto anche *momento angolare intrinseco*.

Vista l'analogia tra il comportamento dei due momenti angolari, è facile intuire che le regole di quantizzazione per lo spin saranno analoghe a quelle che usiamo per il momento angolare orbitale. Infatti, se a quest'ultimo associamo un operatore  $\hat{L}$ , sappiamo che esso rispetta le regole di commutazione (2.5), ovvero che le componenti del momento angolare sono tra loro incompatibili, ma ognuna di esse è compatibile con il quadrato del modulo ( $L^2$ ), il che significa, per definizione di compatibilità, che esiste un sistema di autofunzioni comuni a  $\hat{L}^2$  e ad una qualsiasi delle tre componenti del momento angolare  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ . Consideriamo, ad esempio,  $L^2$  e  $L_z$ , con i rispettivi operatori; le due equazioni agli autovalori saranno del tipo:

---

<sup>2</sup>Vedi Appendice A.

$$\hat{L}^2 \varphi_{lm} = \lambda_l \varphi_{lm} \quad e \quad \hat{L}_z \varphi_{lm} = \lambda_m \varphi_{lm}$$

da cui si ricavano gli autovalori  $\lambda_l$  e  $\lambda_m$ , che saranno rispettivamente della forma:

$$\hbar l(l+1) \quad \text{con } l \in \mathbb{N}$$

e

$$\hbar m \quad \text{con } m \in [-l; +l]$$

Quindi, se si fissa un valore di  $l \in \mathbb{N}$ , ci si riduce ad uno spazio finito dimensionale in cui  $L_z$  può assumere  $2l+1$  valori:  $l\hbar, (l-1)\hbar, \dots, -l\hbar$ . In questo spazio finito dimensionale gli operatori associati alle componenti del momento angolare  $\hat{L}_j$  si possono rappresentare come matrici e le autofunzioni corrispondenti come autovettori.

Il momento angolare intrinseco si comporta in modo analogo. Infatti, come abbiamo già anticipato, esso rispetta le stesse regole di commutazione del momento angolare orbitale (2.5), che per lo spin diventano:

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar \varepsilon_{jkl} \hat{S}_l \quad e \quad [\hat{S}^2, \hat{S}_j] = 0 \quad (2.6)$$

dove

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

Seguendo lo stesso identico procedimento usato per  $\mathbf{L}$ , è possibile calcolare gli autovalori per  $\hat{S}^2$  e  $\hat{S}_z$  (così come per qualunque altra componente), ottenendo rispettivamente:

$$\hbar s(s+1) \quad \text{con } s = n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$\hbar r \quad \text{con } r \in [-s; +s]$$

Quindi, se si fissa un valore di  $s = n + \frac{1}{2}$  con  $n \in \mathbb{N}$ , ci si riduce ad uno spazio finito dimensionale in cui  $S_z$  può assumere  $2s+1$  valori:  $s\hbar, (s-1)\hbar, \dots, -s\hbar$ . In questo spazio finito dimensionale gli operatori associati alle componenti dello spin  $\hat{S}_j$  si possono rappresentare come matrici e le autofunzioni corrispondenti come autovettori.

Questo significa che ogni livello energetico per l'elettrone può essere potenzialmente scisso in  $2s+1$  livelli distinti, il che spiega le anomalie

illustrate a inizio paragrafo.

Ora che abbiamo introdotto lo spin con le sue regole di quantizzazione, vogliamo studiarne le proprietà e le possibili applicazioni.

Innanzitutto consideriamo una particella dotata di spin; verrà naturale descrivere tale particella come un sistema le cui osservabili fondamentali sono, oltre alle tre componenti della posizione  $(x, y, z)$  e del momento lineare  $(p_x, p_y, p_z)$ , che è naturale considerare, altre tre osservabili  $S_x, S_y, S_z$ , componenti del vettore spin  $\mathbf{S}$ .

Tali osservabili saranno caratterizzate dalle regole di commutazione degli operatori ad esse associati. In particolare, per gli operatori di posizione  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  e di momento lineare  $(\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$  si avranno le relazioni seguenti:

$$[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \quad e \quad [\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i \hbar \delta_{jk} \quad (2.7)$$

il cui significato fisico è che le componenti di entrambe le grandezze commutano tra loro, mentre ogni componente dell'una è incompatibile con ogni componente dell'altra.

Viceversa, per quanto riguarda le componenti dello spin, sappiamo che sono incompatibili tra loro (come emerge dalle (2.6)), mentre commutano, invece, con ogni componente della posizione e del momento. In breve possiamo scrivere:

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i \hbar \varepsilon_{jkl} \hat{S}_l \quad e \quad [\hat{x}_j, \hat{S}_k] = [\hat{p}_j, \hat{S}_k] = 0 \quad (2.8)$$

Ad ogni particella dotata di spin sarà quindi associato un sistema di operatori  $\hat{x}_k, \hat{p}_k, \hat{S}_k$  che ubbidiscono alle regole di commutazione illustrate; ogni altra grandezza sarà pensata come funzione di questi operatori fondamentali, determinati completamente tramite le regole di commutazione appena illustrate.

Da quanto abbiamo detto, è chiaro che lo spin può essere considerato una vera e propria caratteristica della particella, e, proprio per la sua dipendenza da proprietà intrinseche di quest'ultima, esso può essere ritenuto una grandezza al pari della massa e della carica. Oggi infatti si attribuisce un momento angolare intrinseco a tutte le particelle elementari, tra le quali, quella che più ci interessa (per i nostri scopi) è l'elettrone.

Vediamo cosa succede in questo caso. Dall'effetto Zeeman anomalo, come si è detto, emerge che il numero di livelli energetici di certi atomi è esattamente il doppio di quello previsto. Per l'elettrone dovremo quindi porre

$$2s + 1 = 2$$

da cui segue  $s = \frac{1}{2}$ .

Si avranno quindi due valori possibili per ogni componente di  $\mathbf{S}$ :  $+\frac{\hbar}{2}$  e  $-\frac{\hbar}{2}$ ; di conseguenza, gli operatori  $\hat{S}_x$ ,  $\hat{S}_y$ ,  $\hat{S}_z$  e le loro autofunzioni (riportati qui sotto) assumeranno rispettivamente la forma di matrici quadrate  $2 \times 2$  e di vettori 2-dimensionali.

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Autovettori:} \quad \Psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Autovettori:} \quad \Psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Autovettori:} \quad \Psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vale la pena di sottolineare che le matrici  $S_x, S_y, S_z$  sono tutte della forma  $S_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$ , dove  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  sono dette *matrici di Pauli*. Per semplificare i conti spesso utilizzeremo al posto delle matrici  $S_i$  le matrici di Pauli  $\sigma_i$ , che, poiché differiscono dalle prime solo per un fattore costante  $\frac{\hbar}{2}$ , hanno autovalori  $\pm 1$  e autovettori uguali a quelli delle matrici  $S_i$ .

Questi “oggetti” ci torneranno utili più avanti per capire il ragionamento che Bohm ha seguito per illustrare il paradosso EPR.

## 2.3 Confronto Einstein-Bohm

L'idea di Einstein, Podolsky e Rosen, come già accennato, è quella di far corrispondere le due funzioni di stato  $\psi_k$  e  $\varphi_h$  alle autofunzioni degli operatori *posizione* e *momento*, relative a determinati autovalori  $x$  e  $p$ .

A tal fine, consideriamo i due sistemi generici, di cui si parla sopra, come due corpi puntiformi, e supponiamo che la funzione d'onda del sistema complessivo sia:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp \quad (2.9)$$

Ora, se prendiamo come grandezza fisica  $A$  l'osservabile *momento lineare*  $P$ , a cui associamo l'operatore  $\hat{P}$  della forma

$$\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

e misuriamo tale grandezza sulla particella  $I$ , questa assumerà un valore  $\bar{p}$  e di conseguenza la particella precipiterà nello stato dato dall'autofunzione

$$u_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar} x_1 \bar{p}}$$

Poiché la funzione d'onda dell'intero sistema è

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\bar{p}}(x_2) u_{\bar{p}}(x_1) dp \quad (2.10)$$

la proiezione su  $u_{\bar{p}}(x_1)$  darà ovviamente

$$\psi_{\bar{p}}(x_2) = e^{-\frac{i}{\hbar}(x_2-x_0)\bar{p}}$$

che non è altro che l'autofunzione dell'operatore  $\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_2}$  relativa all'autovalore  $-\bar{p}$  del momento della seconda particella.

Analogamente, se prendiamo come grandezza fisica  $B$  l'osservabile *posizione*  $Q$ , a cui associamo l'operatore  $\hat{Q}$  di moltiplicazione per  $x$ , e la misuriamo sulla particella  $I$ , questa assumerà un valore  $x$  e di conseguenza la particella precipiterà nello stato dato dall'autofunzione

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x)$$

dove  $\delta$  è la nota *delta di Dirac*.

Poiché la funzione d'onda dell'intero sistema si può scrivere formalmente

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x_2+x_0)p} dp \quad (2.11)$$

allora si ha evidentemente

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_2+x_0)p} dp = \delta(x - x_2 + x_0)$$

che non è altro che l'autofunzione dell'operatore  $\hat{Q} = x_2$  relativa all'autovalore  $x + x_0$  della posizione della seconda particella.

È facile verificare che i due operatori  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  non commutano, cioè che le osservabili corrispondenti non sono compatibili, e con questo si conclude la dimostrazione di Einstein, Podolsky e Rosen, che sono così riusciti a riportare le due funzioni d'onda  $\psi_k$  e  $\varphi_h$  a quelle di due grandezze non compatibili.

Il procedimento seguito da Bohm, come già anticipato, fa uso del momento angolare intrinseco; di conseguenza, i calcoli saranno evidentemente più immediati in quanto, lavorando con gli spin, gli operatori diventano delle matrici e le autofunzioni dei vettori, riducendo il tutto ad un semplice calcolo matriciale. Dal punto di vista concettuale, però, il ragionamento è equivalente a quello appena discusso.

Bohm considera una molecola biatomica, i cui atomi ( $I$  e  $II$ ) sono i due sistemi presi in considerazione. Essi interagiscono tra di loro per un certo

periodo di tempo e poi vengono separati; da quel momento in poi qualunque non vi più alcuna interazione.

Anche in questo caso possiamo definire la funzione d'onda del sistema composto, pur non conoscendo le funzioni che descrivono lo stato dei singoli atomi presi separatamente; tale funzione sarà

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_+(I) \Psi_-(II) - \Psi_-(I) \Psi_+(II)] \quad (2.12)$$

dove  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  è il fattore di normalizzazione e  $\Psi_{\pm}(I)$ ,  $\Psi_{\pm}(II)$  sono i vettori che rappresentano la funzione d'onda dello stato atomico in cui le particelle  $I$ ,  $II$  hanno spin  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , sono cioè gli autovettori delle particelle  $I$ ,  $II$ , relativi all'autovalore  $\pm \frac{\hbar}{2}$ .<sup>3</sup>

Sia durante l'interazione che dopo la separazione degli atomi, questa funzione descrive lo stato del sistema come sovrapposizione dei possibili stati atomici:

$$\Psi_+(I) \Psi_-(II) \quad \text{e} \quad \Psi_-(I) \Psi_+(II)$$

Come abbiamo visto, infatti, lo spin di una particella atomica può assumere solo due valori:  $+\frac{\hbar}{2}$  o  $-\frac{\hbar}{2}$ , e, per la conservazione del momento angolare, se uno dei due atomi assume valore positivo, l'altro sarà sicuramente negativo, in modo da garantire che lo spin totale sia sempre nullo.

Data la descrizione del modello proposto da Bohm, è evidente che le grandezze da misurare sono proprio due delle tre componenti dello spin di uno dei due atomi, che, come abbiamo visto precedentemente, sono tra loro incompatibili, cioè i relativi operatori non commutano.

Ad esempio, se prendiamo come grandezza fisica  $A$  la componente  $S_x$  dello spin di  $I$  e la misuriamo, otterremo due possibili valori:  $+\frac{\hbar}{2}$  o  $-\frac{\hbar}{2}$ .

Nel primo caso l'atomo  $I$  precipita nello stato dato da

$$\Psi_+(I) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovettore dell'operatore  $\hat{S}_x$ , relativo al valore assunto.

Quindi, per la conservazione del momento angolare, sarà per forza

$$\Psi = \Psi_+(I) \Psi_-(II)$$

da cui si deduce anche lo stato del secondo atomo, che avrà funzione d'onda data da

$$\Psi_-(II) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

---

<sup>3</sup>Ci si riferisce sempre ad una componente dello spin assegnato. Tradizionalmente si considera la componente  $S_z$ , e per questo si dice comunemente *spin up* (verso l'alto) nel caso di autovalore  $+\frac{\hbar}{2}$  e *spin down* (verso il basso) per l'autovalore  $-\frac{\hbar}{2}$ .

autovettore dell'operatore  $\hat{S}_x$ , relativo all'autovalore  $-\frac{\hbar}{2}$  dello spin dell'atomo  $II$ .

Nel secondo caso è tutto analogo, ma con autovalori e autovettori invertiti per i due atomi.

Se poi prendiamo come grandezza fisica  $B$  la componente  $S_z$  dello spin di  $I$  e la misuriamo, otterremo gli stessi due possibili valori del caso precedente.

Se tale osservabile assume valore  $+\frac{\hbar}{2}$ , l'atomo  $I$  precipita nello stato dato da

$$\Psi_+(I) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

autovettore dell'operatore  $\hat{S}_z$ , relativo al valore assunto. Quindi lo stato del sistema complessivo sarà

$$\Psi = \Psi_+(I)\Psi_-(II)$$

da cui si ha lo stato del secondo atomo, che avrà funzione d'onda data da

$$\Psi_-(II) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

autovettore dell'operatore  $\hat{S}_z$ , relativo all'autovalore  $-\frac{\hbar}{2}$  dello spin dell'atomo  $II$ .

Anche in questo caso, quando la misura dell'osservabile assume il secondo dei due valori possibili, è tutto analogo, ma con autovettori e autovalori invertiti per i due atomi.

In questo modo Bohm dimostra che le due grandezze generiche  $A$  e  $B$  sono riconducibili a due osservabili (nell'esempio illustrato:  $S_x$  e  $S_z$ ), i cui operatori non commutano, e quindi che le due funzioni d'onda, chiamate da Einstein  $\psi_k$  e  $\varphi_h$ , rappresentano due stati di realtà simultanea per tali operatori relativi al secondo atomo (nell'esempio:  $\Psi_{+/-}(II)$  per la componente  $S_x$  e  $\Psi_{+/-}(II)$  per la componente  $S_z$ ).

Il risultato è analogo a quello ottenuto da Einstein, Podolsky e Rosen, e i procedimenti seguiti sono equivalenti. Entrambi, infatti, partono con il considerare una coppia di grandezze non compatibili (che per Bohm sono due delle tre componenti dello spin, mentre per Einstein, Podolsky e Rosen sono la posizione e il momento lineare) e misurano successivamente tali osservabili sul primo dei due sistemi considerati (che per Bohm rappresentano i due atomi di una molecola biatomica, mentre per Einstein, Podolsky e Rosen sono due particelle in movimento). Il calcolo con il quale si arriva a determinare il valore delle osservabili prese in considerazione sul secondo sistema è diverso a seconda delle grandezze in gioco (nel caso di Bohm è un



semplice calcolo di autovettori di una matrice, mentre per Einstein, Podolsky e Rosen è di natura più analitica), ma in entrambi i casi si arriva a dimostrare che, misurando tali grandezze sul primo dei due sistemi, si riesce a determinarne il valore anche sul secondo sistema, senza però alterarne lo stato; ovvero, entrambi dimostrano che le funzioni di stato  $\psi_k$  e  $\varphi_h$  possono coincidere con le autofunzioni di due operatori che non commutano, relativi a due grandezze fisiche non compatibili.

## 2.4 Conclusioni

Il paradosso EPR mette in luce un'incongruenza insita nella teoria quantistica, partendo dall'assunzione di due principi apparentemente "scontati":

**Principio di realtà** : Si verifica quando, senza perturbare il sistema, è possibile prevedere con certezza il valore di una grandezza fisica, a cui corrisponde quindi una proprietà oggettiva del sistema, indipendente dall'osservatore.

**Principio di località** : Si verifica quando, dati due sistemi fisici che non interagiscono per un certo intervallo di tempo, l'evoluzione di ognuno dei due, in tale periodo, non sono influenzate da operazioni eseguite sull'altro sistema.

Assumendo queste due ipotesi, come abbiamo visto, si giunge inequivocabilmente ad affermare l'incompletezza della funzione d'onda. Infatti, i due principi enunciati, aggiunti all'ipotesi di completezza della meccanica quantistica, portano ad una conclusione paradossale. Perché si risolva il paradosso è quindi necessario che cada una delle tre assunzioni, che, secondo Einstein, Podolsky e Rosen non può che essere la completezza della meccanica quantistica. Infatti, essi concludono che la descrizione quantica della realtà, fornita dalla funzione d'onda, non può considerarsi completa, in quanto risulta essere incoerente con i principi assunti. In realtà il punto debole della loro dimostrazione sta proprio nell'assumere come scontate le ipotesi di base. Verrebbe infatti naturale obiettare che questi due principi non sono così evidenti e che, anzi, sarebbe corretto metterli in discussione prima di saltare a qualunque conclusione. Comunque, a prescindere da ogni obiezione mossa successivamente, le conclusioni raggiunte dai tre fautori del determinismo, sollevano una discussione che ancora oggi è oggetto di accesi dibattiti. Alla luce del paradosso, diventa infatti inevitabile domandarsi *se* la teoria quantistica può essere completata e, in tal caso, *come* la si può completare. A queste domande lo stesso Einstein risponde proponendo la possibile esistenza di una *teoria a variabili nascoste*, che preveda l'introduzione di parametri aggiuntivi col fine di fornire, tramite una sottostruttura più fondamentale, una spiegazione alle dinamiche di determinazione degli stati quantistici per

sistemi isolati. Questa nuova teoria avrebbe, qualora fosse possibile implementare tale programma, il duplice vantaggio di fornire una soluzione al paradosso, e in più di recuperare una visione deterministica del mondo, in cui ad ogni grandezza è possibile associare un valore, ovvero un corrispondente elemento di realtà. L'indeterminismo quantistico è infatti considerato la caratteristica "debole" dell'omonima teoria, ed è proprio per questo motivo che la soluzione proposta da Einstein merita di essere presa in considerazione, nella speranza di riuscire a trovare una nuova teoria (o un semplice completamento della già affermata teoria quantistica) che cancelli questa limitazione.

Una possibile formulazione matematica della teoria a variabili nascoste fu introdotta, nel 1964, da J.S.Bell, che, nonostante appoggiasse, durante tutto l'arco della sua esistenza, la visione del mondo proposta da Einstein, scoprì il suo famoso teorema con cui mette in luce il disaccordo delle previsioni quantistiche con quelle delle teorie realistiche cosiddette "locali".

Vediamo nel prossimo capitolo come si evolve la discussione grazie al contributo di Bell e al completamento della sua dimostrazione con le verifiche sperimentali proposte da A.Aspect.

## Capitolo 3

# Le disuguaglianze di Bell

### 3.1 “Sul paradosso Einstein-Podolsky-Rosen”

Come già anticipato alla fine del capitolo precedente, gli anni immediatamente successivi alla pubblicazione dell’articolo di Einstein, Podolsky e Rosen, furono caratterizzati da un acceso dibattito che vedeva da una parte i sostenitori del determinismo e quindi di una possibile interpretazione mediante una teoria a variabili nascoste locali <sup>1</sup>, e dall’altra invece i fautori dell’indeterminismo quantistico, che contestavano il paradosso EPR a partire proprio dalle ipotesi su cui era stato fondato. È proprio su questo scenario che spicca il lavoro di Bell del 1964 (vedi “*On Einstein-Podolsky-Rosen paradox*”, tratto da [5]), il quale mette in luce l’incompatibilità delle due teorie. Egli dimostra, tramite le sue famose disequazioni, che ogni possibile teoria a variabili nascoste, con la richiesta di località, è in contraddizione con le previsioni statistiche della meccanica quantistica, ovvero, che le due teorie non possono considerarsi l’una il completamento dell’altra, ma che vanno necessariamente poste su due piani diversi. In particolare vedremo che è possibile concludere che una corretta interpretazione a variabili nascoste della teoria quantistica elementare deve necessariamente essere non locale, altrimenti si genera un conflitto.

Innanzitutto, Bell si occupa di dare alla teoria di Einstein una forma matematica. Per farlo, si basa sulla riformulazione del paradosso invocata da Bohm, considerando quindi una coppia di particelle a spin  $\frac{1}{2}$ , il cui stato è dato dalla (2.12). Chiamato  $\sigma_1$  il vettore di spin della prima particella, e  $\sigma_2$  quello della seconda particella, è possibile misurare il valore di uno dei due vettori lungo la direzione data da un versore  $\mathbf{d}$  e osservare che, se la misura di  $\sigma_1 \cdot \mathbf{d}$  dà come risultato  $+1$ , allora secondo la meccanica quantistica  $\sigma_2 \cdot \mathbf{d}$

---

<sup>1</sup>Qui intendiamo, senza pretesa di rigore, l’aggettivo “locale” nel senso di Einstein, secondo cui sistemi distanti non interagiscono e si comportano come se fossero indipendenti. Una definizione più formale sarà data più avanti, quando discuteremo il teorema di Bell.

dovrà assumere valore -1. Il paradosso, di cui abbiamo già abbondantemente discusso, sta nel fatto che, nonostante il principio di indeterminazione della teoria quantistica sostenga che la funzione d'onda non possa determinare il risultato di una misurazione individuale, qui si scopre, misurando  $\sigma_1 \cdot \mathbf{d}$ , che il risultato di  $\sigma_2 \cdot \mathbf{d}$  è in realtà predeterminato. Questo dà modo di pensare che debbano essere introdotte delle nuove variabili che rappresentino alcune proprietà intrinseche ad ogni coppia di particelle considerata e che non siano messe in evidenza dalla funzione d'onda proprio perché differenti da coppia a coppia. Questi parametri aggiuntivi sono le cosiddette *variabili nascoste*, che Bell indica con la lettera  $\lambda$ .

Ovviamente i risultati delle misurazioni dovranno dipendere anche da questi parametri; nel caso specifico di cui si parla sopra, quindi, date due direzioni generiche  $\mathbf{d}_1$  e  $\mathbf{d}_2$  useremo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{d}_1, \lambda) &= \pm 1 && \text{risultato della misura di } \sigma_1 \text{ lungo la dir. } \mathbf{d}_1 \text{ (} \sigma_1 \cdot \mathbf{d}_1 \text{)} \\ B(\mathbf{d}_2, \lambda) &= \pm 1 && \text{risultato della misura di } \sigma_2 \text{ lungo la dir. } \mathbf{d}_2 \text{ (} \sigma_2 \cdot \mathbf{d}_2 \text{)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

in cui l'ipotesi di località sta nel fatto che A non dipende da  $\mathbf{d}_2$  e, viceversa, B non dipende da  $\mathbf{d}_1$ .

Supponendo di conoscere la distribuzione di probabilità  $\rho(\lambda)$ , grazie all'ipotesi di località, possiamo dire che, sotto l'introduzione dei nuovi parametri, il valore di aspettazione del prodotto dei risultati di  $\sigma_1$  misurato lungo  $\mathbf{d}_1$  ( $\sigma_1 \cdot \mathbf{d}_1$ ), e di  $\sigma_2$  misurato lungo  $\mathbf{d}_2$  ( $\sigma_2 \cdot \mathbf{d}_2$ ), si ottiene mediando la funzione prodotto sulla distribuzione di lambda, e sarà dato da:

$$P(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \int A(\mathbf{d}_1, \lambda) B(\mathbf{d}_2, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \quad (3.2)$$

Per poter affermare che la teoria a variabili nascoste rappresenta effettivamente il completamento della meccanica quantistica, dobbiamo dimostrare che essa sia completamente coerente con quest'ultima, e in particolare che il valore di aspettazione (3.2) si avvicini almeno approssimativamente alle previsioni quantomeccaniche, secondo cui <sup>2</sup>:

$$P(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \langle (\sigma_1 \cdot \mathbf{d}_1)(\sigma_2 \cdot \mathbf{d}_2) \rangle = -\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 \quad (3.3)$$

Bell arriva, suo malgrado, a dimostrare che le due espressioni non si equivalgono e che sono quindi mutuamente esclusive. L'idea della dimostrazione è la seguente:

Consideriamo tre vettori  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  in direzioni generiche. Tenendo conto dell'osservazione fatta prima, secondo la quale  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , misurati lungo la stessa direzione  $\mathbf{d}$ , danno risultati uguali ed opposti, avremo:

$$B(\mathbf{d}, \lambda) = -A(\mathbf{d}, \lambda) \quad \forall \mathbf{d} \text{ (in particolare anche per } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\text{)}.$$

---

<sup>2</sup>Vedi Appendice B.

Sostituendo nella definizione del valore di aspettazione (3.2) per ognuna delle tre combinazioni di  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , otteniamo le espressioni:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

$$P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = - \int A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda$$

Nella pratica è come se misurassimo sempre il valore del vettore di spin  $\sigma_1$  lungo tre direzioni diverse. Il risultato di  $\sigma_2$  può essere ricavato di conseguenza, tenendo presente che sarà uguale ed opposto a quello misurato. Dalla definizione dei valori di aspettazione segue

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \int A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1] \rho(\lambda) d\lambda$$

Infine, osservando che  $\forall \mathbf{d}$  (quindi in particolare anche per  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ )

$$-1 \leq A(\mathbf{d}, \lambda) \leq +1, \quad (3.4)$$

si ottiene la seguente disuguaglianza

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int [1 - A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda$$

da cui, riconoscendo l'espressione di  $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$  nel secondo termine a destra, si ricava la disuguaglianza

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (3.5)$$

che pone una condizione sui valori di aspettazione a variabili nascoste, calcolati lungo le tre direzioni considerate.

Supponiamo ora di fare più esperimenti ripetuti. I valori di  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  non risulteranno strettamente determinati ma giaceranno in coni di piccola apertura (poiché fisicamente le misure sono sempre affette da un certo errore). Per questo, al posto di (3.2) e (3.3) utilizzeremo le loro medie

$$\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \quad \text{e} \quad \overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

Se supponiamo che  $\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})}$  approssimi abbastanza bene i risultati della meccanica quantistica, cioè

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad |\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} + \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}| \leq \varepsilon$$

con  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo, allora, poiché evidentemente

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \quad |\overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \delta,$$

dalla (3.5) si ricava che

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 4(\varepsilon + \delta) \quad (3.6)$$

Questa disuguaglianza, però non è sempre verificata per piccoli valori di  $\varepsilon$  (come invece dovrebbe essere affinché i due valori di aspettazione (3.2), (3.3) siano approssimativamente uguali). Infatti, se consideriamo ad esempio la situazione particolare:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$  e  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , sostituendo nella (3.6) otteniamo

$$\sqrt{2} - 1 \leq 4(\varepsilon + \delta)$$

da cui si conclude che, per  $\delta$  piccoli,  $\varepsilon$  non può essere piccolo a piacere. Questo dimostra che la differenza dei due valori di aspettazione (3.2), (3.3) è necessariamente finita, e quindi che le due corrispondenti teorie non sono tra loro compatibili.

È possibile inoltre osservare che, con funzioni del tipo  $A(\lambda, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$  e  $B(\lambda, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ , la disuguaglianza (3.5) sarebbe violata. Quindi, potrebbe essere ragionevole mettere in discussione il principio di località, se non addirittura affermare che una teoria a parametri aggiuntivi che vuole in qualche modo dare un'interpretazione della meccanica quantistica elementare, deve necessariamente essere non locale, ovvero deve essere tale da permettere che ogni misurazione effettuata su un sistema influenzi le misurazioni effettuate su altri sistemi comunque distanti.

**Osservazione 1** *È importante sottolineare che Bell non esclude le teorie realistiche locali, ma semplicemente dimostra che queste sono in contraddizione con le previsioni quantistiche e quindi non possono essere considerate come il completamento della teoria quantomeccanica. Ammettere l'esistenza di variabili nascoste annulla automaticamente l'ipotesi di località, ma questo non vuol dire che non sia possibile in assoluto costruire un diverso modello di parametri aggiuntivi che risolva il paradosso e allo stesso tempo rispetti le previsioni della teoria quantistica.*

*Per il momento, il problema sollevato da Bell riguarda solo la necessità di scegliere l'una o l'altra teoria, oppure di rinunciare al concetto, tanto intuitivo e "scontato", di località, prezzo da pagare per consentire l'introduzione di una nuova teoria a variabili nascoste che sia perlomeno coerente con la meccanica quantistica.*

### 3.2 “Teorema di Bell: la visione ingenua di uno sperimentale”

Come abbiamo precisato alla fine della sezione precedente, dal teorema di Bell emerge che le teorie realistiche locali sono in disaccordo con la meccanica quantistica, ma nulla ci dice che queste debbano essere scartate. Il problema è che la teoria quantistica è, ed era già in quegli anni, abbondantemente confermata da riscontri sperimentali, motivo per cui viene naturale guardare con occhio scettico le critiche di Einstein e pensare che esse non possano essere accettate. Le situazioni da cui emerge il conflitto illustrato da Bell, però, sono piuttosto rare e soprattutto nessuna di queste era mai stata verificata sperimentalmente. È proprio per questo che nasce l'esigenza di testare le due teorie con esperimenti progettati appositamente per andare a sondare quelle zone critiche in cui hanno origine i conflitti.

Gli esperimenti più significativi, nonché i più completi, sono quelli di A.Aspect, che si occupò proprio dell'individuazione delle aree critiche e dell'analisi del comportamento dei fotoni in situazioni costruite ad hoc.

Quello che più ci interessa del lavoro di Aspect è la sua reinterpretazione del teorema di Bell, punto di partenza di tutte le sue verifiche sperimentali. In un articolo dal titolo “Bell’s theorem: the naive view of an experimentalist”<sup>3</sup>, egli arrivò a scrivere le disuguaglianze in termini del coefficiente di correlazione tra gli spin delle particelle (in realtà si tratta delle direzioni di polarizzazione dei fotoni), rendendo quindi più chiara l'importanza dell'ipotesi di località all'interno del teorema.

Il lavoro di Aspect, così come quello di Bell, si sviluppa a partire dalla variante ottica del paradosso EPR (nella versione di Bohm) e segue uno schema concettuale che aderisce strettamente alla situazione sperimentale. Egli considera una sorgente  $S$  che emette coppie di fotoni ad energia differente  $\nu_1$  e  $\nu_2$  che si propagano in versi opposti lungo la direzione dell'asse  $\mathbf{z}$  (come si vede in Figura 3.1). Lo stato del sistema composto dai due fotoni nel momento in cui vengono emessi è dato dalla funzione d'onda

$$|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle]$$

dove  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  rappresentano due direzioni ortogonali di polarizzazione lineare (ed ortogonali ovviamente anche alla direzione di propagazione  $\mathbf{z}$ ). Questo stato non può essere fattorizzato nel prodotto di due stati associati ad ognuno dei due fotoni, quindi non possiamo assegnare alcuna polarizzazione ai singoli fotoni, ma dobbiamo vedere il sistema nella sua globalità.

Due polarizzatori lineari, posti ai lati della sorgente e orientati nelle direzioni date dai due versori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , hanno il compito di analizzare i fotoni

---

<sup>3</sup>Articolo scritto in vista di una conferenza in memoria di J.S.Bell, tenuta a Vienna nel Dicembre del 2000. In seguito il lavoro fu pubblicato nel libro “Quantum (Un)speakables-From Bell to Quantum information” di A.Bertlmann e A.Zeilinger, del 2002

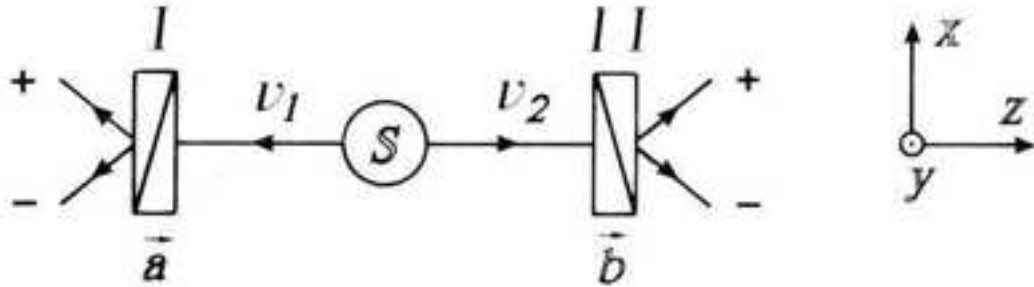


Figura 3.1: Variante ottica dell'esperimento concettuale di Einstein-Podolsky-Rosen

e di rilevarne il passaggio. In questo modo è possibile effettuare misurazioni di polarizzazione lineare dei due fotoni tramite l'analisi dei rilevatori posti dopo ognuno dei due polarizzatori. Entrambi daranno risultato  $+1$  o  $-1$  a seconda che la polarizzazione del fotone avvenga in direzione parallela o perpendicolare alla direzione del polarizzatore stesso.

D'altro canto sappiamo che, secondo la meccanica quantistica, indicata con  $P_{\pm}(\mathbf{a})$  la probabilità di ottenere il risultato  $\pm 1$  per  $\nu_1$  e con  $P_{\pm}(\mathbf{b})$  la probabilità di ottenere il risultato  $\pm 1$  per  $\nu_2$ , le previsioni quantistiche di rilevamento singolo per tali misurazioni sono

$$P_{+}(\mathbf{a}) = P_{-}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}$$

$$P_{+}(\mathbf{b}) = P_{-}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}$$

(in accordo con il fatto che non possiamo assegnare alcuna polarizzazione ai singoli fotoni, e quindi che ogni misurazione individuale darà un risultato casuale) e quelle di rilevamento congiunto

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}})$$

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \sin^2(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}})$$

In particolare possiamo osservare che, nel caso  $(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}) = 0$ , si avrà

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \tag{3.7}$$

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

ovvero, quando il fotone  $\nu_1$  dà risultato  $+1$ , anche il fotone  $\nu_2$  darà *certainemente* risultato  $+1$  (situazione analoga per  $-1$ ), il che significa *totale correlazione*. Questa previsione è perfettamente in accordo con quanto abbiamo



discusso fino ad ora, in quanto, misurando lungo la stessa direzione la polarizzazione di due fotoni emessi dalla stessa sorgente nello stesso istante, si ottengono due risultati uguali ed opposti, analogamente a quanto accadeva per lo spin di due atomi appartenenti alla stessa molecola.

Come abbiamo anticipato, nel suo lavoro, Aspect mette in luce le correlazioni tra le misurazioni e trova il modo di rappresentarle tramite l'introduzione di un coefficiente, di cui diamo ora la definizione così come ci viene data dallo stesso Aspect.

**Definizione 1 (Coefficiente di correlazione di polarizzazione)** È detto coefficiente di correlazione di polarizzazione la quantità

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (3.8)$$

In particolare, per come sono definiti i valori di aspettazione, nel caso quantomeccanico tale coefficiente assume la forma:

$$E_{MQ}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos 2(\widehat{\mathbf{ab}})$$

È abbastanza evidente che questo valore spiega effettivamente le forti correlazioni che legano i risultati delle misurazioni su  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . Infatti, si può osservare che, nel caso  $(\widehat{\mathbf{ab}}) = 0$ , esso assumerebbe il valore  $E_{MQ}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$ , il che significa *totale correlazione*, in accordo con quanto emerso dalle (3.7). In generale, il coefficiente di correlazione fornisce un criterio quantitativo per stabilire la correlazione che sussiste fra i risultati casuali ottenuti da ogni misurazione individuale. Nel caso di parallelismo o perpendicolarità delle polarizzazioni dei due fotoni, la correlazione è totale ( $|E_{MQ}| = 1$ ).

Come spiegare questo fenomeno? Le correlazioni tra misurazioni effettuate su due sistemi distanti che si sono separati dopo un periodo di interazione, possono essere viste come proprietà comuni ai due sistemi, che nel nostro esempio, sono rappresentati dalla coppia di fotoni emessi dalla stessa sorgente nello stesso istante. Chiaramente, poiché tali proprietà sono differenti da coppia a coppia, non sono prese in considerazione dal vettore di stato  $|\Psi(\nu_1, \nu_2)\rangle$ , che è invece lo stesso per ogni coppia di fotoni.

Anche sotto questo nuovo punto di vista, la conclusione è sempre la stessa, ovvero la non completezza della meccanica quantistica, teoria che deve necessariamente essere integrata con dei parametri supplementari, i quali andrebbero a rappresentare proprio queste proprietà comuni ai due sistemi. Si possono quindi comprendere tali interazioni mediante una descrizione di tipo classico data dall'introduzione di nuove variabili e si può sperare di ritrovare le previsioni quantistiche mediando i valori di aspettazione sulle variabili nascoste (verifica che portò Bell alle disuguaglianze).

Vediamo ora come si arriva alle disuguaglianze di Bell attraverso il modello appena illustrato.

Utilizziamo lo stesso formalismo introdotto da Bell, indicando con  $\lambda$  l'insieme di parametri supplementari e con  $A(\lambda, \mathbf{a})$  e  $B(\lambda, \mathbf{b})$  rispettivamente il risultato dato dall'analizzatore  $I$  orientato in direzione  $\mathbf{a}$  e quello dato dall'analizzatore  $II$  orientato in direzione  $\mathbf{b}$ . Come nel caso dello spin, tali grandezze possono assumere solo valore  $\pm 1$ , da cui segue che la quantità  $\frac{1}{2}[1 + A(\lambda, \mathbf{a})]$  potrà assumere solo i valori  $+1$  (in caso di risultato  $+$ ) e  $0$  (altrimenti), e analogamente, la quantità  $\frac{1}{2}[1 - A(\lambda, \mathbf{a})]$  potrà assumere solo i valori  $+1$  (in caso di risultato  $-$ ) e  $0$  (altrimenti). Quindi, data la distribuzione di probabilità di  $\lambda$ ,  $\rho(\lambda)$ , i valori di aspettazione di rilevamento singolo risultano essere:

$$P_{\pm}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \int [1 \pm A(\lambda, \mathbf{a})] \rho(\lambda) d\lambda$$

$$P_{\pm}(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \int [1 \pm B(\lambda, \mathbf{b})] \rho(\lambda) d\lambda$$

e quelli di rilevamento congiunto:

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} \int [1 + A(\lambda, \mathbf{a})][1 + B(\lambda, \mathbf{b})] \rho(\lambda) d\lambda$$

$$P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} \int [1 - A(\lambda, \mathbf{a})][1 - B(\lambda, \mathbf{b})] \rho(\lambda) d\lambda$$

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} \int [1 + A(\lambda, \mathbf{a})][1 - B(\lambda, \mathbf{b})] \rho(\lambda) d\lambda$$

$$P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} \int [1 - A(\lambda, \mathbf{a})][1 + B(\lambda, \mathbf{b})] \rho(\lambda) d\lambda$$

Sostituendo le quantità appena trovate nella (3.8), dopo alcuni passaggi, si trova che il coefficiente di correlazione, mediato lungo la distribuzione di  $\lambda$ , è dato da:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int A(\lambda, \mathbf{a})B(\lambda, \mathbf{b})\rho(\lambda)d\lambda$$

Quello che vogliamo fare è scrivere le disuguaglianze mettendo in evidenza il coefficiente di correlazione e il ruolo che assume nel teorema di Bell. Per farlo, consideriamo la quantità

$$\begin{aligned} s &\stackrel{def}{=} A(\lambda, \mathbf{a})B(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a})B(\lambda, \mathbf{b}') + A(\lambda, \mathbf{a}')B(\lambda, \mathbf{b}) + A(\lambda, \mathbf{a}')B(\lambda, \mathbf{b}') = \\ &= A(\lambda, \mathbf{a})[B(\lambda, \mathbf{b}) - B(\lambda, \mathbf{b}')] + A(\lambda, \mathbf{a}')[B(\lambda, \mathbf{b}) + B(\lambda, \mathbf{b}')] \end{aligned}$$

Poiché  $A$  e  $B$  possono assumere solo valore  $\pm 1$ , si avrà  $s = \pm 2$ , e facendo la media sulla distribuzione di  $\lambda$  si ottiene

$$-2 \leq \int s(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}')\rho(\lambda)d\lambda \leq +2$$

Ovvero, definendo

$$S := E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$$

si ottengono le disuguaglianze

$$-2 \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq +2 \quad (3.9)$$

note come *disuguaglianze di BCHSH*, cioè disuguaglianze di Bell generalizzate da Clauser, Horn, Shimony, Holt.

La (3.9) però, in alcune particolari situazioni (che preciseremo tra non molto) è in conflitto con la meccanica quantistica. Infatti, ponendoci ad esempio nella situazione illustrata in Figura 3.2, con  $\widehat{(\mathbf{a}\mathbf{b})} = \widehat{(\mathbf{b}\mathbf{a}')} = \widehat{(\mathbf{a}'\mathbf{b}')} = \frac{\pi}{8}$  e  $\widehat{(\mathbf{a}\mathbf{b}')} = \widehat{(\mathbf{a}\mathbf{b})} + \widehat{(\mathbf{b}\mathbf{a}')} + \widehat{(\mathbf{a}'\mathbf{b}')}$ , osserviamo che, assegnando a  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$ , ... i loro valori quantomeccanici, si ottiene

$$S_{MQ} = 2\sqrt{2}$$

quantità che viola evidentemente il limite superiore della disuguaglianza (3.9).

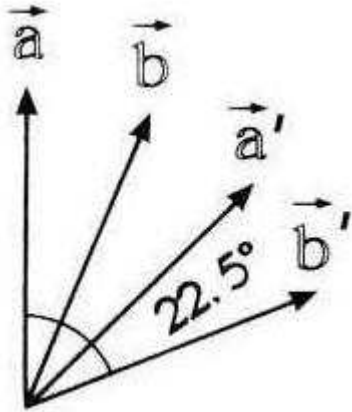


Figura 3.2:  $\theta = \frac{\pi}{8}$

In questa situazione particolare si ha quindi che, partendo dall'ipotesi che le previsioni della teoria a variabili nascoste siano in accordo con le previsioni quantistiche e sostituendo nella disuguaglianza i corrispondenti valori quantomeccanici di  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $E(\mathbf{a}, \mathbf{b}')$ , ..., si genera un conflitto. Abbiamo quindi trovato una situazione in cui le previsioni quantistiche non possono essere ritrovate nelle teorie a variabili nascoste e possiamo quindi concludere che non esiste una teoria deterministica locale, definita secondo il modello illustrato in questo paragrafo (modello decisamente molto generico), che riproduca *tutte* le previsioni della meccanica quantistica.

È ragionevole quindi chiedersi quali sono precisamente le regioni critiche e per quali angoli si avrà il massimo conflitto. Per rispondere a queste domande, deriviamo  $S$  rispetto ai tre angoli indipendenti  $(\widehat{\mathbf{ab}})$ ,  $(\widehat{\mathbf{ba}'})$ ,  $(\widehat{\mathbf{a'b}'})$  e scopriamo che  $S_{MQ}$  è estremo in corrispondenza di

$$(\widehat{\mathbf{ab}}) = (\widehat{\mathbf{ba}'}) = (\widehat{\mathbf{a'b}'}) = \vartheta$$

per cui si ha

$$S_{MQ}(\vartheta) = 3 \cos 2\vartheta - \cos 6\vartheta$$

Derivando infine questa quantità rispetto a  $\vartheta$ , ricaviamo il valore massimo e il valore minimo di  $S_{MQ}$ , che sono rispettivamente

$$S_{MQ}^{max} = 2\sqrt{2} \quad \text{per } \vartheta = \frac{\pi}{8}$$

$$S_{MQ}^{min} = -2\sqrt{2} \quad \text{per } \vartheta = \frac{3\pi}{8}$$

(situazioni rappresentate rispettivamente in Figura 3.2 e 3.3).

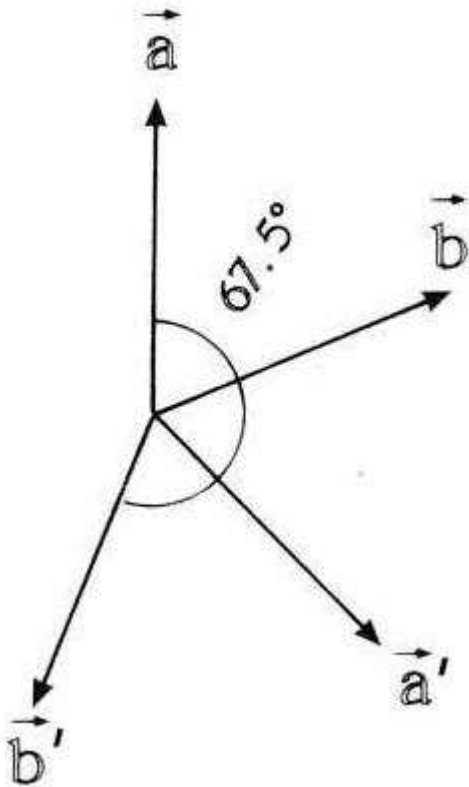


Figura 3.3:  $\vartheta = \frac{3\pi}{8}$

Infine, con un breve studio di funzione è possibile tracciare il grafico che rappresenta l'andamento di  $S$  al variare dell'angolo  $\vartheta$ , come mostrato in Figura 3.4.

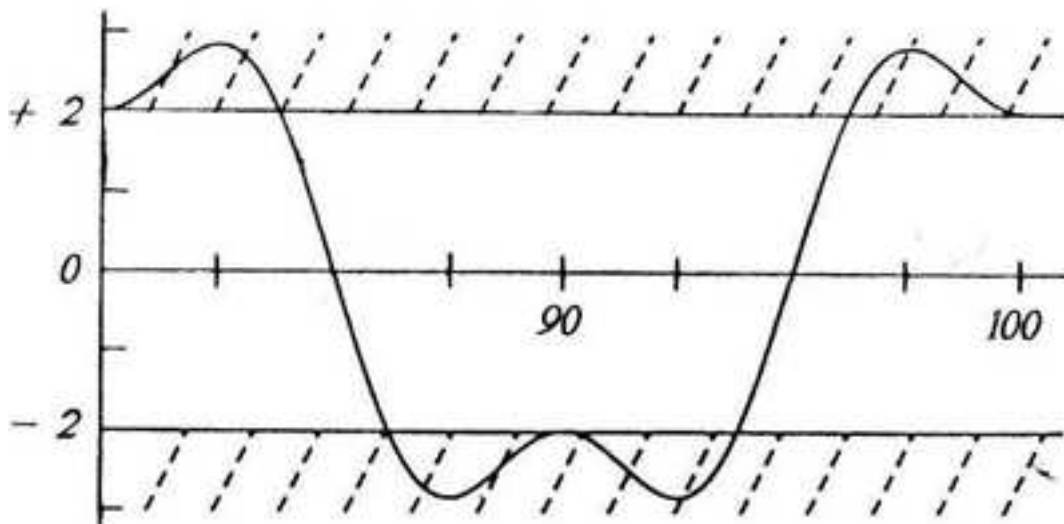


Figura 3.4:  $S(\vartheta)$ . Le aree tratteggiate indicano le zone in cui si verifica un conflitto.

In conclusione, come emerge chiaramente dalla discussione sviluppata da Aspect, possiamo dire che il teorema di Bell mette in luce un conflitto tra le teorie a variabili nascoste (descritte secondo il modello illustrato in questo paragrafo) e *certe* previsioni quantomeccaniche e fornisce un criterio quantitativo per discriminare il conflitto.

In conclusione, ci dedichiamo ad una breve discussione delle ipotesi, per capire meglio da dove nasce il conflitto. Le assunzioni fondamentali alla base del modello illustrato sono sostanzialmente tre: l'esistenza di variabili nascoste, il determinismo, e la condizione di località. Queste tre ipotesi, prese contemporaneamente, danno luogo ad un'incoerenza tra la teoria modellizzata e la meccanica quantistica. Le prime due non possono essere messe in discussione perché fanno parte della teoria stessa. La terza invece è un'assunzione "comoda" e "ovvia" che sembrerebbe assurdo negare. Eppure, se si vuole completare la meccanica quantistica con una teoria a variabili nascoste, non potendo rinunciare alle prime due ipotesi, tale teoria dovrà essere necessariamente non locale. Se si rinuncia alla condizione di località, infatti, la disuguaglianza (3.9) cade.

### 3.3 Il teorema di Bell adattato all'esempio di Einstein

In conclusione, per “chiudere il cerchio” e tornare in qualche modo al punto di partenza, vogliamo proporre, in quest'ultimo paragrafo, un metodo per adattare il teorema di Bell al caso continuo, in particolare all'esempio di Einstein, Podolsky e Rosen, visto nel primo capitolo.

Consideriamo due particelle, che denoteremo con  $I$  e  $II$  (per richiamare la notazione usata nel primo capitolo), ad ognuna delle quali associamo un vettore bidimensionale (che per comodità consideriamo normalizzato), le cui componenti rappresentano rispettivamente *momento lineare* e *posizione*:

$$\sigma_1 = (p_1, x_1) \quad \text{per la particella I}$$

$$\sigma_2 = (p_2, x_2) \quad \text{per la particella II}$$

Consideriamo poi un versore  $\mathbf{d} = (d^{(1)}, d^{(2)})$  che determina una direzione del piano. Per ognuna delle due particelle avremo

$$(\sigma_i \cdot \mathbf{d}) = d^{(1)}p_i + d^{(2)}x_i$$

che rappresenta un vettore nel piano delle fasi  $xp$ , come rappresentato in Figura (3.5).

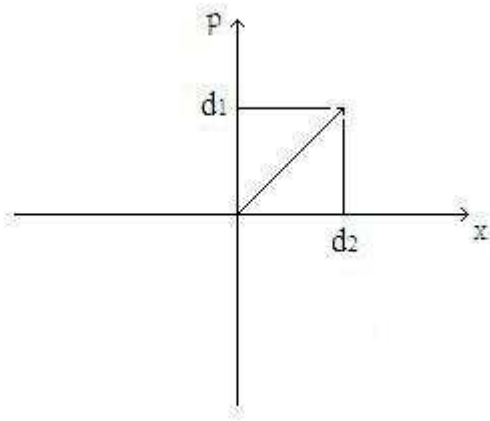


Figura 3.5: Piano delle fasi in cui è rappresentato il vettore  $(\sigma_i \cdot \mathbf{d}) = d^{(1)}p_i + d^{(2)}x_i$  per  $i=1$  o  $i=2$ .

Introduciamo ora i parametri supplementari, che indicheremo anche qui con la lettera  $\lambda$ , la cui distribuzione di probabilità sarà data da  $\rho(\lambda)$ . Come nella versione originale del teorema di Bell, anche in questo caso, date due direzioni  $\mathbf{d}_1$  e  $\mathbf{d}_2$ , il risultato della misura effettuata su ognuna delle due

grandezze  $(\sigma_1 \cdot \mathbf{d}_1)$  e  $(\sigma_2 \cdot \mathbf{d}_2)$  sarà dato rispettivamente dalle funzioni  $A(\mathbf{d}_1, \lambda)$  e  $B(\mathbf{d}_2, \lambda)$ .

Per seguire in parallelo il procedimento di Bell, però, è necessario discretizzare lo spettro dei risultati e ridurlo ai soli valori  $\pm 1$ . A tal fine, riconsideriamo per un momento l'esempio di Einstein, Podolsky e Rosen visto nel primo capitolo: sia dato un sistema di due particelle il cui stato è descritto dalla funzione d'onda (2.9)

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0)p} dp$$

dove  $x_0$  è la distanza fra le particelle e  $x_1, x_2$  sono le variabili che descrivono rispettivamente la prima e la seconda particella.

Abbiamo potuto verificare che, se misurando il momento lineare della prima particella otteniamo il valore  $\bar{p}$ , allora il sistema precipiterà in uno stato da cui è possibile ricavare il valore del momento lineare della seconda particella, che sarà necessariamente  $-\bar{p}$ . Mentre, per quanto riguarda la posizione, se una misurazione effettuata sulla prima particella dà come risultato  $\bar{x}$ , allora una successiva misurazione sulla seconda particella darà sicuramente come risultato  $\bar{x} + x_0$ .

In particolare, il segno opposto dei due valori del momento lineare suggerisce di ridefinire i risultati A e B come segue:

$$A(\mathbf{d}_1, \lambda) = \begin{cases} +1 & \text{se } p_1 > 0 \\ -1 & \text{se } p_1 < 0 \end{cases}$$

$$B(\mathbf{d}_2, \lambda) = \begin{cases} +1 & \text{se } p_2 > 0 \\ -1 & \text{se } p_2 < 0 \end{cases}$$

In questo modo, non solo passiamo comodamente da uno spettro continuo di risultati ad uno binarizzato, ma inoltre restituiamo al sistema la simmetria che possiede nel caso discreto, ovvero quella proprietà di conservazione secondo cui:

$$\text{Se } A(\mathbf{d}, \lambda) = +1 \quad \Rightarrow \quad B(\mathbf{d}, \lambda) = -1$$

e viceversa

$$\text{Se } A(\mathbf{d}, \lambda) = -1 \quad \Rightarrow \quad B(\mathbf{d}, \lambda) = +1$$

riconducendoci perfettamente al modello originale del teorema di Bell.

L'ipotesi di località, anche in questo caso, sta nel fatto che A non dipende da  $\mathbf{d}_2$  e B non dipende da  $\mathbf{d}_1$ .

Con questa ipotesi e sfruttando le definizioni date sopra, ci accingiamo a scrivere i valori di aspettazione per il prodotto dei risultati di  $\sigma_1$  misurato lungo  $\mathbf{d}_1$  ( $\sigma_1 \cdot \mathbf{d}_1$ ), e di  $\sigma_2$  misurato lungo  $\mathbf{d}_2$  ( $\sigma_2 \cdot \mathbf{d}_2$ ). Secondo le teorie a

variabili nascoste, questo si ottiene mediando il prodotto dei due risultati sulla distribuzione di  $\lambda$ , ovvero:

$$P(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \int A(\mathbf{d}_1, \lambda)B(\mathbf{d}_2, \lambda)\rho(\lambda)d\lambda \quad (3.10)$$

esattamente come nel caso discreto.

Vediamo ora cosa prevede la meccanica quantistica, ovvero cosa risulta dal calcolo

$$P(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \langle (\sigma_1 \cdot \mathbf{d}_1)(\sigma_2 \cdot \mathbf{d}_2) \rangle$$

Ovviamente qui non troveremo molte analogie con il caso discreto, perché, dovendo lavorare con funzioni d'onda e operatori continui, avremo a che fare con degli integrali anziché con delle matrici. Procediamo quindi con il calcolo della media quantistica.

Innanzitutto consideriamo una funzione d'onda leggermente modificata (possiamo scegliere liberamente lo stato iniziale del sistema, a patto di mantenere uguale la forma degli operatori  $\hat{p}$  e  $\hat{x}$ ), introducendo un  $\varepsilon$  che faremo tendere a 0. La funzione d'onda che utilizzeremo sarà la seguente

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x_1-x_2+x_0)p - \frac{\varepsilon^2}{2}p^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}(x_1^2+x_2^2)} dp \quad (3.11)$$

Per comodità chiamiamo  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  i due versori  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ , e applichiamo alla funzione (3.11) gli operatori

$$\hat{B} = (\hat{\sigma}_2 \cdot \mathbf{b}) = b_1\hat{p}_2 + b_2\hat{x}_2 = b_1\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + b_2x_2.$$

e

$$\hat{A} = (\hat{\sigma}_1 \cdot \mathbf{a}) = a_1\hat{p}_1 + a_2\hat{x}_1 = a_1\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2x_1.$$

Nell'applicare gli operatori possiamo permetterci di trascurare gli esponenziali che contengono  $\varepsilon$ , perché una volta derivati rispetto a  $x_1$  o  $x_2$  generano un coefficiente che va a 0 con  $\varepsilon$  che tende a 0. Applichiamo quindi l'operatore  $\hat{B}$  e l'operatore  $\hat{A}$  in successione alla funzione d'onda (3.11), trascurando i termini in funzione di  $\varepsilon$ . Quello che si ottiene è il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp(-a_1b_1p^2 + a_1b_2x_2p - a_2b_1x_1p + a_2b_2x_1x_2)e^{\frac{i}{\hbar}(x_1-x_2+x_0)p - \frac{\varepsilon^2}{2}p^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}(x_1^2+x_2^2)}$$

che deve essere a sua volta moltiplicato per lo stato  $\bar{\Psi}$ , funzione d'onda coniugata della (3.11). Infine, il tutto deve essere integrato rispetto a  $x_1$  e  $x_2$ .



In definitiva, l'integrale che dobbiamo risolvere è il seguente:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} dp dq \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 [(-a_1 b_1 p^2 + a_1 b_2 x_2 p - a_2 b_1 x_1 p + a_2 b_2 x_1 x_2) \\
& \quad e^{\frac{i}{\hbar} (x_1 - x_2 + x_0) (p - q) - \varepsilon^2 (x_1^2 + x_2^2) - \frac{\varepsilon^2}{2} (p^2 + q^2)}] = \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} dp dq \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 [(-a_1 b_1 p^2 + a_1 b_2 x_2 p - a_2 b_1 x_1 p + a_2 b_2 x_1 x_2) \\
& \quad e^{-\varepsilon^2 x_1^2 + \frac{i}{\hbar} x_1 - \varepsilon^2 x_2^2 - \frac{i}{\hbar} x_2 + \frac{i}{\hbar} x_0 (p - q) - \frac{\varepsilon^2}{2} (p^2 + q^2)}] =
\end{aligned} \tag{3.12}$$

nel quale ci siamo permessi di invertire l'ordine di integrazione.

Ora, prima di procedere con la risoluzione dell'integrale, concentriamo la nostra attenzione sull'esponente di  $e$ . In particolare consideriamo i termini in funzione di  $x_1$  e  $x_2$ , e osserviamo che

$$-\varepsilon^2 x_1^2 + \frac{i}{\hbar} x_1 - \varepsilon^2 x_2^2 - \frac{i}{\hbar} x_2$$

può facilmente essere trasformato nella somma di due quadrati, che otteniamo aggiungendo e togliendo due volte la quantità  $\frac{(p-q)^2}{4\hbar\varepsilon^2}$ .

Raccogliendo i quadrati di binomio, possiamo riscrivere l'espressione precedente nel seguente modo:

$$-\left(\varepsilon x_1 - \frac{i(p-q)}{2\hbar\varepsilon}\right)^2 - \left(\varepsilon x_2 + \frac{i(p-q)}{2\hbar\varepsilon}\right)^2 - \frac{(p-q)^2}{2\hbar^2\varepsilon^2} \tag{3.13}$$

A questo punto è utile effettuare un cambio di coordinate per evitare di trascinarci dietro esponenti inutilmente lunghi. In particolare, l'espressione appena scritta ci suggerisce di porre

$$\begin{cases} \eta = \varepsilon x_1 - \frac{i(p-q)}{2\hbar\varepsilon} \\ \xi = \varepsilon x_2 + \frac{i(p-q)}{2\hbar\varepsilon} \end{cases} \tag{3.14}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\varepsilon} \eta + \frac{i(p-q)}{2\hbar\varepsilon^2} \\ x_2 = \frac{1}{\varepsilon} \xi - \frac{i(p-q)}{2\hbar\varepsilon^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx_1 = \frac{1}{\varepsilon} d\eta \\ dx_2 = \frac{1}{\varepsilon} d\xi \end{cases} \tag{3.15}$$

Prima di sostituire le nuove coordinate nell'integrale, "sistemiamo" anche il resto dell'esponente che compare nella (3.12)

$$\frac{i}{\hbar} x_0 (p - q) - \frac{\varepsilon^2}{2} (p^2 + q^2) - \frac{(p - q)^2}{2\hbar^2\varepsilon^2}$$

a cui abbiamo aggiunto anche il termine dato dalla (3.13), dovuto al completamento del quadrato.

Anche qui ci conviene introdurre un cambio di coordinate. Poniamo quindi

$$\begin{cases} z = \frac{p-q}{2} \\ w = \frac{p+q}{2} \end{cases} \quad (3.16)$$

da cui

$$\begin{cases} p = w + z \\ q = w - z \end{cases} \Rightarrow |J| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad (3.17)$$

dove con  $|J|$  si indica il determinante dello Jacobiano.

A questo punto, applicando all'integrale i cambi di coordinate appena introdotti, e riordinando i termini portando fuori le costanti, otteniamo l'integrale scritto in una forma facilmente riconducibile agli integrali Gaussiani<sup>4</sup>, che qui riportiamo scomposto nella somma di quattro integrali:

$$\begin{aligned} & -a_1 b_1 2 \int dz dw [(w+z)^2 e^{(-\varepsilon^2 - \frac{2}{\hbar^2 \varepsilon^2})z^2 + \frac{2i}{\hbar} x_0 z - \varepsilon^2 w^2} \\ & \quad (\frac{1}{\varepsilon^2} \int d\eta d\xi e^{-\eta^2 - \xi^2})] + \\ & + a_1 b_2 2 \int dz dw [(w+z) e^{(-\varepsilon^2 - \frac{2}{\hbar^2 \varepsilon^2})z^2 + \frac{2i}{\hbar} x_0 z - \varepsilon^2 w^2} \\ & \quad (\frac{1}{\varepsilon^2} \int d\eta d\xi (\frac{1}{\varepsilon} \xi - \frac{iz}{2\hbar \varepsilon^2}) e^{-\eta^2 - \xi^2})] + \\ & - a_2 b_1 2 \int dz dw [(w+z) e^{(-\varepsilon^2 - \frac{2}{\hbar^2 \varepsilon^2})z^2 + \frac{2i}{\hbar} x_0 z - \varepsilon^2 w^2} \\ & \quad (\frac{1}{\varepsilon^2} \int d\eta d\xi (\frac{1}{\varepsilon} \eta + \frac{iz}{2\hbar \varepsilon^2}) e^{-\eta^2 - \xi^2})] + \\ & + a_2 b_2 2 \int dz dw [e^{(-\varepsilon^2 - \frac{2}{\hbar^2 \varepsilon^2})z^2 + \frac{2i}{\hbar} x_0 z - \varepsilon^2 w^2} \\ & \quad (\frac{1}{\varepsilon^2} \int d\eta d\xi (\frac{1}{\varepsilon} \xi - \frac{iz}{2\hbar \varepsilon^2}) (\frac{1}{\varepsilon} \eta + \frac{iz}{2\hbar \varepsilon^2}) e^{-\eta^2 - \xi^2})] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Risolviamo separatamente questi quattro integrali utilizzando di nuovo il metodo del completamento del quadrato per l'esponente

$$(-\varepsilon^2 - \frac{2}{\hbar^2 \varepsilon^2})z^2 + \frac{2i}{\hbar} x_0 z$$

ed effettuando un ulteriore cambio di coordinate per riportare il problema alla risoluzione di integrali Gaussiani.

A meno di un fattore costante (che sparisce con la normalizzazione del

---

<sup>4</sup>Con *integrale Gaussiano* si intende un integrale della forma  $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx$  con  $n \in \mathbb{N}$ , il cui valore è noto e costante.

vettore di stato iniziale), quello che si ottiene è il seguente risultato:

$$-\frac{a_1 b_1}{\varepsilon^4} e^{-\varepsilon^2 x_0^2} - \frac{a_1 b_2}{\varepsilon^2} e^{-\varepsilon^2 x_0^2} - \frac{a_2 b_1}{\varepsilon^2} e^{-\varepsilon^2 x_0^2} + \frac{a_2 b_2}{\varepsilon^2} e^{-\varepsilon^2 x_0^2}$$

Supponendo poi di normalizzare la funzione d'onda (3.11), introduciamo il fattore moltiplicativo  $\varepsilon^4$  e, moltiplicando quest'ultima espressione per tale fattore otteniamo

$$-a_1 b_1 e^{-\varepsilon^2 x_0^2} - \varepsilon^2 a_1 b_2 e^{-\varepsilon^2 x_0^2} - \varepsilon^2 a_2 b_1 e^{-\varepsilon^2 x_0^2} + \varepsilon^2 a_2 b_2 e^{-\varepsilon^2 x_0^2}$$

Infine, facendo tendere  $\varepsilon$  a 0, si arriva finalmente al risultato cercato

$$-a_1 b_1$$

da cui possiamo concludere che, secondo la meccanica quantistica, si ha

$$P(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = -d_1^{(1)} d_2^{(2)} \quad (3.19)$$

Affinché le teorie a variabili nascoste possano essere considerate coerenti con la meccanica quantistica, le due espressioni (3.10), (3.19) devono necessariamente essere equivalenti, o perlomeno approssimativamente equivalenti. La dimostrazione, da qui in poi, procede in modo analogo a quella vista nel caso discreto, con l'unica differenza che, nella seconda parte, anziché avere

$$\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \quad \text{e} \quad \overline{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$$

avremo

$$\overline{P(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \quad \text{e} \quad \overline{-a_1 b_1}$$

Possiamo quindi affermare che l'incompatibilità fra meccanica quantistica e teorie a variabili nascoste locali si riflette anche sul caso continuo e che, anche in questo caso, valgono tutte le conclusioni dedotte da Bell tramite il suo teorema.

## Appendice A

# Teoria generale del momento angolare

In quest'appendice vogliamo studiare in modo un po' più approfondito le implicazioni delle regole di commutazione del momento angolare e mostrare che effettivamente per gli operatori ad esso associati si ottengono gli autovalori della forma vista.

Il problema può essere formulato nel seguente modo: assegnati tre operatori autoaggiunti  $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$  in un generico spazio di Hilbert  $H$ <sup>1</sup>, ci domandiamo quali informazioni si possono ricavare dal semplice fatto che essi soddisfano le regole di commutazione:

$$[\hat{J}_j, \hat{J}_k] = i\hbar \varepsilon_{jkl} \hat{J}_l$$

In particolare ci interessa dimostrare che, partendo da queste ipotesi, oltre agli autovalori interi del momento angolare orbitale, se ne trovano altri che conservano la stessa forma ma possono essere anche semi-interi, che sono quelli da cui si deduce l'esistenza del momento angolare intrinseco.

Iniziamo con l'osservare che i tre operatori  $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$  non sono tra loro compatibili, ma ognuno di essi commuta con  $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ , come evidenzia la relazione:

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_x] = [\hat{J}^2, \hat{J}_y] = [\hat{J}^2, \hat{J}_z] = 0$$

Possiamo quindi considerare, ad esempio, la coppia di operatori  $\hat{J}^2, \hat{J}_z$  e concentrarci sulla ricerca degli autovalori per questi.

Innanzitutto, poiché i due operatori considerati commutano tra loro, esisterà sicuramente un sistema ortogonale completo di autovettori comuni (conseguenza della compatibilità di grandezze fisiche), ma in generale essi non formeranno in  $H$  un sistema completo di operatori.

---

<sup>1</sup>È detto *spazio di Hilbert* uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno, normato, e completo (cioè tale che ogni successione di Cauchy converga).

Per risolvere questo problema si può pensare di introdurre un operatore  $\hat{A}$  che commuti sia con  $\hat{J}^2$  che con  $\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z$ .  $\hat{A}$  può sempre essere scelto in modo tale da formare con  $\hat{J}^2$  e  $\hat{J}_z$  un sistema completo di operatori commutabili.

Dati quindi  $\hbar^2\lambda$ , autovalore di  $\hat{J}^2$ , e  $\alpha$ , autovalore di  $\hat{A}$ , restringiamo lo spazio di Hilbert  $H$  al suo autospazio  $H_{\alpha\lambda}$ , generato dagli autovettori corrispondenti agli autovalori considerati.

In questo sottospazio, consideriamo un generico autovettore  $|m\rangle$  di  $\hat{J}_z$ , e il corrispondente autovalore  $\hbar m$  (con  $m \in \mathbb{N}$ ), così che si possano scrivere le equazioni agli autovalori:

$$\begin{aligned}\hat{J}^2 |m\rangle &= \hbar^2\lambda |m\rangle \\ \hat{J}_z |m\rangle &= \hbar m |m\rangle\end{aligned}\tag{A.1}$$

Definiamo poi gli operatori

$$\begin{aligned}\hat{J}_+ &= \hat{J}_x + i\hat{J}_y \\ \hat{J}_- &= \hat{J}_x - i\hat{J}_y\end{aligned}$$

che soddisfano le seguenti regole di commutazione:

$$\begin{aligned}[\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= \hat{J}_z\hat{J}_+ - \hat{J}_+\hat{J}_z = \hbar\hat{J}_+ & [\hat{J}_z, \hat{J}_-] &= \hat{J}_z\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_z = -\hbar\hat{J}_- \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= \hat{J}_+\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_+ = 2\hbar\hat{J}_z\end{aligned}$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned}\hat{J}_-\hat{J}_+ &= (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - i[\hat{J}_y, \hat{J}_x] = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hbar\hat{J}_z = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z \\ \hat{J}_+\hat{J}_- &= (\hat{J}_x + i\hat{J}_y)(\hat{J}_x - i\hat{J}_y) = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + i[\hat{J}_y, \hat{J}_x] = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hbar\hat{J}_z = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z\end{aligned}$$

Dalla prima ricaviamo

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z$$

che, sostituita nelle (A.1), dà

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ |m\rangle = (-\hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z) |m\rangle + \hbar^2\lambda |m\rangle = \hbar^2[\lambda - m(m+1)] |m\rangle\tag{A.2}$$

dove abbiamo sostituito a  $\hat{J}_z$  il suo autovalore  $\hbar m$ , e a  $\hat{J}_z^2$ , di conseguenza, il valore  $\hbar^2 m^2$ .

Analogamente, dalla seconda ricaviamo

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z$$

che, sostituita nelle (A.1), ed effettuando le stesse sostituzioni di prima, dà

$$\hat{J}_+\hat{J}_- |m\rangle = (-\hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z) |m\rangle + \hbar^2\lambda |m\rangle = \hbar^2[\lambda - m(m-1)] |m\rangle\tag{A.3}$$

Inoltre, dalle relazioni di commutazione si ricava che

$$\begin{aligned}\hat{J}_z \hat{J}_+ |m\rangle &= (\hat{J}_+ \hat{J}_z + \hbar \hat{J}_+) |m\rangle = \hbar(m+1) \hat{J}_+ |m\rangle \\ \hat{J}_z \hat{J}_- |m\rangle &= (\hat{J}_- \hat{J}_z - \hbar \hat{J}_-) |m\rangle = \hbar(m-1) \hat{J}_- |m\rangle\end{aligned}$$

Questo significa che, se  $\hbar m$  è autovalore di  $\hat{J}_z$  (ipotesi presa inizialmente), allora anche  $\hbar(m+1)$  e  $\hbar(m-1)$  lo sono, e  $\hat{J}_+ |m\rangle$ ,  $\hat{J}_- |m\rangle$  sono i corrispondenti autovettori (a patto che siano non nulli).

A questo punto, fissiamo un valore  $m_0$  di  $m$  e proviamo a iterare il ragionamento. Si otterranno le equazioni:

$$\begin{aligned}\hat{J}_z \hat{J}_+^p |m_0\rangle &= \hbar(m_0 + p) \hat{J}_+^p |m_0\rangle \\ \hat{J}_z \hat{J}_-^q |m_0\rangle &= \hbar(m_0 - q) \hat{J}_-^q |m_0\rangle\end{aligned}$$

e si vengono quindi a formare una successione di autovettori di  $\hat{J}_z$  e una degli autovalori corrispondenti, che saranno rispettivamente:

$$\dots, \hat{J}_-^q |m_0\rangle, \dots, \hat{J}_- |m_0\rangle, |m_0\rangle, \hat{J}_+ |m_0\rangle, \dots, \hat{J}_+^p |m_0\rangle, \dots$$

e

$$\dots, \hbar(m_0 - q), \dots, \hbar(m_0 - 1), \hbar m_0, \hbar(m_0 + 1), \dots, \hbar(m_0 + p), \dots$$

È facile dimostrare, utilizzando gli sviluppi di  $(\hat{J}_+ \hat{J}_-)$  e  $(\hat{J}_- \hat{J}_+)$  che l'operatore  $(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+)$  è un operatore positivo. Sommando (A.2) e (A.3), avremo quindi:

$$\langle m | (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) | m \rangle = \hbar^2 (\lambda - m^2) \geq 0$$

da cui, poiché  $\lambda$  è autovalore di  $\hat{J}^2$  e in quanto tale è positivo, segue

$$|m| \leq \sqrt{\lambda}$$

Questo significa che esistono un valore massimo e un valore minimo di  $m$  e che quindi la successione degli autovettori sarà limitata sia superiormente che inferiormente, ovvero esisteranno due valori  $p_0, q_0 \in \mathbb{N}$  tali che

$$\begin{aligned}\hat{J}_+^{p_0} |m_0\rangle \neq 0 & \quad \text{e} \quad \hat{J}_+^{p_0+1} |m_0\rangle = 0 \\ \hat{J}_-^{q_0} |m_0\rangle \neq 0 & \quad \text{e} \quad \hat{J}_-^{q_0+1} |m_0\rangle = 0\end{aligned}$$

Iterando anche (A.2) e (A.3) si deducono infine le equazioni

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ (\hat{J}_+^p |m_0\rangle) = \hbar^2 [\lambda - (m_0 + p)(m_0 + p + 1)] \hat{J}_+^p |m_0\rangle \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- (\hat{J}_-^q |m_0\rangle) = \hbar^2 [\lambda - (m_0 - q)(m_0 - q - 1)] \hat{J}_-^q |m_0\rangle \quad (\text{A.5})$$

Osserviamo però che, per la condizione di limitatezza, valgono anche

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ (\hat{J}_+^{p_0} |m_0\rangle) = \hat{J}_- (\hat{J}_+^{p_0+1} |m_0\rangle) = 0$$

$$\hat{J}_+ \hat{J}_- (\hat{J}_-^{q_0} |m_0\rangle) = \hat{J}_+ (\hat{J}_-^{q_0+1} |m_0\rangle) = 0$$

perciò, dal confronto di queste ultime con le (A.4), (A.5), si ricava

$$\hbar^2 [\lambda - (m_0 + p_0)(m_0 + p_0 + 1)] \hat{J}_+^{p_0} |m_0\rangle = 0$$

e

$$\hbar^2 [\lambda - (m_0 - q_0)(m_0 - q_0 - 1)] \hat{J}_-^{q_0} |m_0\rangle = 0$$

ovvero, poiché  $\hbar^2 \neq 0$ ,  $\hat{J}_+^{p_0} |m_0\rangle \neq 0$  e  $\hat{J}_-^{q_0} |m_0\rangle \neq 0$ , segue sia

$$\lambda - (m_0 + p_0)(m_0 + p_0 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = (m_0 + p_0)(m_0 + p_0 + 1)$$

che

$$\lambda - (m_0 - q_0)(m_0 - q_0 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = (m_0 - q_0)(m_0 - q_0 - 1)$$

Da queste, uguagliando le due espressioni, si ricava il valore di  $m_0$ :

$$m_0 = \frac{q_0 - p_0}{2}$$

In conclusione, definendo  $j = m_0 + p_0 = \frac{q_0 + p_0}{2}$ , si ha  $\lambda = j(j+1)$  e quindi gli autovalori di  $\hat{J}^2$  saranno necessariamente della forma  $\hbar^2 j(j+1)$ , con  $j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$

Questo significa che l'operatore  $\hat{J}^2$  può assumere valori interi o semi-interi. Poiché sappiamo che il momento angolare orbitale  $\hat{L}^2$  è caratterizzato da autovalori della forma  $\hbar^2 l(l+1)$  con  $l$  intero<sup>2</sup>, tutti gli altri autovalori, quelli semi-interi, devono appartenere ad un altro operatore, che abbia le stesse proprietà di commutazione di  $\hat{L}$ . La grandezza fisica relativa a questo operatore è il momento angolare intrinseco  $\hat{S}$ , che segue le stesse regole di commutazione di  $\hat{L}$  e i cui autovalori sono della forma  $\hbar^2 s(s+1)$  dove però  $s$  può assumere anche valori semi-interi. In questo modo si spiega quanto abbiamo dedotto a partire dalle ipotesi di commutazione prese in considerazione all'inizio.

Osserviamo infine che

$$m_0 - q_0 = -\frac{q_0 + p_0}{2} = -j$$

da cui segue  $m_0 = -j + q_0$ . Quindi, se l'operatore  $\hat{J}^2$  ha autovalori  $\hbar^2 j(j+1)$ , l'operatore  $\hat{J}_z$  assumerà valori della forma  $\hbar m$  con  $m = j, j-1, j-2, \dots, -j$ , che in tutto saranno esattamente  $2j+1$ .

<sup>2</sup>Non lo dimostriamo perché richiederebbe troppo tempo.

## Appendice B

# Previsioni quantistiche

La meccanica quantistica fornisce un metodo per calcolare il valore di aspettazione del risultato di una misurazione effettuata su un dato sistema. Questo valore di aspettazione è definito *previsione quantistica* (o *media quantistica*).

In particolare, a noi interessa il calcolo delle previsioni quantistiche per vettori di stato discreti. Diamo quindi la seguente definizione.

**Definizione 1 (Previsione quantistica nel caso discreto)** *Sia dato un sistema  $C$  nello stato*

$$|\Psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |\alpha_k\rangle$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , e i coefficienti  $c_i$  tali che  $\sum |c_i|^2 = 1$ . Sia inoltre  $\hat{A}$  un operatore associato ad una grandezza  $A$ .

Se misuriamo la grandezza  $A$  sul sistema  $C$ , la previsione quantistica del risultato di tale misurazione è data da

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \langle \alpha_k | \hat{A} | \alpha_k \rangle + \sum_{k \neq m} c_m^* c_k \langle \alpha_m | \hat{A} | \alpha_k \rangle \quad (\text{B.1})$$

dove  $c_m^*$  rappresenta il coniugato di  $c_m$ .

In particolare, nel caso di un sistema dotato di uno spettro 2-dimensionale, con funzione d'onda

$$|\Psi\rangle = c_1 |\alpha_1\rangle + c_2 |\alpha_2\rangle$$

dove  $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ , la media quantistica per la misura di una grandezza  $A$  su tale sistema, sarà data da

$$\begin{aligned} \langle A \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle &= |c_1|^2 \langle \alpha_1 | \hat{A} | \alpha_1 \rangle + |c_2|^2 \langle \alpha_2 | \hat{A} | \alpha_2 \rangle + \\ &+ c_1^* c_2 \langle \alpha_1 | \hat{A} | \alpha_2 \rangle + c_2^* c_1 \langle \alpha_2 | \hat{A} | \alpha_1 \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$



Questa definizione generica, può essere applicata a diverse situazioni e per qualunque operatore discreto. Vediamo qui di seguito qualche esempio di applicazione che abbiamo incontrato durante la trattazione.

**Primo esempio di applicazione:** Previsione quantistica per il prodotto dei risultati che si ottengono misurando gli spin di due particelle rispettivamente lungo le direzioni  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

Consideriamo il modello illustrato nel paragrafo 3.1, e mostriamo come si arriva al risultato dell'espressione (3.3). Quello che vogliamo fare è applicare quanto detto ad un sistema di due particelle, la cui funzione d'onda è<sup>1</sup>

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\Psi_+(I)\rangle \otimes |\Psi_-(II)\rangle - |\Psi_-(I)\rangle \otimes |\Psi_+(II)\rangle]$$

che più semplicemente possiamo scrivere con la seguente notazione:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2 ] \quad (\text{B.3})$$

dove  $|\pm\rangle_1$  e  $|\pm\rangle_2$  rappresentano gli autovettori della matrice di Pauli  $\sigma_z$  rispettivamente per la particella 1 e 2, relativi agli autovalori  $\pm 1$  della matrice stessa (visti nel paragrafo 2.2).

Nel nostro caso, l'operatore di cui ci interessa calcolare la media è dato dal prodotto tensoriale di due operatori, di cui uno agisce sulla prima particella e l'altro sulla seconda. Abbiamo infatti l'operatore  $\hat{A}$  associato alla misura di  $\sigma_1$  lungo la direzione  $\mathbf{a}$  ( $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$ ) e l'operatore  $\hat{B}$  associato alla misura di  $\sigma_2$  lungo la direzione  $\mathbf{b}$  ( $\sigma_2 \cdot \mathbf{b}$ ). Per come sono definiti gli operatori associati alle componenti dello spin,  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  assumeranno la forma seguente:

$$\hat{A} = a_x \sigma_x + a_y \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & a_x + ia_y \\ a_x - ia_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B} = b_x \sigma_x + b_y \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & b_x + ib_y \\ b_x - ib_y & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo calcolare la media quantistica del prodotto dei risultati ottenuti dalla misurazione delle due grandezze  $\sigma_1 \cdot \mathbf{a}$  e  $\sigma_2 \cdot \mathbf{b}$  con la (B.2), prestando però particolare attenzione al fatto che l'operatore  $\hat{A}$  agisce solo sulla prima particella e l'operatore  $\hat{B}$  solo sulla seconda.

---

<sup>1</sup>Introduciamo qua, anche se formalmente, la nozione di *prodotto tensore* di spazi di Hilbert  $H = H_1 \otimes H_2$ , come l'insieme delle coppie ordinate  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in H_1 \times H_2$  dotato di operazioni vettoriali eseguite componente per componente, ovvero  $\alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + \beta(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) = (\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2, \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2)$  e di un prodotto interno definito da  $\langle(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)|(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2)\rangle = \langle\mathbf{u}_1|\mathbf{u}_2\rangle \langle\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2\rangle$ .

Si avrà quindi

$$\begin{aligned}\langle A \cdot B \rangle &= \langle \Psi | \hat{A} \otimes \hat{B} | \Psi \rangle = \frac{1}{2} {}_1\langle + | \hat{A} | + \rangle_1 {}_2\langle + | \hat{B} | + \rangle_2 + \frac{1}{2} {}_1\langle - | \hat{A} | - \rangle_1 {}_2\langle - | \hat{B} | - \rangle_2 - \\ &\quad \frac{1}{2} {}_1\langle + | \hat{A} | - \rangle_1 {}_2\langle - | \hat{B} | + \rangle_2 - \frac{1}{2} {}_1\langle - | \hat{A} | + \rangle_1 {}_2\langle + | \hat{B} | - \rangle_2\end{aligned}$$

Eseguendo i calcoli, l'espressione diventa

$$\begin{aligned}\langle A \cdot B \rangle &= \frac{1}{2} [-(a_x + ia_y)(b_x - ib_y) - (a_x - ia_y)(b_x + ib_y)] = \\ &= \frac{1}{2} (-2a_x b_x - 2a_y b_y) = -a_x b_x - a_y b_y\end{aligned}$$

da cui si ricava il risultato dell'espressione (3.3):

$$\langle A \cdot B \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

**Secondo esempio di applicazione:** Previsione quantistica per il rilevamento congiunto della polarizzazione di due fotoni che si propagano in direzione uguale ed opposta.

Consideriamo la situazione illustrata nel paragrafo 3.2, in cui si ha un sistema, composto da due fotoni emessi dalla stessa sorgente che si propagano in direzione  $\mathbf{z}$ , la cui funzione d'onda è data nella forma

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\mathbf{x}\rangle|\mathbf{x}\rangle + |\mathbf{y}\rangle|\mathbf{y}\rangle] \quad (\text{B.4})$$

In questa rappresentazione del vettore di stato viene messo in evidenza il fatto che la direzione di polarizzazione appartiene sicuramente al piano  $xy$ , poiché questa deve necessariamente essere ortogonale alla direzione di propagazione della particella.  $|\mathbf{x}\rangle$  e  $|\mathbf{y}\rangle$  rappresentano infatti gli stati corrispondenti alle due direzioni ortogonali di polarizzazione  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Date le direzioni  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  dei polarizzatori, misurando la polarizzazione dei due fotoni si otterrà per entrambi il risultato  $+1$  se la polarizzazione del fotone avviene parallelamente a quella del polarizzatore,  $-1$  se avviene perpendicolarmente. Quello che vogliamo calcolare sono le probabilità singole e congiunte di ottenere il risultato  $+1$  o  $-1$  per uno o per entrambi i fotoni. Per farlo possiamo, anche in questo caso, sfruttare la (B.2), utilizzando l'operatore di proiezione. Vediamo quindi, prima di tutto, com'è definito tale operatore.

Siano dati due sistemi,  $1$  e  $2$ , e degli opportuni spazi di Hilbert ad essi associati  $H^{(1)}$  e  $H^{(2)}$ .

**Definizione 1 (Operatore proiezione)** Data un'osservabile  $A$  i cui autovalori e autovettori sono rispettivamente  $a_k$  e  $|a_k\rangle$ , l'operatore che proietta lo stato del sistema complessivo sul sottospazio relativo all'autovalore  $a_i$  di  $A$  misurato solo sul sistema 1 è dato da

$$\Pi_i^{(1)} = |a_i\rangle\langle a_i| \otimes I^{(2)}$$

dove  $I^{(2)}$  è l'operatore identità di  $H^{(2)}$ .

Data poi una seconda osservabile  $B$  con autovalori e autovettori rispettivamente  $b_m$  e  $|b_m\rangle$ , l'operatore che proietta lo stato del sistema complessivo sul sottospazio relativo alla coppia di autovalori  $\{a_i, b_j\}$  associati rispettivamente alla grandezza  $A$ , misurata sul sistema 1, e alla grandezza  $B$ , misurata sul sistema 2, è dato da

$$\Pi_{ij} = |a_i\rangle\langle a_i| \otimes |b_j\rangle\langle b_j|$$

Osserviamo che calcolare la probabilità che una misurazione effettuata sul fotone 1 dia risultato  $+1$  equivale a proiettare il vettore di stato (B.4) sull'autospazio corrispondente a tale autovalore (lo stesso vale per  $-1$ ) e un ragionamento analogo si può fare anche per il fotone 2.

Consideriamo, ad esempio, il fotone 1 e supponiamo di voler determinare la sua polarizzazione tramite un'operazione di misura. Per comodità supponiamo che l'autovettore  $|\mathbf{x}\rangle$  coincida con il versore  $\mathbf{x}$  e l'autovettore  $|\mathbf{y}\rangle$  con il versore  $\mathbf{y}$ . Inoltre, sempre per semplificare i calcoli, poiché il risultato  $+1$  si ottiene in caso di polarizzazione parallela e  $-1$  in caso di polarizzazione ortogonale (alla direzione del polarizzatore ovviamente), si deduce immediatamente che gli autovettori corrispondenti sono

$$|+\rangle_a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \mathbf{a}_{\parallel}$$

relativo all'autovalore  $+1$ , e

$$|-\rangle_a = \begin{pmatrix} a_x \\ -a_y \end{pmatrix} = \mathbf{a}_{\perp}$$

relativo all'autovalore  $-1$ .

Ora abbiamo tutti gli elementi che ci servono. Chiamiamo  $P_+(\mathbf{a})$  la probabilità che il fotone 1 dia risultato  $+1$  (cioè che si rilevi il fotone quando il polarizzatore è parallelo al versore  $\mathbf{a}$ ) e andiamo a calcolarla usando l'operatore di proiezione sul sottospazio relativo. In questo caso l'operatore assume la forma

$$\Pi_+^{(1)} = |+\rangle_a \langle +| \otimes I$$

e quindi, dalla (B.2), otteniamo

$$P_+(\mathbf{a}) = \langle \Psi | \Pi_+^{(1)} | \Psi \rangle = \frac{1}{2} [ |\langle \mathbf{x} | + \rangle_a|^2 |\mathbf{x}|^2 + |\langle \mathbf{y} | + \rangle_a|^2 |\mathbf{y}|^2 + \\ + \langle \mathbf{x} | + \rangle_a \langle + | \mathbf{y} \rangle \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y} | + \rangle_a \langle + | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle ]$$

Lasciamo al lettore il compito di fare le opportune sostituzioni e di svolgere i conti. Quello che risulta è

$$P_+(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}$$

Analogamente è possibile calcolare anche le altre probabilità, e si troverà

$$P_-(\mathbf{a}) = P_+(\mathbf{b}) = P_-(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}$$

Quelle che abbiamo trovato sono le probabilità di rilevamento singolo per i due fotoni. Vediamo ora come si calcolano le previsioni quantistiche congiunte.

Innanzitutto osserviamo che calcolare la probabilità che le misurazioni delle polarizzazioni dei due fotoni diano entrambi risultato +1 equivale a proiettare il vettore di stato (B.4) sull'autospazio corrispondente a questa coppia di autovalori e un ragionamento analogo vale anche per tutte le altre combinazioni dei due risultati possibili.

Usiamo le stesse convenzioni di prima e aggiungiamo solo gli autovettori relativi ai due autovalori  $\pm 1$  per il secondo fotone. Per le stesse motivazioni discusse nel caso del fotone 1, gli autovettori per il fotone 2 sono

$$|+\rangle_b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \mathbf{b}_{\parallel}$$

relativo all'autovalore +1, e

$$|-\rangle_b = \begin{pmatrix} b_x \\ -b_y \end{pmatrix} = \mathbf{b}_{\perp}$$

relativo all'autovalore -1.

Ora, chiamiata  $P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  la probabilità congiunta di rilevare il risultato +1 per il fotone 1 e il risultato +1 per il fotone 2, la calcoliamo utilizzando (come prima) l'operatore di proiezione, che in questo caso avrà la forma

$$\Pi_{++} = |+\rangle_a \langle +| \otimes |+\rangle_b \langle +|$$

Sostituendo nella (B.2) otteniamo

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \langle \Psi | \Pi_{++} | \Psi \rangle = \\ = \frac{1}{2} [ |\langle x | + \rangle_a|^2 |\langle x | + \rangle_b|^2 + |\langle y | + \rangle_a|^2 |\langle y | + \rangle_b|^2 + \\ + \langle x | + \rangle_a \langle + | y \rangle \langle x | + \rangle_b \langle + | y \rangle + \langle y | + \rangle_a \langle + | x \rangle \langle y | + \rangle_b \langle + | x \rangle ]$$

Svolgendo tutti i prodotti scalari, si arriva all'espressione finale

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (a_x b_x + a_y b_y)^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \frac{1}{2} |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$$

da cui, tenendo presente che  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ , si ricava

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$$

Con un procedimento analogo è possibile dedurre anche

$$P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$$

e

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$$

**Osservazione 1** Senza dover ripetere tutti i conti, è sufficiente osservare che, per la simmetria del modello, si ha sicuramente

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

quindi, poiché per le proprietà delle leggi di probabilità deve essere

$$P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$$

possiamo concludere che

$$P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1 - 2P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{2} = \frac{1}{2} \sin^2 \widehat{\mathbf{a}\mathbf{b}}$$

# Bibliografia

- [1] P.Caldirola, R.Cirelli, G.M.Prosperi, *“Introduzione alla fisica teorica”*, Unione Tipografico-Editrice Torinese (UTET), Torino, 1982
- [2] A.Massiah, *“Quantum Mechanics”*, Dover Publications, 2000
- [3] A.Einstein, B.Podolsky, N.Rosen, *“Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”*, Phys.Rev.47, 1935
- [4] D.Bohm, Y.Aharonov, *“Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky”*, Phys.Rev.108, 1957
- [5] J.S.Bell, *“Speakable and unspeakable in quantum mechanics”*, Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, 1987
- [6] A.Aspect, *“Bell’s theorem: the naive view of an experimentalist”*, pubblicato in *“Quantum (Un)speakables-From Bell to Quantum information”*, A.Bertlmann and A.Zeilinger, Springer, 2000
- [7] G.Gamov, *“Trent’anni che sconvolsero la fisica”*, titolo originale *“Thirty years that shook physics”*, Science study series, Anchor Books Doubleday and Company, New York, 1966