Appendix C

ARITHMETIC AND COMBINATORIAL TOOLS

This appendix is mainly devoted to justifying a number of arithmetical and combinatorial formulæ and some estimates on numerical sequences that appear in the text.

C.1 Some notes on continued fraction

*** To be written, sooner or (most probably) later. ***

C.2 Combinatorial formulæ

C.2.1 Counting integer vectors

Let $k \in \mathbb{Z}^n$ be an integer vector. I shall denote its length by $|k| = |k_1| + \ldots + |k_n|$. The problem is to count the number of vector of a given length.

Lemma C.1: *We have*

$$\#\big\{k \in \mathbb{Z}^n_+ \,:\, |k| = s\big\} = \binom{s+n-1}{n-1} \ . \tag{C.1}$$

Proof. We construct a one-to-one correspondence between the set $\{k \in \mathbb{Z}^n_+ : |k| = s\}$ and the set of all permutations (with no repetitions) of s white balls and $n-1$ black balls. Let the balls to be disposed as, for instance

Here the $n-1$ black balls do split the set of the white ones into n groups containing $k_1, \ldots, k_n$, respectively, so that we have $k_1 + \ldots + k_n = s$. A black ball in the first place means that $k_1 = 0$. A black ball in the last place means that $k_n = 0$. Two consecutive black balls mean that one of the k_j is zero. It is immediate to realize that every vector

k with $|k| = s$ generates one such disposition. Vice-versa, every disposition determines a unique vector k with $|k| = s$. From combinatorial analysis we know that the number of distinct dispositions of s white balls and $n-1$ black balls is $\binom{s+n-1}{n-1}$. *Q.E.D.*

Exercise C.1: Prove that

$$(C.2) \qquad \#\big\{k \in \mathbb{Z}_+^n \,:\, |k| \le s\big\} = \binom{s+n}{n} \ . \qquad (C.2)$$

Hint: add one more black ball, ang forget all the white balls that lie on the right of the last black ball.

C.2.2 On a formula used in sect. 1.4.7

Let $\{a_1, \dots, a_k\}$ be a list of positive numbers. Denote by $\mathrm{Perm}\{a_1, \dots, a_k\}$ the set of all permutations of $\{a_1, \dots, a_k\}$, including repetitions. This set contains $k!$ lists.

Lemma C.2: *We have*

$$(C.3) \qquad \sum_{a \in \mathrm{Perm}\{a_1,\dots,a_k\}} \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}{a_1(a_1+a_2)\cdot \ldots \cdot (a_1+\ldots+a_k)} = 1 \ . \qquad (C.3)$$

Proof. The proof is by induction. For $k = 1$ the claim is trivially true. Assuming it to be true up to some $k-1$ with $k > 1$, let us prove that it holds true for k. Let us consider the set of the k lists obtained as cyclic permutations

$$\{a_1, \dots, a_k\} \,,\ \{a_k, a_1, \dots, a_{k-1}\} \,,\ \{a_2, \dots, a_k, a_1\} \ .$$

Keeping fixed the last index in each list we clearly have (with obvious notation for the concatenation of lists denoted with the union symbol)

$$\mathrm{Perm}\{a_1, \dots, a_k\} = \big\{\mathrm{Perm}\{a_1, \dots, a_{k-1}\} \cup \{a_k\}\big\} \cup \ldots \cup \big\{\mathrm{Perm}\{a_2, \dots, a_k\} \cup \{a_1\}\big\} \ .$$

Let us split the sum in (C.3) as

$$\sum_{\sigma \in \left\{\mathrm{Perm}\{a_1,\dots,a_{k-1}\}\cup\{a_k\}\right\}} \frac{\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{k-1} \cdot a_k}{\sigma_1(\sigma_1+\sigma_2)\cdot \ldots \cdot (\sigma_1+\ldots+\sigma_{k-1}+a_k)} + \ldots + \sum_{\sigma \in \left\{\mathrm{Perm}\{a_2,\dots,a_k\}\cup\{a_1\}\right\}} \frac{\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{k-1} \cdot a_1}{\sigma_1(\sigma_1+\sigma_2)\cdot \ldots \cdot (\sigma_1+\ldots+\sigma_{k-1}+a_1)} \ .$$

The first sum in the last expression is evaluated as

$$\frac{a_k}{a_1+\ldots+a_k} \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}\{a_1,\dots,a_{k-1}\}} \frac{\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_{k-1}}{\sigma_1(\sigma_1+\sigma_2)\cdot \ldots \cdot (\sigma_1+\ldots+\sigma_{k-1})} = \frac{a_k}{a_1+\ldots+a_k} \ ,$$

for we have $\sigma_1 + \ldots + \sigma_{k-1} + a_k = a_1 + \ldots + a_k$, independent of the permutation, and the sum is nothing but the l.h.s. of (C.3) for a list of $k-1$ numbers, which is 1 in view of the induction hypothesis. Similarly, the others sums give $\frac{a_1}{a_1+\ldots+a_k}, \dots, \frac{a_{k-1}}{a_1+\ldots+a_k}$, so that the claim follows by adding up all the k contributions. *Q.E.D.*

If the numbers $a_1, \ldots, a_k$ are not all distinct, then $\mathrm{Perm}\{a_1, \ldots, a_k\}$ contains repetitions. Thus, let us consider the subset $\mathrm{Perm}^*\{a_1, \ldots, a_k\}$ with no repetitions.

If the numbers $a_1, \ldots, a_k$ are not all distinct, then $\mathrm{Perm}\{a_1, \ldots, a_k\}$ contains repetitions. Thus, let us consider the subset $\mathrm{Perm}^*\{a_1, \ldots, a_k\}$ with no repetitions.

Lemma C.3: *Let the list $\{a_1, \ldots, a_k\}$ be ordered so that $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$, and assume that there are m_1 elements equal to a_1, followed by m_2 elements equal to a_{1+m_1}, ..., followed by $m_{k'}$ elements equal to the last onex, with $k' \leq k$ and $m_1 + \ldots + m_{k'} = k$. Then we have*

$$(C.4) \qquad \sum_{a \in \mathrm{Perm}^*\{a_1,\ldots,a_k\}} \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_k}{a_1(a_1+a_2) \cdot \ldots \cdot (a_1 + \ldots + a_k)} = \frac{1}{m_1! \cdot \ldots \cdot m_{k'}!} \ .$$

The proof is based on a well known formula from combinatorial analysis, according to which the number of lists in $\mathrm{Perm}^*\{a_1, \ldots, a_k\}$ is $m_1! \cdot \ldots \cdot m_{k'}!$.

C.2.3 A formula for multinomial coefficients

Let us consider the multinomial coefficient

$$(C.5) \qquad \binom{s}{p_1, \ldots, p_r} = \frac{s!}{p_1! \cdot \ldots \cdot p_r! \, (s - p_1 - \ldots - p_r)!} \ , \quad p_1 + \ldots + p_r \leq s \ .$$

Lemma C.4: *We have*

$$(C.6) \qquad \sum_{\substack{p_1 + 2p_2 + \ldots + rp_r = r \\ p_1 + \ldots + p_r \leq s}} \binom{s}{p_1, \ldots, p_r} = \binom{s-1+r}{r} \ .$$

Proof. Suppose we want to distribute r balls in s boxes (or r pigeons in s pigeonholes). Pick one such distribution. There will be p_1 boxes that contain one ball, p_2 boxes that contain two balls, ... p_r boxes that contain r balls, so that $p_1 + 2p_2 + \ldots + rp_r = r$ and $r \leq s$. Thus $p_0 = s - p_1 - \ldots - p_r$ will be the number of empty boxes, which is non negative. By an arbitrary permutation of the boxes we obtain an equivalent distribution with the same numbers $p_1, \ldots, p_r$ but with a different order of the boxes and by removing repetitions we have a total of $\frac{s!}{p_1! \ldots p_r! \, p_0!}$ distinct distributions. By letting $p_1, \ldots, p_r$ to assume all possible values satisfying the condition $p_1 + 2p_2 + \ldots + rp_r = r$ the total number of distributions is given by the left member of (C.6). An equivalent manner of producing all possible distribution is the following. Let the r balls to be white, and proceed as follows. Align all the balls of the first box, then put a black ball, then align all the balls of the second box and put a back ball, ..., then align all the balls of the s–th box (with no black ball at the end). An empty box will correspond to two consecutive black balls. Thus, every different distribution of the balls into the boxes produces an unique alignment of r white balls and $s - 1$ black balls. Vice-versa, every such an alignment corresponds to an unique distribution of the balls into the boxes. Thus the number of different distributions

coincides with the number of different alignments, the latter being $\binom{s-1+r}{r}$, namely the right member of the wanted equality.[1] *Q.E.D.*

For readers who do not like combinatorial arguments I give here a different proof based on analytical considerations. The main remark is that the left member of (C.6) is the coefficient of the monomial x^r in the Taylor expansion of the function

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^s} = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)^s \ .$$

For writing the power as

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + \ldots) \cdot \ldots \cdot (1 + x + x^2 + \ldots)}_{s \text{ times}}$$

the coefficient of x^r is found as follows. Choose one monomial from each parenthesis and multiply them together, thus getting a monomial x^m for some m with coefficient 1. In order to satisfy $m = r$ we must choose p_1 times the monomial x, then p_2 times the monomial $x^2, \ldots$, then p_r times the monomial x^r with the constraint $p_1 + 2p_2 + \ldots + rp_r = r$, and finally add $p_0 = s - p_1 - \ldots - p_r$ times the monomial $x^0 = 1$. This may be made in $\frac{s!}{p_1! \cdot \ldots \cdot p_r!\, p_0!}$ manners. Adding up over the indices $p_1, \ldots, p_r$ we get the left member of (C.6). Let us now calculate the derivatives of the function $(1-x)^{-s}$, namely

$$\frac{df}{dx} = \frac{s}{(1-x)^{s+1}} \ , \ldots , \ \frac{d^r f}{dx^r} = \frac{s(s+1) \cdot \ldots \cdot (s-1+r)}{(1-x)^{s+r}} \ .$$

Thus the coefficient of x^r in the Taylor expansion is

$$\frac{s(s+1) \cdot \ldots \cdot (s-1+r)}{r!} = \binom{s-1+r}{r} \ ,$$

namely the right member of (C.6). This concludes the proof

C.3 On the accumulation of small divisors

This section is devoted to a detailed discussion of the mechanism of accumulation of small divisors in perturbation series. This techical part is used in different chapters, possibly with minor *variazioni*. For this reason, in order to make it available independently of the actual application, I decided to move it to a separate section in this appendix.

C.3.1 Lists of indices

Let us call the list $I = \{j_1, \ldots, j_s\}$ with non negative integers $j_1, \ldots, j_s$ a *list of indices*. A partial ordering on the lists is introduced as follows. Let $I = \{j_1, \ldots, j_s\}$ and $I' = \{j'_1, \ldots, j'_s\}$ be two lists of indices with the same number s of elements. *I shall say that I precedes I′ and write* $I \lhd I'$ *in case there is a permutation of the indices such that the relation* $j_m \leq j'_m$ *holds true for* $m = 1, \ldots, s$. For instance, we

[1] This elegant proof, which is based on purely combinatorial arguments, has been pointed out to me by Marco Sansottera.

have $\{1,1,3\} \lhd \{1,2,3\}$, while the lists $\{1,1,3\}$ and $\{1,2,2\}$ are not comparable. If two sets of indices contain a different number of elements we pad the shorter one with zeros, and use the same definition. An elementary method of comparison is to order both lists, e.g., in increasing order, and comparing element by element.

A special role will be played by the lists of indices

$$I_s^* = \left\{ \left\lfloor \frac{s}{s} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{s}{s-1} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor \right\} , \quad s \geq 1 . \tag{C.7}$$

Lemma C.5: *For the set of indices $I_s^* = \{j_1, \ldots, j_s\}$ the following statements hold true:*

(i) the maximal index is $j_{\max} = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$;

(ii) for every $k \in \{1, \ldots, j_{\max}\}$ the index k appears exactly $\lfloor \frac{s}{k} \rfloor - \lfloor \frac{s}{k+1} \rfloor$ times;

(iii) for $0 < r \leq s$ one has

$$\big(\{r\} \cup I_r^* \cup I_s^*\big) \lhd I_{r+s}^* .$$

Proof. The claim (i) is a trivial consequence of the definition.
(ii) For each fixed value of $s > 0$ and $1 \leq k \leq \lfloor s/2 \rfloor$, we have to determine the cardinality of the set $M_{k,s} = \{m \in \mathbb{N} : \ 2 \leq m \leq s \,, \ \lfloor s/m \rfloor = k\}$. For this purpose, we use the trivial inequalities

$$\left\lfloor \frac{s}{\lfloor s/k \rfloor} \right\rfloor \geq k \quad \text{and} \quad \left\lfloor \frac{s}{\lfloor s/k \rfloor + 1} \right\rfloor < k .$$

After having rewritten the same relations with $k+1$ in place of k, one immediately realizes that: *$m \in M_{k,s}$ if and only if $m \leq \lfloor s/k \rfloor$ and $m \geq \lfloor s/(k+1) \rfloor + 1$*. Therefore $\# M_{k,s} = \lfloor \frac{s}{k} \rfloor - \lfloor \frac{s}{k+1} \rfloor$.
(iii) Since $r \leq s$, the definition in (C.8) implies that neither $\{r\} \cup I_r^* \cup I_s^*$ nor I_{r+s}^* can include any index exceeding $\lfloor (r+s)/2 \rfloor$. Thus, let us define some finite sequences of non-negative integers as follows:

$$\begin{aligned} R_k &= \#\big\{j \in I_r^* \,:\, j \leq k\big\} , & S_k &= \#\big\{j \in I_s^* \,:\, j \leq k\big\} , \\ M_k &= \#\big\{j \in \{r\} \cup I_r^* \cup I_s^* \,:\, j \leq k\big\} , & N_k &= \#\big\{j \in I_{r+s}^* \,:\, j \leq k\big\} , \end{aligned}$$

where $1 \leq k \leq \lfloor (r+s)/2 \rfloor$. When $k < r$, the property (ii) of the present lemma allows us to write

$$R_k = r - \left\lfloor \frac{r}{k+1} \right\rfloor , \quad S_k = s - \left\lfloor \frac{s}{k+1} \right\rfloor , \quad N_k = r + s - \left\lfloor \frac{r+s}{k+1} \right\rfloor ;$$

using the elementary estimate $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$, from the equations above it follows that $M_k \geq N_k$ for $1 \leq k < r$. In the remaining cases, i.e., when $r \leq k \leq \lfloor (r+s)/2 \rfloor$, we have that

$$R_k = r - 1 , \quad S_k = s - \left\lfloor \frac{s}{k+1} \right\rfloor , \quad N_k = r + s - \left\lfloor \frac{r+s}{k+1} \right\rfloor ;$$

therefore, $M_k = 1 + R_k + S_k \geq N_k$. Since we have just shown that $M_k \geq N_k \ \forall \ 1 \leq k \leq \lfloor (r+s)/2 \rfloor$, it is now an easy matter to complete the proof. Let us first imagine to have reordered both the set of indices $\{r\} \cup I_r^* \cup I_s^*$ and I_{r+s}^* in increasing order;

moreover, let us recall that $\#\big(\{r\}\cup I^*_r\cup I^*_s\big)=\#I^*_{r+s}=r+s-1$, because of the definition in (C.8). Thus, since $M_1\geq N_1$, every element equal to 1 in $\{r\}\cup I^*_r\cup I^*_s$ has a corresponding index in I^*_{r+s} the value of which is at least 1. Analogously, since $M_2\geq N_2$, every index 2 in $\{r\}\cup I^*_r\cup I^*_s$ has a corresponding index in I^*_{r+s} which is at least 2, and so on up to $k=\lfloor(r+s)/2\rfloor$. We conclude that $\{r\}\cup I^*_r\cup I^*_s\triangleleft I^*_{r+s}$. *Q.E.D.*

C.3.2 Lists controlling the accumulation of small divisors

For given positive integers $r<s$ let us consider the set

$$(C.8)\qquad \mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}=\big\{I=\{j_1,\dots,j_{s-1}\}\,:\,j_m\in\{0,\dots,\min(r,s/2)\}\,,\ I\triangleleft I^*_s\big\}\ .$$

These sets do play a crucial role in the process of accumulation of small divisors. In these notes condition $I\triangleleft I^*_s$ is referred to as the *selection rule* γ, which is recalled by the upper label. The relevant properties are stated by the following

Lemma C.6: *For the sets of indices $\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}$ the following statements hold true:*
(i) $\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r-1,s}\subset\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}$ *;*
(ii) if $I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r-1,r}$ *and* $I'\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}$ *then we have* $\big(\{r\}\cup I\cup I'\big)\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,r+s}$.

Proof. (i) is immediately checked in view of the definition of $\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}$.
(ii) We have $\#\big(\{r\}\cup I\cup I'\big)=1+\#(I)+\#(I')=1+r-1+s-1=r+s-1$. For $j\in\{r\}\cup I\cup I'$ we also have $1\leq j\leq r$ because this is true for all $j\in I$ and for all $j\in I'$, and we just add an extra index r. Since $r<s$, we also have $r=\min\big(r,(r+s)/2\big)$, as required. Coming to the selection rule S we remark that $\{r\}\cup I\cup I'\triangleleft\{r\}\cup I^*_r\cup I^*_s$ readily follows from $I\triangleleft I^*_r$ and $I'\triangleleft I^*_s$, which are true in view of $I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r-1,r}$ and $I'\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}$, so that the claim follows from property (iii) of lemma C.5. *Q.E.D.*

Let now $\sigma_0=1$ and let $\{\sigma_r\}_{r\geq0}$ be a non increasing sequence of real numbers. The sequence may well tend to zero, as it actually happens if it is a sequence of small divisors.

Let us associate to the sets of indices $\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}$ the sequence of positive real numbers $T_{r,s}$ defined as

$$(C.9)\qquad T_{0,s}=1\ ,\quad T_{r,s}=\max_{I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}}\prod_{j\in I}\frac{1}{\sigma_j}\ ,\quad 0<r\leq s\ .$$

Lemma C.7: *The sequence $T_{r,s}$ satisfies the following properties for $1\leq r\leq s$:*
(i) $T_{r-1,s}\leq T_{r,s}$ *;*
(ii) $\frac{1}{\sigma_r}T_{r-1,r}T_{r,s}\leq T_{r,r+s}$.

Proof. (i) From property (i) of lemma C.6 we readily get

$$T_{r-1,s}=\max_{I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r-1,s}}\prod_{j\in I}\frac{1}{\sigma_j}\leq\max_{I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}}\prod_{j\in I}\frac{1}{\sigma_j}\ ,$$

since the maximum is evaluated over a larger set of indices.

(ii) Compute

$$\frac{1}{\sigma_r}T_{r-1,r}T_{r,s} = \frac{1}{\sigma_r}\max_{I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r-1,r}}\prod_{j\in I}\frac{1}{\sigma_j}\max_{I'\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}}\prod_{j'\in I'}\frac{1}{\sigma_{j'}}$$
$$= \max_{I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r-1,r}}\max_{I'\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}}\prod_{j\in\{r\}\cup I\cup I'}\frac{1}{\sigma_j} \le \max_{I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,r+s}}\prod_{j\in I}\frac{1}{\sigma_j} = T_{r,r+s}\ ,$$

where in the inequality of the last line property (ii) of lemma C.6 has been used. *Q.E.D.*

C.3.3 Products of small divisors

The problem now is to find a condition assuring that the sequence $\{T_{r,s}\}$ does not grow too fast with s even if the sequence σ_r tends to zero. Actually we look for a geometric bound.

Condition $\boldsymbol{\tau}$: *The sequence σ_r satisfies*

$$-\sum_{r\ge1}\frac{\ln\sigma_r}{r(r+1)} = \Gamma < \infty\ . \tag{C.10}$$

Lemma C.8: *Let the sequence $\{\sigma_r\}$ satisfy condition $\boldsymbol{\tau}$. Then the sequence $T_{r,s}$ is bounded by*

$$T_{r,s} \le e^{s\Gamma}\ , \quad \frac{1}{\sigma_s}T_{r,s} \le e^{s\Gamma}\ .$$

Proof. In view of $\sigma_s \le 1$ it is enough to prove the second inequality. We use property (ii) of lemma C.7 and the selection rule S. We readily get

$$\frac{1}{\sigma_s}T_{r,s} = \frac{1}{\sigma_s}\max_{I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}}\prod_{j\in I}\frac{1}{\sigma_j} \le \max_{I\in\mathscr{J}^{(\gamma)}_{r,s}}\prod_{j\in\{s\}\cup I}\frac{1}{\sigma_j} \le \prod_{j\in\{s\}\cup I^*_s}\frac{1}{\sigma_j}\ .$$

By property (ii) of lemma C.6 the latter product is evaluated as

$$\prod_{j\in\{s\}\cup I^*_s}\frac{1}{\sigma_j} = \left[\sigma_1^{q_1}\cdot\ldots\cdot\sigma_{\lfloor s/2\rfloor}^{q_{\lfloor s/2\rfloor}}\sigma_s^{q_s}\right]^{-1}\ ,$$

where $q_k = \left\lfloor\frac{s}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{s}{k+1}\right\rfloor$ is the number of indices in I^*_s which are equal to k. Since the sequence σ_r is not increasing we have (see remark below)

$$\ln\frac{1}{\sigma_r}T_{r,s} \le -\sum_{k=1}^{s}\left(\left\lfloor\frac{s}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{s}{k+1}\right\rfloor\right)\ln\sigma_k \le -s\sum_{k\ge1}\frac{\ln\sigma_k}{k(k+1)} = s\Gamma\ .$$

This concludes the proof. *Q.E.D.*

Remark. A meticulous reader may be puzzled by the replacement of $q_k = \left\lfloor\frac{s}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{s}{k+1}\right\rfloor$ with $\frac{s}{k} - \frac{s}{k+1}$ in the last formula of the proof. I show here that it is correct. Set $a_k = -\ln\sigma_k$,

and remark that the sequence a_k is not decreasing (in view of σ_k being not increasing). Set also $p_k = \frac{s}{k} - \frac{s}{k+1}$. The wanted inequality reads

$$\sum_{k\geq 1} q_k a_k \leq \sum_{k\geq 1} p_k a_k \ ,$$

and this is what I'm going to show. Remark that, by definition, we have

$$q_k = \left(\frac{s}{k} - \left\{\frac{s}{k}\right\}\right) - \left(\frac{s}{k+1} - \left\{\frac{s}{k+1}\right\}\right) = p_k - \left\{\frac{s}{k}\right\} + \left\{\frac{s}{k+1}\right\} \ ,$$

where $\{s/k\}$ denotes the fractional part of s/k. In view of $\{s/1\} = 0$ calculate

$$\sum_{k\geq 1} q_k a_k = \sum_{k\geq 1} \left(p_k + \left\{\frac{s}{k+1}\right\}\right) a_k - \sum_{k\geq 2} \left\{\frac{s}{k}\right\} a_k \ .$$

Replacing the index k with $k+1$ in the last sum and recalling that a_k is not decreasing get

$$\sum_{k\geq 2} \left\{\frac{s}{k}\right\} a_k = \sum_{k\geq 1} \left\{\frac{s}{k+1}\right\} a_{k+1} \geq \sum_{k\geq 1} \left\{\frac{s}{k+1}\right\} a_k \ ,$$

and replace this in the previous formula, thus getting

$$\sum_{k\geq 1} q_k a_k \leq \sum_{k\geq 1} \left(p_k + \left\{\frac{s}{k+1}\right\}\right) a_k - \sum_{k\geq 1} \left\{\frac{s}{k+1}\right\} a_k = \sum_{k\geq 1} p_k a_k \ ,$$

namely the wanted inequality.

Corollary C.9: *Let the sequence $\{\alpha_r\}_{r\geq 0}$ with $\alpha_0 = 1$ be non increasing and satisfy condition $\boldsymbol{\tau}$. Let $\sigma_0 = 1$ and $\sigma_r = \alpha_r / r^m$ with $m > 0$. Then the sequence $T_{r,s}$ is bounded by*

$$T_{r,s} \leq \gamma^s e^{s\Gamma} \ , \quad \frac{1}{\sigma_s} T_{r,s} \leq \gamma^s e^{s\Gamma}$$

with some positive constant γ not depending on the sequence $\{\alpha_r\}$.

Proof. The proof is a minor *variazione* with respect to that of lemma C.8. Just replace the last formula of that proof with

$$\ln \frac{r^m}{\alpha_r} T_{r,s} \leq -\sum_{k=1}^{s} \left(\left\lfloor \frac{s}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{s}{k+1} \right\rfloor\right) (\ln \alpha_k - m \ln k) \leq -s \sum_{k\geq 1} \frac{\ln \alpha_k - m \ln k}{k(k+1)} = s(\Gamma + a) \ ,$$

where $a = \sum_{k\geq 1} \frac{m \ln k}{k(k+1)} < \infty$ is clearly independent of the sequence $\{\alpha_r\}$. The claim follows by just setting $\gamma = e^a$. *Q.E.D.*

C.4 La successione di Catalan

La successione di Catalan compare frequentemente nello studio di problemi di carattere

combinatorio. Viene definita per ricorrenza come[2]

$$\mu_1 = 1 \ , \quad \mu_r = \sum_{j=1}^{r-1} \mu_j \mu_{r-j} \tag{C.11}$$

Il nome di deve appunto allo studio di un problema di carattere combinatorio affrontato e risolto dal matematico belga Eugène Charles Catalan (30 maggio 1814, 14 febbraio 1894).

C.4.1 Il calcolo della successione

Un calcolo rapido mostra che i primi termini della successione sono

1	1	2	5	14
42	132	429	1430	4862
16796	58786	208012	742900	2674440
9694845	35357670	129644790	477638700	1767263190
6564120420	24466267020	91482563640	343059613650	1289904147324
4861946401452	...			

Si conosce anche un'espressione esplicita per ciascun termine, ossia

$$\mu_r = \frac{2^{r-1}(2r-3)!!}{r!} \tag{C.12}$$

dove ho fatto uso della notazione $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)$ per il cosiddetto *semifattoriale*, oppure, evitando l'uso del semifattoriale, con l'espressione

$$\mu_r = \frac{1}{r} \binom{2(r-1)}{r-1}$$

equivalente alla precedente. Non è difficile, facendo uso della formula di Stirling per il fattoriale, mostrare che asintoticamente vale

$$\mu_r \simeq \frac{4^{r-1}}{r^{3/2}\sqrt{\pi}} \ .$$

In queste note basta comunque la maggiorazione più grossolana

$$\mu_r \leq 4^{r-1} \ . \tag{C.13}$$

Per dedurre la formula (C.12) si fa ricorso al metodo della cosiddetta *funzione generatrice*. Si definisce la funzione $g(z) = \sum_{r\geq 1} \mu_r z^r$; ne segue subito che $\mu_r = g^{(r)}(0)/r!$. Calcolando

$$g^2(z) = \sum_{r>1} z^r \sum_{j=1}^{r-1} \mu_j \mu_{r-j}$$

[2] Nella letteratura si trova spesso la lettera C, che ho evitato perché in queste note viene sistematicamente usata per denotare delle costanti, e si fanno partire gli indici da zero.

si osserva subito che deve valere la relazione funzionale

$$g = z + g^2 \ . \tag{C.14}$$

Derivando quest'ultima relazione si trova $g' = 1 + 2gg'$, e risolvendo rispetto a g' si ha

$$g' = \frac{1}{1-2g} \ .$$

Calcolando un altro paio di derivate si indovina che deve valere

$$g^{(r)} = \frac{2^{r-1}(2r-3)!!}{(1-2g)^{2r-1}} \ ;$$

quest'ultima relazione si verifica direttamente per induzione. Da qui, tenuto conto che $g(0) = 0$, si ricava la (C.12).

Un modo equivalente per ricavare lo stesso risultato consiste nel risolvere la (C.14) rispetto a g, ottenendo $g(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2}$. Poiché, per come la funzione è definita, deve essere $g(0) = 0$ si trova poi

$$g(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2} \ .$$

Si applica infine la formula della potenza del binomio (o, equivalentemente, lo sviluppo in serie di potenze della radice) che dà in forma esplicita i coefficienti.

C.4.2 Il problema di Catalan

Il problema proposto da Catalan era il seguente: *stabilire in quanti modi si può ricondurre il prodotto di r fattori ad una successione di prodotti a coppie.* Ad esempio, il prodotto di tre fattori $a \cdot b \cdot c$ può scriversi sia come $(ab)c$ che come $a(bc)$, sicché si possono trovare due successioni distinte. Analogamente, il prodotto di quattro fattori $a \cdot b \cdot c \cdot d$ può raccogliersi in 5 modi, ossia $((ab)c)d$, $(a(bc))d$, $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$ e $a(b(cd))$.

L'esempio mostra immediatamente che il problema può enunciarsi anche nel modo seguente: *stabilire in quanti modi si possono disporre $r-1$ coppie di parentesi in modo che siano annidate correttamente.* In altre parole, ogni parentesi chiusa deve essere preceduta da una parentesi aperta che le corrisponde. In ambedue i casi il numero cercato è μ_r, come definito dalla successione (C.11).

Il problema appena enunciato può porsi in diverse altre forme. Qui ne prendo in considerazione una che risulta particolarmente comoda. Consideriamo una successione di n coppie di simboli $+1$, -1, disposti in modo arbitrario; per brevità dirò che una successione che contiene $2n$ simboli ± 1 ha lunghezza $2n$. Rappresentiamo la successione in grafico come segue: detto k_j il j–esimo simbolo, contato a partire da 1, definiamo $s_0 = 0$ e $s_j = k_1 + \ldots + k_j$, sicché abbiamo $2n+1$ valori interi che riportiamo nel grafico come funzione di j. Ad esempio, posto $n = 8$ consideriamo la successione

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} k_j : & & +1, & -1, & -1, & +1, & +1, & -1, & +1, & +1, & +1, & -1, & -1, & +1, & -1, & -1, & -1, & +1\,; \\ s_j : & 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 2, & 3, & 2, & 1, & 2, & 1, & 0, & -1, & 0\,. \end{array}$$

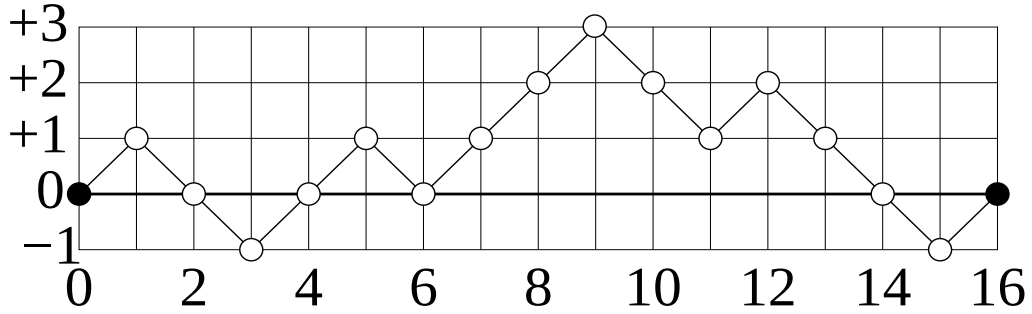

Figure C.1. Ad illustrazione della rappresentazione grafica di una successione di numeri ± 1.

Questa viene rappresentata graficamente come in figura C.1. La condizione che si tratti di coppie di numeri ± 1 impone il vincolo che il grafico si annulli agli estremi, il che è messo in evidenza dai pallini neri. Per il resto il grafico viene tracciato pensando di percorrere un cammino muovendosi di un passo diagonale verso l'alto se il numero è $+1$ e verso il basso se è -1.

Se ora sostituiamo $+1$ con una parentesi aperta e -1 con una parentesi chiusa abbiamo una successione di n coppie di parentesi. Ad esempio, la successione di ± 1 che abbiamo appena considerato si tradurrebbe nella successione di parentesi aperte e chiuse

$$)\,)\,(\,)\,(\,(\,(\,)\,)\,(\,)\,)\,)\,($$

che palesemente non sono annidate correttamente. Con un momento di riflessione ci rendiamo subito conto che le parentesi sono annidate in modo corretto se e solo se il grafico non scende mai sotto lo zero.

Possiamo quindi riformulare il problema di Catalan come segue: *stabilire quante siano le successioni distinte* $k_1, \ldots k_{2(r-1)}$ *di* $2(r-1)$ *simboli* $+1$, -1 *tali che il grafico della successione* $s_0, \ldots, s_{2(r-1)}$ *definita come sopra si annulli agli estremi e non assuma mai valori negativi.* Per brevità dirò che una successione è ammessa se il suo grafico soddisfa le proprietà appena enunciate.

Nel seguito ci sarà utile la proprietà seguente, del resto immediata: *ogni successione ammessa inizia necessariamente con il simbolo* $+1$ *e termina col simbolo* -1 . Tradotta in grafico, questa proprietà significa che il primo passo è necessariamente verso l'alto, e l'ultimo verso il basso.

Veniamo ora al calcolo del numero di successioni distinte, con l'obiettivo di mostrare che tale numero è proprio μ_r, come definito dalla successione di Catalan (C.11). Questo richiede alcune considerazioni.

Ci sarà d'aiuto la figura C.2 dove sono rappresentati i grafici per $r = 1, \ldots, 5$. Per $r = 1$ si ha una successione vuota, che è rappresentata graficamente dal solo punto $s_0 = 0$. Diciamo che in questo caso abbiamo una sola possibilità, corrispondente a $\mu_1 = 1$. Per $r = 2$ si ha un solo grafico privo di punti negativi; quindi abbiamo $\mu_2 = 1$. Per $\mu > 2$ ci serve un algoritmo costruttivo che ci permetta di individuare tutte le successioni ammesse. Dico che *ogni successione ammessa di lunghezza* $2(r-1)$ *può costruirsi componendo in modo univoco tutte le coppie di successioni ammesse di*

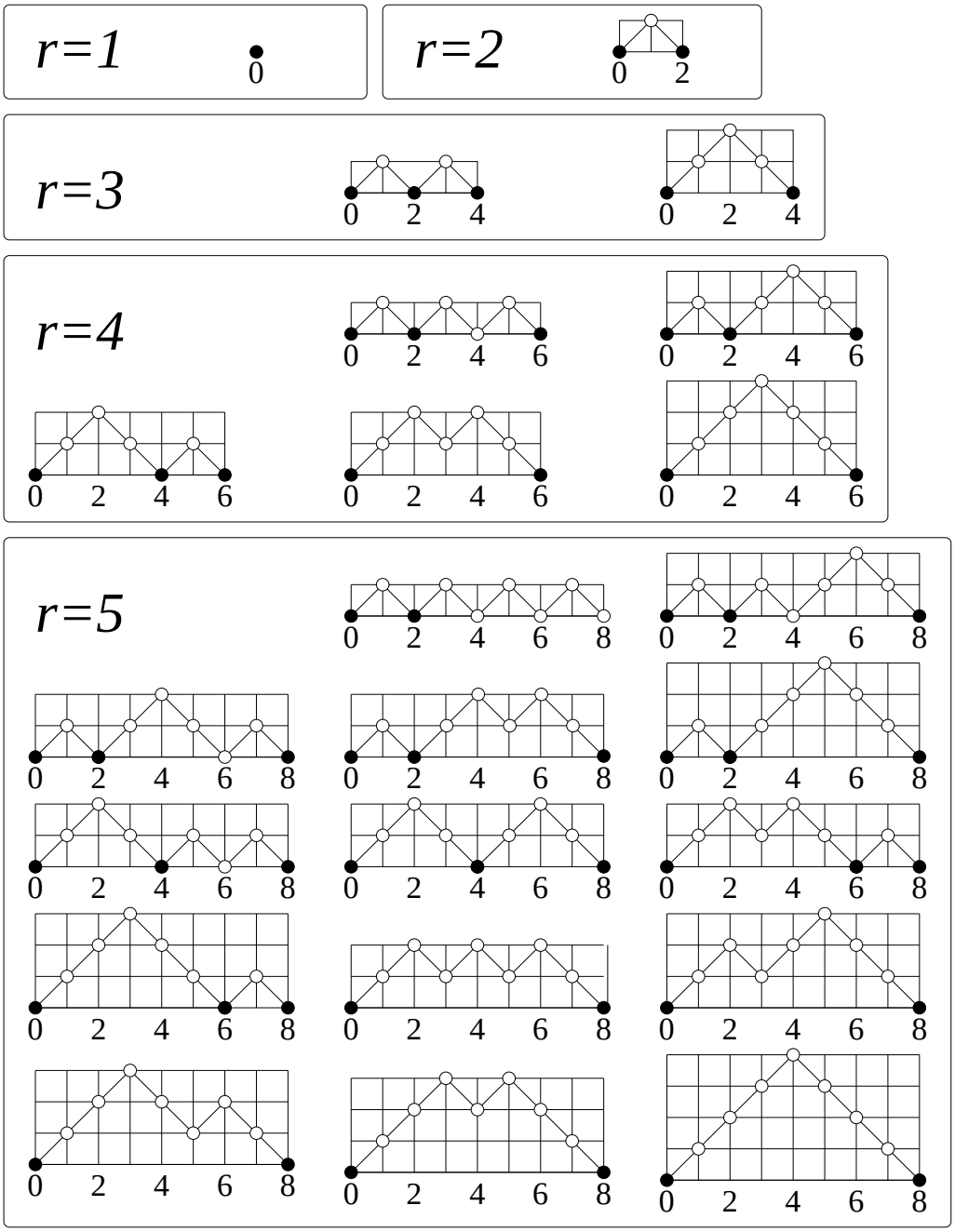

Figure C.2. I grafici che rappresentano tutte le possibili successioni di simboli $+1$, -1 di lunghezza $2(r-1)$, per $r = 1, \ldots, 5$. I pallini neri identificano gli estremi, ove il grafico si annulla, ed il primo punto di contatto. I grafici di lunghezza $2(r-1)$ vengono costruiti fissando $m \in \{1, \ldots, r-1\}$ e concatenando, a partire da sinistra: il punto iniziale (il pallino nero sullo zero); un grafico di lunghezza $2(m-1)$ traslato di una casella verso l'alto; un grafico di lunghezza $2(r-m-1)$. L'insieme completo si ottiene facendo scorrere tutti i possibili valori di m e tutti i grafici di lunghezza rispettivamente $2(m-1)$ e $2(r-m-1)$.

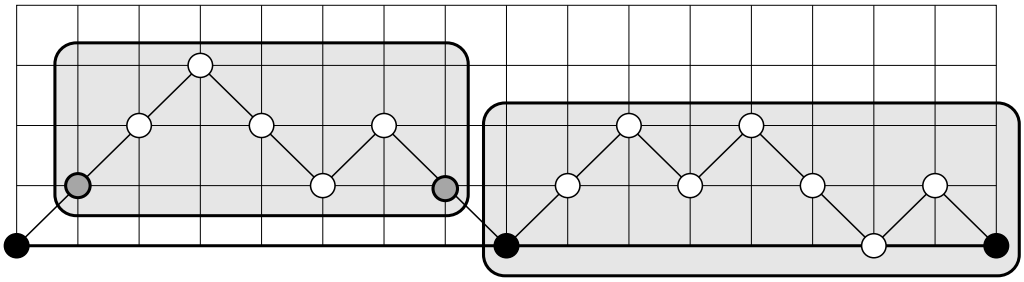

Figure C.3. Ad illustrazione dell'algoritmo di costruzione di una successione ammessa combinando una coppia di successioni ammesse.

lunghezza rispettivamente $2(m-1)$ *e* $2(r-m-1)$. Il senso di questa affermazione può essere, in questo momento, un po' oscuro, ma si chiarirà probabilmente durante la lettura del testo che segue.

Consideriamo il grafico di una successione, ad esempio uno qualsiasi tra quelli della figura C.2 oppure quello di figura C.3. Conveniamo di chiamare *punto di contatto* del grafico ogni valore j per cui si abbia $s_j = 0$, ossia il punto in cui il grafico tocca l'asse orizzontale. Si comprende immediatamente che j deve essere un numero pari, perché una somma di numeri ± 1 si annulla se e solo se contiene tanti $+1$ quanti -1. Dato un grafico qualsiasi, identifichiamo il primo punto di contatto partendo dall'estremo sinistro, che non consideriamo, e procedendo verso destra, e sia $2m$ il suo indice. Nei grafici di figura C.2 tale punto è sempre rappresentato con un pallino nero. Si vede subito che m può assumere i valori $1, \dots r-1$; nell'ultimo caso il punto di contatto coincide con l'estremo destro del grafico.

Consideriamo ora il sottinsieme dei punti $s_1, \dots, s_{2m-1}$ (nel grafico di figura C.3 sono i punti contenuti nel rettangolo di sinistra). Questi producono un grafico di $2m-1$ punti che assume il valore 1 agli estremi e non scende mai sotto il valore 1. Traslando tutto il grafico verso il basso di 1 si ottiene dunque un grafico che rappresenta una successione ammessa di lunghezza $2(m-1)$, determinata in modo univoco. D'altra parte anche i punti $s_{2m}, \dots, s_{2(r-1)}$ (contenuti nel rettangolino a destra in figura C.3) formano una successione ammessa di lunghezza $2(r-m-1)$, perché il grafico si annulla agli estremi e non ha valori negativi, ed anche questa successione è determinata in modo univoco. Dunque *ogni successione di lunghezza* $2(r-1)$ *è scomponibile in modo unico in due sottosuccessioni di lunghezza rispettivamente* $2(m-1)$ *e* $2(r-m-1)$, *essendo* $2m$ *il primo punto di contatto.*

Mostriamo ora che anche l'inverso è vero. Precisamente, fissato $m \in \{1, \dots, r-1\}$ consideriamo una qualuque successione ammessa di lunghezza $2(m-1)$ e completiamola aggiungendo a sinistra un simbolo $+1$ ed a destra un simbolo -1. Prendiamo poi una qualunque successione ammessa di lunghezza $2(r-m-1)$, e concateniamola a destra alla precedente. Otteniamo in tal modo un'unica successione ammessa di lunghezza $2(r-1)$. Concludiamo dunque che *le successioni ammesse di lunghezza* $2(r-1)$ *sono tutte e sole quelle che si possono costruire col metodo di composizione appena illustrato.*

Il conteggio a questo punto è cosa semplice. Sia μ_s il numero di successioni

ammesse di lunghezza $2(s-1)$. Per un $m \in \{1, \dots, r-1\}$ fissato, il numero di successioni ammesse di lunghezza $2(r-1)$ è pari al prodotto $\mu_m \mu_{r-m}$. Sommando i contributi corrispondenti a tutti i valori possibili di m otteniamo dunque

$$\mu_r = \sum_{m=1}^{r-1} \mu_m \mu_{r-m} \ ,$$

che unita a $\mu_1 = 1$ è proprio la definizione ricorrente della successione di Catalan.

C.5 Successioni numeriche utili

In questo paragrafo ho raccolto alcune successioni numeriche che vengono utilizzate nel testo, ricavando le stime necessarie.

C.5.1 Stima della successione (2.52)

Riprendiamo la successione (2.52), che riscrivo per comodità:

$$\begin{aligned} &\nu_{0,0} = 0 \ , \quad \nu_{0,s} = 1 \ , \\ &\nu_{r,s} = \sum_{p=0}^{\lfloor s/r \rfloor - 1} \nu_{r-1,r}^{p} \nu_{r-1,s-rp} \\ &\qquad\qquad \text{per } 0 < r < s \ . \end{aligned}$$

L'obiettivo è dare una stima numerica esplicita degli elementi della diagonale $\nu_{r-1,r}$, che ci interessano perché ci permettono di dare una stima delle norme dei campi vettoriali.

È comodo introdurre una nuova successione a due indici $\eta_{r,s}$

$$\begin{aligned} &\eta_{0,0} = 0 \ , \quad \eta_{0,s} = 1 \ , \\ &\eta_{r,s} = \sum_{p=0}^{\lfloor s/r \rfloor} \eta_{r-1,r}^{p} \eta_{r-1,s-rp} \\ &\qquad\qquad \text{per } r > 0 \ , \ s \geq 0 \ . \end{aligned} \tag{C.15}$$

Quest'ultima successione differisce dalla precedente perché ammette anche indici $s \leq r$ e la somma viene estesa fino a $\lfloor s/r \rfloor$ anziché $\lfloor s/r \rfloor - 1$. Si verifica facilmente che la nuova successione $\eta_{r,s}$ è maggiorante della $\nu_{r,s}$ per tutti gli indici per cui quest'ultima è definita. Infatti per $r = 0$ e $s \geq 0$ le due successioni coincidono, ed assumendo che ciò valga fino ad $r-1$ per tutti gli $s > r-1$ si ha che

$$\eta_{r,s} = \eta_{r-1,s} \quad \text{per } r > s \tag{C.16}$$

perché la somma si riduce ad un solo termine essendo il limite superiore $\lfloor s/r \rfloor = 0$,

mentre per $s \geq r$ si ha, per induzione,

$$\nu_{r,s} = \sum_{p=0}^{\lfloor s/r \rfloor - 1} \nu_{r-1,r}^{p} \nu_{r-1,s-rp} \leq \sum_{p=0}^{\lfloor s/r \rfloor} \eta_{r-1,r}^{p} \eta_{r-1,s-rp} = \eta_{r,s}$$

perché la somma contiene un termine in più, certamente non negativo.

Dico ora che per $s > r$ vale la relazione

$$\eta_{r,s} = \eta_{r-1,s} + \eta_{r-1,r}\eta_{r,s-r} \ . \tag{C.17}$$

Quest'ultima formula, unita alla (C.16), può utilizzarsi come definizione ricorrente della successione. Per verificarla occorre isolare il termine $p = 0$ nella(C.15) e introdurre un nuovo indice $q = p - 1$ nella parte restante della somma. Si ottiene così

$$\eta_{r,s} = \eta_{r-1,s} + \eta_{r-1,r} \sum_{q=0}^{\lfloor (s-r)/r \rfloor} \eta_{r-1,r}^{q} \eta_{r-1,s-r-rq} \ ,$$

ed osservando che $\lfloor (s-r)/r \rfloor = \lfloor s/r \rfloor - 1$ si vede subito che il secondo addendo altro non è che $\eta_{r,s-r}$, come asserito.

Concentriamo ora la nostra attenzione sugli elementi della diagonale $\eta_{r-1,r}$. Dico che la successione $\eta_{r-1,r}$ è maggiorata dalla successione di Catalan

$$\mu_1 = 1 \ , \quad \mu_r = \sum_{j=1}^{r-1} \mu_j \mu_{r-j} \ .$$

Ciò è conseguenza delle (C.16) e (C.17). Infatti, applicando $r-1$ volte quelle formule otteniamo in sequenza

$$\begin{aligned}
\eta_{r-1,r} &= \eta_{r-2,r} + \eta_{r-2,r-1}\eta_{r-1,1} \ , \\
\eta_{r-2,r} &= \eta_{r-3,r} + \eta_{r-3,r-2}\eta_{r-2,2} \ , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{2,r} &= \eta_{1,r} + \eta_{1,2}\eta_{2,r-2} \ , \\
\eta_{1,r} &= \eta_{0,r} + \eta_{0,1}\eta_{1,r-1} \ ,
\end{aligned}$$

e da qui ricaviamo

$$\begin{aligned}
\eta_{r-1,r} &= \eta_{0,1}\eta_{1,r-1} + \eta_{1,2}\eta_{2,r-2} + \ldots + \eta_{r-3,r-2}\eta_{r-2,2} + \eta_{r-2,r-1}\eta_{r-1,1} \\
&= \sum_{j=1}^{r-1} \eta_{j-1,j}\eta_{j,r-j} \ .
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Ora, se riscriviamo la (C.17) come

$$\eta_{r-1,s} = \eta_{r,s} - \eta_{r-1,r}\eta_{r,s-r} \leq \eta_{r,s}$$

e supponiamo $j < r - j$ abbiamo la catena di diseguaglianze

$$\eta_{j,r-j} < \eta_{j+1,r-j} < \ldots < \eta_{r-j-1,r-j} \ .$$

D'altra parte per $j \geq r-j$ la (C.16) ci dà la catena di eguaglianze

$$\eta_{j,r-j} = \eta_{j-1,r-j} = \ldots = \eta_{r-j-1,r-j} \ ,$$

sicché abbiamo

$$\eta_{r-1,r} \leq \sum_{j=1}^{r-1} \eta_{j-1,j}\eta_{r-j-1,r-j} \ .$$

Da qui è evidente (ed eventualmente si dimostra in dettaglio per induzione) che si ha

$$\eta_{r-1,r} \leq \mu_r \quad \text{per } r > 0 \ , \tag{C.19}$$

dove μ_r è la successione di Catalan. La (C.13) ci consente infine di affermare che si ha

$$\eta_{r-1,r} \leq 4^{r-1} \ . \tag{C.20}$$

La stima appena ottenuta è sufficiente ai fini di dimostrare il teorema di Siegel, e potremmo fermarci qui. Come curiosità si può vedere come tutti gli elementi della successione $\eta_{r,s}$ possano calcolarsi direttamente una volta noti i termini della diagonale $\eta_{r-1,r}$. Precisamente vale la relazione

$$\eta_{r,s} = \sum_{0 \leq p_1+2p_2+\ldots+(r-1)p_{r-1}+rp_r<s} \eta_{r-1,r}^{p_r}\eta_{r-2,r-1}^{p_{r-1}} \cdot \ldots \cdot \eta_{0,1}^{p_1} \ . \tag{C.21}$$

Qui si intende che la somma corre su tutti gli interi non negativi $p_1, \ldots, p_r$ che soddisfano la condizione $0 \leq p_1 + 2p_2 + \ldots + (r-1)p_{r-1} + rp_r < s$.

Per dimostrare la (C.21) ricorriamo ad un piccolo gioco di prestigio sugli indici denotando con p_r l'indice di somma, e riscriviamo la (2.52) come

$$\eta_{0,s} = 1 \ , \quad \eta_{r,s} = \sum_{0<rp_r<s} \eta_{r-1,r}^{p_r}\eta_{r-1,s-rp_r} \ .$$

Qui la richiesta $rp_r < s$ invece della $rp_r \leq s$ che risulterebbe naturale dalla definizione è corretta perché se s è multiplo di r il termine della somma (2.52) corrispondente a $p = s/r$ è $\eta_{r-1,r}^{p_r}\eta_{r-1,0}$, che si annulla in virtù di $\eta_{r-1,0} = \eta_{r-2,0} = \ldots = \eta_{0,0} = 0$. Risostituiamo poi al posto di $\eta_{r-1,s-rp_r}$ l'ultima espressione, con i dovuti cambiamenti degli indici, e ripetiamo per ricorrenza la sostituzione diminuendo ogni volta il primo indice finché esso diventa zero; otteniamo così, in sequenza,

$$\begin{aligned}
\eta_{r,s} &= \sum_{0<(r-1)-p_{r-1}+rp_r<s} \eta_{r-1,r}^{p_r}\eta_{r-2,r-1}^{p_{r-1}}\eta_{r-2,s-rp-(r-1)p_{r-1}} \\
&= \sum_{0<(r-2)p_{r-2}+(r-1)p_{r-1}+rp_r<s} \eta_{r-1,r}^{p_r}\eta_{r-2,r-1}^{p_{r-1}}\eta_{r-3,r-2}^{p_{r-2}}\eta_{r-2,s-rp-(r-1)p_{r-1}-(r-2)p_{r-2}} \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&= \sum_{0<p_1+2p_2+\ldots+(r-1)p_{r-1}+rp_r<s} \eta_{r-1,r}^{p_r}\eta_{r-2,r-1}^{p_{r-1}} \cdot \ldots \cdot \eta_{0,1}^{p_1}\eta_{0,s-rp_r-\ldots-2p_2-p_1} \ .
\end{aligned}$$

L'ultima riga è la (C.21), perché $\eta_{0,s-rp_r-\ldots-2p_2-p_1} = 1$.