ESERCITAZIONE GEOMETRIA IV 9.05.16

RISOLUZIONE degli esercizi Foglio 6

Sia Σ una superficie regolare $\subseteq \mathbb{R}^3$

Sia $\underline{w}$. un campo vettoriale tangente su Σ

$$\underline{w} : \Sigma \longrightarrow \Gamma(T\Sigma) \qquad \text{se } p \in \underline{x}(U) = S$$
$$p \longmapsto \underline{w}_p \in T_p\Sigma$$

$\underline{w}_p = a\,\underline{x}_u + b\,\underline{x}_v$ $\qquad$ $\underline{w}$ e' un campo differenziabile in p

$\iff$ a, b sono funzioni differenziabili in p.

$\underline{w}$ e' un campo differenziabile in S

$\iff$ a, b sono funzioni differenziabili $\forall\, p \in S$.

fissiamo $\underline{y} \in T_p\Sigma$ in un punto $p \in \Sigma$

Sia $\alpha(t)$ una curva t.c. $\alpha(0) = p$ $\quad \dot{\alpha}(0) = \underline{y}$

Possiamo considerare $\underline{w}\big|_{\alpha(t)} = \underline{w}(t) = \underline{w}(u(t), v(t)) = \overbrace{a(u(t), v(t))}^{a(t)}\underline{x}_u + \overbrace{b(u(t), v(t))}^{b(t)}\underline{x}_v$

e possiamo calcolarne la derivata

$$\frac{d\underline{w}}{dt} = a'x_u + a(t)(x_{uu}u' + x_{uv}v') + b'\underline{x}_v + b(t)(x_{vu}u' + x_{vv}v')$$

$\rightarrow$ si chiama DERIVATA COVARIANTE in p la COMPONENTE TANGENZIALE di

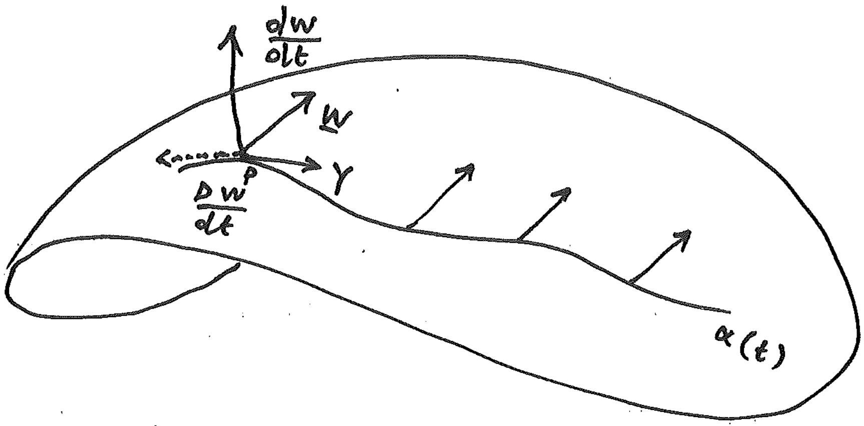
$$\left.\frac{d\underline{w}}{dt}\right|_{t=0}.$$

questa si indica con $\dfrac{D\underline{w}}{dt}$, $D_{\underline{y}}\underline{w}$

$\boxed{\text{Esercizio 6}}$ LA DERIVATA COVARIANTE e' un concetto intrinseco, dipende solo dai coefficienti della I° forma fondamentale

Ricordiamo

$$\underline{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1\underline{x}_u + \Gamma_{11}^2\underline{x}_v + e\,\underline{N}$$
$$\underline{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1\underline{x}_u + \Gamma_{12}^2\underline{x}_v + f\,\underline{N}$$
$$\underline{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1\underline{x}_u + \Gamma_{22}^2\underline{x}_v + g\,\underline{N}$$



$$\frac{Dw}{dt} = a' x_u + a(t)\Big[\big(\Gamma^1_{11}\underline{x}_u + \Gamma^2_{11} x_v\big) u' + v'\big(\Gamma^1_{12}\underline{x}_u + \Gamma^2_{12}\underline{x}_v\big)\Big] +$$
$$b'\underline{x}_v + b(t)\Big[\big(\Gamma^1_{12}\underline{x}_u + \Gamma^2_{12} x_v\big) u' + \big(\Gamma^1_{22} x_u + \Gamma^2_{22} x_v\big) v'\Big]$$

$$= \Big\{a' + a(t)\big[\Gamma^1_{11} u' + v'\,\Gamma^1_{12}\big] + b(t)\big[u'\,\Gamma^1_{12} + \Gamma^1_{22}\, v'\big]\Big\}\,\underline{x}_u$$
$$\Big\{b' + b(t)\big(\Gamma^2_{12} u' + \Gamma^2_{22} v'\big) + a(t)\big[\Gamma^2_{11} u' + \Gamma^2_{12} v'\big]\Big\}\,\underline{x}_v$$

$\longrightarrow$ dipende solo dai coeff. della 1ª forma fondamentale e derivate
$\Longrightarrow$ e' invariante per ISOMETRIE

OSS : dipende solo dalla direzione della curva $\alpha(t)$ in $t=0$ $\dot\alpha(0)=\underline{\gamma}$
NON dipende dalla curva che abbiamo scelto.

NATURALMENTE - per come abbiamo introdotto la derivata covariante per un campo vett. tangente su Σ - si può anche pensare di definirla direttamente su di una curva $\alpha(t)$

$$\underline{w} : \underset{\Sigma}{\underset{\text{in}}{\alpha(t)}} \longrightarrow T_{\alpha(t)}\Sigma$$

e la derivata covariante e' definita come prima.

OSS Sia $\Sigma = \Pi$ il piano $E = G = 1$ $F = 0$ $\Longrightarrow \Gamma^k_{ij} = 0$
quindi $\underline{w} = a\,\underline{x}_u + b\,\underline{x}_v$ $\underline{w} = (a,b)$

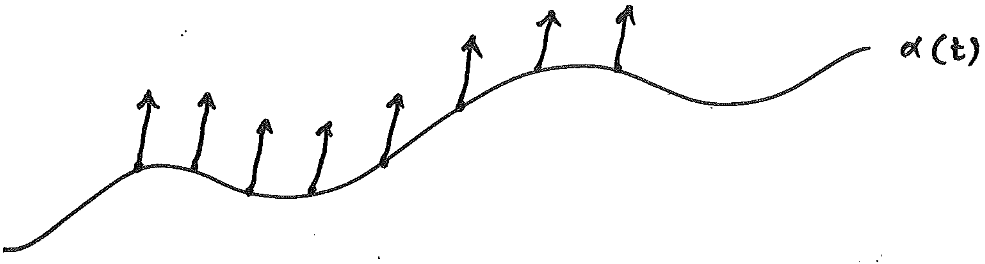
$$\frac{Dw}{dt} = a'\underline{x}_u + b'\underline{x}_v$$ coincide con la derivata standard in $\mathbb{R}^2$.

LA DERIVATA COVARIANTE e' UNA ESTENSIONE della derivazione in $\mathbb{R}^2$

Definizione: Sia $\underline{w}(t)$ un campo LUNGO una curva $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$

diciamo che $\underline{w}$ e' UN CAMPO PARALLELO $\Leftrightarrow \frac{D\underline{w}}{dt} = 0 \quad \forall t \in I$

NEL piano



questo e' un campo parallelo – e' un campo COSTANTE (non cambio direzione ne' verso ne' intensita')

→ IN REALTA' QUESTE PROPRIETA' si estendono anche nelle definizione dei campi PARALLELI su superfici.

ESERCIZIO 7 Siano $\underline{v}(t)$ e $\underline{w}(t)$ due campi PARALLELI LUNGO $\alpha(t)$ allora

$\langle \underline{v}(t), \underline{w}(t) \rangle = \text{cost}$ (1)

$|\underline{w}(t)| = \text{cost}$ e $|\underline{v}(t)| = \text{cost}$. (2)

Infatti: $\underline{v}(t)$ E' PARALLELO $\Rightarrow \frac{D\underline{v}}{dt} = 0 \Rightarrow$ La componente NORMALE di $\frac{d\underline{w}}{dt}$ e' l'unica che c'e'

$\Rightarrow \frac{d\underline{w}}{dt} \perp T_{\alpha(t)}\Sigma$

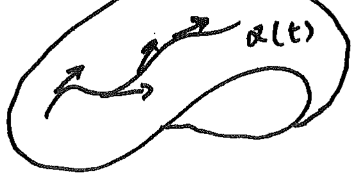
anal. $\frac{d\underline{v}}{dt} \perp T_{\alpha(t)}\Sigma$

$$\frac{d}{dt}\langle \underline{v}(t), \underline{w}(t) \rangle = \langle \frac{d\underline{v}}{dt}, \underset{\in T_{\alpha(t)}\Sigma}{\underline{w}(t)} \rangle + \langle \underset{\in T_{\alpha(t)}\Sigma}{\underline{v}(t)}, \frac{d\underline{w}}{dt} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \underline{v}(t), \underline{w}(t) \rangle = \text{cost} \qquad (1)$$

analog. prendendo $\underline{v}(t) = \underline{w}(t)$ si ricava che la norma e' cost (2).

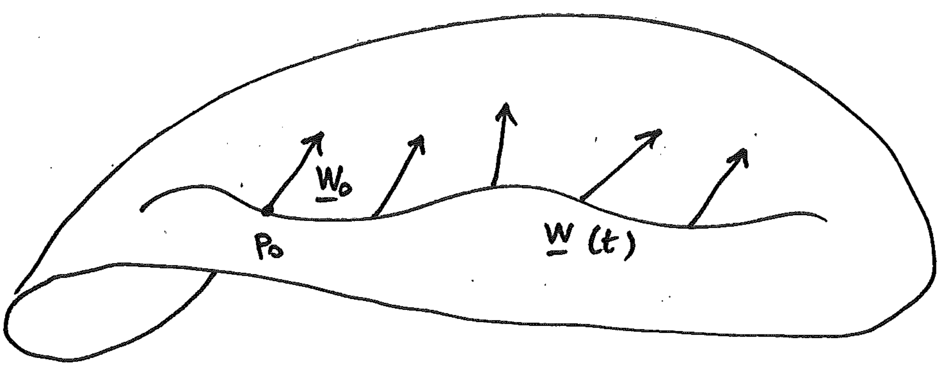
→ UN ESEMPIO di CAMPO LUNGO UNA CURVA SU DI UNA SUPERFICIE Σ E' DATO dal CAMPO TANGENTE



<u>Oss</u> Se due superfici Σ e Σ' sono tangenti lungo una curva $\alpha(t)$ e $\underline{w}$ e' un campo lungo $\alpha(t)$ $\frac{D\underline{w}}{dt}$ e' lo stesso PER ENTRAMBE le superfici.

<u>PROPOSIZIONE</u> Data una superficie regolare Σ, sia $p_0 \in \Sigma$ e sia assegnato $\underline{w}_0 \in T_{p_0}\Sigma$. Data una curva $\alpha(t) \subseteq \Sigma$ tc $\alpha(0) = p_0$ $\exists!$ un campo $\underline{w}(t)$ LUNGO $\alpha(t)$ <u>PARALLELO</u> tc al tempo $t=0$ $\underline{w}(0) = \underline{w}_0$

[l'ESISTENZA e l'UNICITA' DI UN CAMPO SIFFATTO E' GARANTITA DAL TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA' DI SOLUZIONI DI PROBLEMA DI CAUCHY.]



t.c. $\underline{w}(0) = \underline{w}_0$

$\frac{D\underline{w}}{dt} = 0$

Essere parallelo infatti vuol dire solo che

$$\frac{D\underline{w}}{dt} = 0 \iff (\star) \begin{cases} a' + a(t)\left[\Gamma_{11}^{1} u' + \Gamma_{12}^{1} v'\right] + b(t)\left[u'\Gamma_{12}^{1} + v'\Gamma_{22}^{1}\right] = 0 \\ b' + b(t)\left[\Gamma_{12}^{2} u' + \Gamma_{22}^{2} v'\right] + a(t)\left[\Gamma_{11}^{2} u' + \Gamma_{12}^{2} v'\right] = 0 \end{cases}$$

Posso considerare una applicazione: dato un campo $\underline{w}(t)$ lungo $\alpha(t)$

$$\tau_t : T_p\Sigma \longrightarrow T_{\alpha(t)}\Sigma \qquad p = \alpha(0)$$

$$\underline{w}(0) \longmapsto \underline{w}(t) = \text{VALORE del campo parallelo associato a } \underline{w}(0) \text{ in } t$$

τ_t e' detto <u>trasporto PARALLELO</u> [PER quanto visto nell' ESERCIZIO 7

τ_t E' UN' <u>ISOMETRIA</u>]

Definizione Sia $\alpha(t)$ una curva su Σ

diciamo che $\alpha(t)$ E' UNA GEODETICA $\Leftrightarrow$ $\frac{D\dot{\alpha}(t)}{dt} = 0$

i.e se il <u>SUO CAMPO TANGENTE e' PARALLELO</u>

<u>OSS</u> Dall' <u>ESERCIZIO 7</u> $\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = \dot{\alpha}(t)^2 = \text{cost} = C$

$$\Rightarrow s = \int_0^s C\, dt \Rightarrow \boxed{s = ct}$$

ogni geodetica e' parametrizzata con un parametro proporzionale all'ascissa curvilinea.

supponiamo che α sia parametrizzata mediante s ($\alpha(s)$ punto materiale su Σ).

$$\alpha(s) \ , \ \dot{\alpha}(s) = \underline{t}(s) \ , \ \ddot{\alpha}(s) = K(s)\underline{n}(s) = \frac{d\dot{\alpha}}{ds}$$

DIRE che una curva e' geodetica significa che l'accellerazione e' tutta <u>NORMALE</u>

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

<u>LA SFERA</u> : quali sono le geodetiche?

le curve che sono CERCHI MASSIMI sulla sfera sono <u>GEODETICHE</u> $\underline{n} // \underline{N}$. Inoltre si puo' dimostrare – sempre usando il teorema di esistenza e unicita' delle equazioni diff. – che data una direzione e un punto $\exists$ sempre una e una sola geodetica per quel punto e con quella direzione $\Rightarrow$ <u>I CERCHI MASSIMI SONO TUTTE E SOLE LE GEODETICHE SULLA SFERA</u> .

<u>Per il piano</u> : Le rette sono tutte e sole le geodetiche

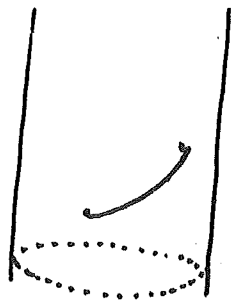
$$\Gamma_{ij}^{k} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}(t) = \underline{x}_u \dot{u} + \underline{x}_v \dot{v} \Rightarrow \begin{matrix} a' = \ddot{u} \\ b' = \ddot{v} \end{matrix}$$

($\star$) DIVENTA

$$\begin{matrix} \ddot{u} = 0 \\ \ddot{v} = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \dot{u} = c_1 \\ \dot{v} = c_2 \end{matrix} \qquad \begin{cases} u(t) = c_1 t + c_0 \\ v(t) = c_2 t + c_3 \end{cases}$$

<u>Rette</u>

Il CILINDRO :



- I PARALLELI sono geodetiche
- Le rette verticali sono geodetiche
- Le Eliche cilindriche sono geodetiche

$\Updownarrow$

si vedono bene come immagine delle rette del piano Π tramite l'ISOMETRIA LOCALE.

OSS : Dati due punti del piano c'è solo una geodetica che li congiunge
Dati due punti del CILINDRO ci sono INFINITE GEODETICHE che li congiungono.
MA FRA QUESTE SOLO UNA non fa un intero giro quella immagine delle rette corrispondente nel piano.

TUTTI i CONCETTI INTRODOTTI FINORA non dipendono dall'orientazione data su Σ.

Consideriamo ora $\underline{w}(t)$ UN CAMPO UNITARIO su $\underline{\alpha}(t)$

$\frac{d\underline{w}}{dt} \perp \underline{w}(t)$ poiché il campo è unitario

$\frac{D\underline{w}}{dt} \perp \underline{N}$ per come è definito.

$$\Rightarrow \frac{D\underline{w}}{dt} = \lambda\left(\underline{w}(t) \wedge \underline{N}(t)\right)$$

ovviamente λ dipende da come è orientata Σ.

$\lambda \in \mathbb{R}$ è detto VALORE ALGEBRICO della derivata covariante e si indica con $\left[\frac{Dw}{dt}\right]$

Se CONSIDERIAMO UNA curva $\alpha(s)$ PARAMETRIZZATA MEDIANTE ASCISSA CURVILINEA

$$\left[\frac{D\dot{\alpha}(s)}{ds}\right] = K_g(s)$$

È DETTA CURVATURA GEODETICA

è la componente tangenziale della curvatura propria di una curva $\alpha(s)$

Ricordando cos'è K_n curvatura NORMALE

RISULTA che $k^2 = (\text{CURVATURA di } \alpha(s))^2 = k_g^2 + k_n^2$

Se $\alpha(s)$ e' geodetica $\boxed{k_g = 0}$ $\quad$ $K = \pm k_n$

SCRIVIAMO INFINE le EQUAZIONI DI UNA GEODETICA $\quad \dot a = \ddot u \quad \dot b = \ddot v$

$$\begin{cases} \ddot u + \dot u^2 [\Gamma^1_{11}] + 2\dot u \dot v [\Gamma^1_{12}] + \dot v^2 [\Gamma^1_{22}] = 0 \\ \\ \ddot v + \dot u^2 [\Gamma^2_{11}] + 2\dot u \dot v [\Gamma^2_{12}] + \dot v^2 [\Gamma^2_{22}] = 0 \end{cases}$$

PER UNA SUPERFICIE di ROTAZIONE abbiamo trovato Γ^k_{ij} la volta scorsa.

Diventa

$$\begin{cases} \ddot u + \cancel{\frac{f'(v)}{f(v)} \dot v^2} = 0 & (1) \\ \\ \ddot v + \dot u^2 \left[\dfrac{-2 f(v) f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2} \right] + \dfrac{(f' f'' + g' g'')}{(f'^2 + g'^2)} \dot v^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- $u = \text{cost} \quad v = v(t)$ MERIDIANI $\quad$ (1) e' soddisfatta

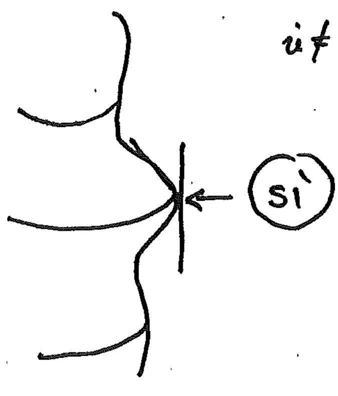
  supponiamo $s = t$

  inoltre $(f'^2 + g'^2)\dot v^2 = 1$

  [I° forma LUNGO il meridiano
  La derivo e trovo (2)]

- PARALLELI $\quad \dot v = 0 \quad u = u(s) \quad -2\dot u^2 \dfrac{f(v) f'(v)}{f'(v)^2 + g'(v)^2} = 0$

  $\dot u \neq 0 \quad \Rightarrow \boxed{f'(v) = 0}$



sono i paralleli ~~con piano~~ ~~tangente~~ che si ottengono ruotando punti con retta tg // all'asse di rotazione

Infine **ESERCIZIO 8**

1. $\alpha(s)$ GEODETICA e Linea di curvatura $\Rightarrow$ e' PIANA
2. $\alpha(s)$ GEODETICA con $K \neq 0$ PIANA $\Rightarrow$ e' di curvatura
3. Piana + Linea Curvatura $\overset{\text{NO}}{\Rightarrow}$ geodetica?

1\. $\alpha(s)$ ~~linea curvatura~~ geodetica $\Rightarrow K = \pm K_N \Rightarrow \underline{n} /\!/ \underline{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\underline{n}}{ds} = -K(s)\,\underline{t}(s) + \tau(s)\,\underline{b}(s) \\ \quad\ \ \shortparallel \\ \dfrac{d\underline{N}}{ds} = dN(\dot\alpha(s)) = \lambda(s)\,\dot\alpha(s) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\tau(s) = 0}$$

linea curv

2\. geodetico $K = \pm K_N$ $\quad \underline{n} /\!/ \underline{N}$

$$\frac{dn}{ds} = \frac{d\underline{N}}{ds} = -k(s)\,\underbrace{\underset{\overset{\shortparallel}{\dot\alpha(s)}}{\underline{t}(s)} = dN(\dot\alpha(s))}_{\Downarrow}$$

$\Downarrow$

LINEA CURVATURA

3\. $\exists$ paralleli non max.