ESERCITAZIONI **4°** 01/04/15 (corso di Geometria 4)

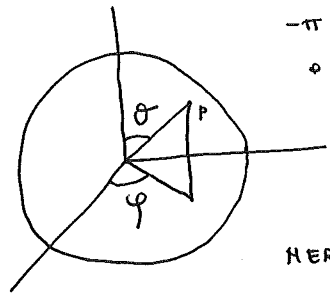
— ESERCIZI CON LA I° FORMA FONDAMENTALE —

• **ES 1** TROVARE le curve sulla sfera che formano un angolo costante β con i meridiani.

— Tali curve sono dette LOSSODROMIE della sfera —

La parametrizzazione che abbiamo scelto la volta scorsa per la sfera e'

$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) = \cos\theta \end{cases} \qquad \underline{x}(\theta,\varphi)$$



$-\pi < \theta < \pi$

$0 < \varphi < 2\pi$

MERIDIANI $\varphi = \text{cost}$

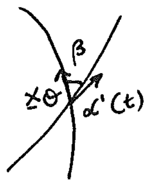
$$\underline{x}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\operatorname{sen}\theta)$$

$$\underline{x}_\varphi = (-\sin\theta\sin\varphi, +\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$\alpha(t)$ e' la curva che stiamo cercando

$$\alpha(t) = \underline{x}(\theta(t), \varphi(t)) \qquad \alpha'(t) = x_\theta\theta' + x_\varphi\varphi'$$

$$\|x_\theta\|^2 = \langle x_\theta, x_\theta\rangle = E$$



$$\cos\beta = \frac{\langle x_\theta, \alpha'(t)\rangle}{\|x_\theta\|\,\|\alpha'(t)\|}$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = E\theta'^2 + 2F\theta'\varphi' + G\varphi'^2$$

$$\langle x_\theta, \alpha'(t)\rangle = E\theta'$$

$$E = 1 \qquad F = 0 \qquad G = \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \quad \cos\beta = \left.\frac{E\theta'}{\sqrt{E}\sqrt{E\theta'^2 + 2F\theta'\varphi' + G\varphi'^2}}\right|_{\substack{\text{PER} \\ \text{LA} \\ \text{SFERA}}} = \frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \varphi'^2\sin^2\theta}}$$

elevo al quadrato

$$\cos^2\beta = \frac{\theta'^2}{\theta'^2 + \varphi'^2\sin^2\theta}$$

$$\cos^2\beta\left(\theta'^2 + (\varphi')^2\sin^2\theta\right) = \theta'^2$$

$$\theta'^2\underbrace{(1-\cos^2\beta)}_{\sin^2\beta} - (\varphi'^2)\sin^2\theta\cos^2\beta = 0$$

$$\theta'^2\underbrace{\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}_{\operatorname{tg}^2\beta} - (\varphi'^2)\sin^2\theta = 0$$

$$\boxed{\theta'^2\operatorname{tg}^2\beta - (\varphi'^2)\sin^2\theta = 0}$$

$$\frac{\theta'^2}{\sin^2\theta} = \frac{\varphi'^2}{\operatorname{tg}^2\beta} \quad \overset{\text{integrando}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\log\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \pm(\varphi + c)\operatorname{cotg}\beta}$$

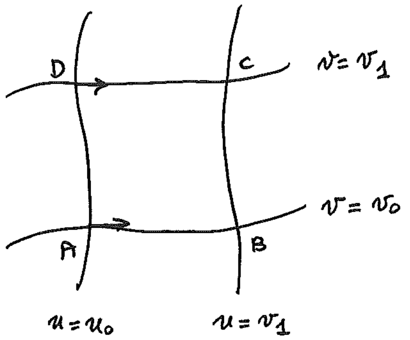
$$\frac{\theta'}{\sin\theta} = \pm\frac{\varphi'}{\operatorname{tg}\beta}$$

SCUOLA NORMALE SUPERIORE PISA

ES 2 Le linee coordinate di una parametrizzazione $\underline{x}(u,v)$ formano una <u>Rete di Tchebyshef</u> $\Longleftrightarrow$ la lunghezza dei lati opposti di un quadrilatero formato da essi e' uguale.

(a) Provare che condizione necessaria e sufficiente perche' questo accade e' che

$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0$$



$\underline{x}_u$ e' il vettore tangente alla linea coordinata $\underline{x}(u, v_0)$ e $\underline{x}(u, v_1)$

$\underline{x}_v$ " " alle linee coordinate $\underline{x}(u_0, v)$ e $\underline{x}(u_1, v)$

se e' una rete di Tchebishef

$$\Longleftrightarrow \int_0^1 \sqrt{\underbrace{\langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle}_{E(u,v_0)}}\, du = \ell(AB) = \ell(DC) = \int_0^1 \sqrt{E(u, v_1)}\, du$$

$$\int_0^1 \sqrt{\underbrace{\langle \underline{x}_v, \underline{x}_v \rangle}_{G(u_0,v)}}\, dv = \ell(AD) = \ell(BC) = \int_0^1 \sqrt{G(u_1, v)}\, dv$$

$\Longleftrightarrow$ E dipende solo da u

G dipende solo da v

$\Longleftarrow$

$$\int_0^1 \sqrt{E(u,v)}\, du = \text{cost} \quad \forall v$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_0^1 \sqrt{E(u,v)}\, du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{E(u,v)}} E_v = 0$$

siccome l'intervallo e' qualunque $\Rightarrow E_v \overset{\text{"}}{=} 0$

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0}$$

$$\bar{u} = \int \sqrt{E(u)}\, du$$

$$\bar{v} = \int \sqrt{G(v)}\, dv$$

(b) Provare che se le linee coordinate formano una Rete di Tchebishef è possibile riparametrizzare l'intorno coordinato in modo tale che

$E' = 1 \qquad F' = \cos\theta \qquad G' = 1$ con θ angolo tra $\underline{x}_u$ e $\underline{x}_v$

$\underline{x}(\bar{u}, \bar{v}) \qquad \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \sqrt{E(u)} \qquad \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \sqrt{G(v)}$

$$\underline{x}_u = \underline{x}_{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \underline{x}_{\bar{u}} \sqrt{E(u)}$$

$$\underline{x}_v = \underline{x}_{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = x_{\bar{v}} \sqrt{G(v)}$$

$$\underbrace{\langle \underline{x}_u, \underline{x}_u \rangle}_{\cancel{E(u)}} = \langle \underline{x}_{\bar{u}}, \underline{x}_{\bar{u}} \rangle \cancel{E(u)}$$

$$\underbrace{\langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle}_{F} = \langle \underline{x}_{\bar{u}}, \underline{x}_{\bar{v}} \rangle \sqrt{E(u)}\sqrt{G(v)}$$

$$\underbrace{\langle x_v, x_v \rangle}_{G(v)} = \langle \bar{x}_{\bar{v}}, \bar{x}_{\bar{v}} \rangle G(v)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} E' &= \langle \underline{x}_{\bar{u}}, \underline{x}_{\bar{u}} \rangle = 1 \\ G' &= \langle \underline{x}_{\bar{v}}, \underline{x}_{\bar{v}} \rangle = 1 \\ F' &= \langle \underline{x}_{\bar{u}}, \underline{x}_{\bar{v}} \rangle = \frac{\langle \underline{x}_u, \underline{x}_v \rangle}{\underbrace{\sqrt{E(u)}}_{\langle x_u, x_u \rangle} \underbrace{\sqrt{G(v)}}_{\langle x_v, x_v \rangle}} = \cos\theta \end{aligned}}$$

ES 3 TROVARE I COEFFICIENTI DELLA I^a FORMA FONDAMENTALE del GRAFICO DI UNA FUNZIONE (superficie data come grafico)

$$\underline{x}(u,v) = (u, v, \varphi(u,v)) \qquad \varphi \in C^\infty \qquad (u,v) \in U$$

$\underline{x}_u = (1, 0, \varphi_u) \qquad E = 1 + \varphi_u^2$

$F = \varphi_u \varphi_v$

$\underline{x}_v = (0, 1, \varphi_v) \qquad G = 1 + \varphi_v^2$

$$EG - F^2 = (1+\varphi_u^2)(1+\varphi_v^2) - \varphi_u^2\varphi_v^2 = 1 + \varphi_v^2 + \varphi_u^2 = 1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2 > 0$$

$$N = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \varphi_u \\ 0 & 1 & \varphi_v \end{vmatrix}}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \frac{-\underline{i}\,(\varphi_u) - \underline{j}\,\varphi_v + k}{\sqrt{1 + \varphi_u^2 + \varphi_v^2}} = \frac{(-\varphi_u, -\varphi_v, 1)}{\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}}$$

Es 4 Sia $f \in C^\infty(U)$ $\quad f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

Sia $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ se $\operatorname{grad} f \neq 0$ su M

allora M e' una superficie differenziabile.

LA RETROIMMAGINE DI UN VALORE REGOLARE (in cui cioe' df e' su) E' UNA SUP. DIFF (VARIETA' DIFF)

Sia (x_0, y_0, z_0) tc $f(x_0,y_0,z_0) = 0$ ma $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ allora esiste – se ad esempio $f_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ – per il teorema del Dini un intorno V di $(x_0, y_0, z_0) = p_0$ $V \cap \{f = 0\} = \{z = \varphi(x,y)\}$

– ovvero la M e' localmente diffeomorfa ad aperti di $\mathbb{R}^2$ –

in particolare se $f_z(P_0) \neq 0 \implies M$ loc $z = \varphi(x,y)$

$$f(x, y, \varphi(x,y)) = 0$$

$$\implies \begin{aligned} f_x + f_z \varphi_x &= 0 \\ f_y + f_z \varphi_y &= 0 \end{aligned} \implies \varphi_x = -\frac{f_x}{f_z} \qquad \varphi_y = -\frac{f_y}{f_z}$$

$$P_x = (1, 0, \varphi_x) = \left(1, 0, -\frac{f_x}{f_z}\right)$$

$$P_y = (0, 1, \varphi_y) = \left(0, 1, -\frac{f_y}{f_z}\right)$$

$$\implies \boxed{E = \langle P_x, P_x \rangle = 1 + \frac{f_x^2}{f_z^2} \qquad F = \frac{f_x f_y}{f_z^2} \qquad G = \langle P_y, P_y \rangle = 1 + \frac{f_y^2}{f_z^2}}$$

Inoltre il VERSORE NORMALE, se $(x(t), y(t), z(t)) = \gamma(t)$ su M

$$\implies f(x(t), y(t), z(t)) = 0$$

$$f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_z \dot{z} = 0 \qquad (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{\gamma}(t) \in \text{al tangente}$$

$$\implies \frac{(f_x, f_y, f_z)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}$$

e' il VERSORE NORMALE definito in ciascun punto

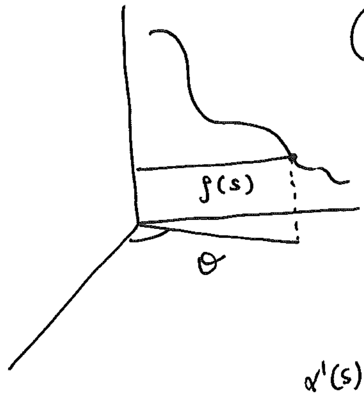
SCUOLA NORMALE SUPERIORE PISA

Es 5

Sia S una superficie di ROTAZIONE di una curva $\mathcal{C}$
sia s l'ascissa curvilinea e $\rho=\rho(s)$ la distanza dall'asse di rotazione al punto di S corrispondente a s.

a. [TEOREMA di PAPPO] provare che l'area di S e'

$$2\pi\int_0^{\ell}\rho(s)\,ds \qquad \text{con } \ell = \text{lunghezza di } \mathcal{C}$$



$\mathcal{C} = (\alpha(s), \rho(s))$

$0<s<\ell$

$0<\theta<2\pi$

$\alpha'(s)+\rho'(s)=1$

$$\underline{x}(\theta,s)=(\rho(s)\cos\theta,\ \rho(s)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \alpha(s))$$

$$\underline{x}_\theta=(-\rho(s)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho(s)\cos\theta,\ 0)$$

$$\underline{x}_s=(\rho'(s)\cos\theta,\ \rho'(s)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \alpha'(s))$$

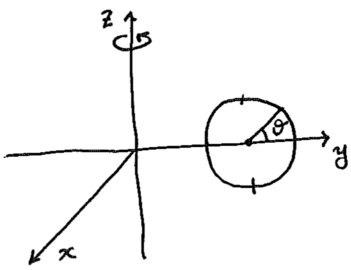
$$\langle \underline{x}_\theta,\underline{x}_\theta\rangle = \rho(s)^2$$

$$\langle \underline{x}_\theta,\underline{x}_s\rangle = 0$$

$$\langle \underline{x}_s,\underline{x}_s\rangle = \rho'(s)^2+\alpha'(s)=1$$ poiche' e' param. mediante ascissa curvilinea

$$EG-F^2=\rho(s)^2 \implies A(S)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\ell}\rho(s)\,ds = 2\pi\int_0^{\ell}\rho(s)\,ds$$

b. TROVARE l'area del TORO di ROTAZIONE - applicando la parte a -



$$\underline{x}(\theta,\varphi)=((R+r\cos\theta)\cos\varphi,\ (R+r\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\underline{x}_\theta=(-r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\ -r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ r\cos\theta)$$

$$\underline{x}_\varphi=(-(R+r\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ (R+r\cos\theta)\cos\varphi,\ 0)$$

Senza applicare (a)

$$E = r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\varphi + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\theta = r^2$$

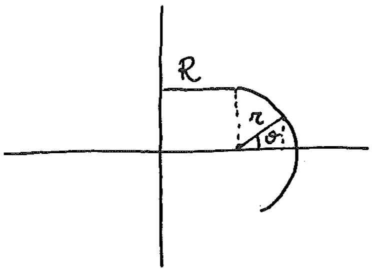
$$F=(R+r\cos\theta)\cancel{r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}-(R+r\cos\theta)\cancel{r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}+0=0$$

$$G=(R+r\cos\theta)^2$$

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{r^2(R+r\cos\theta)^2}=r(R+r\cos\theta)$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\ r(R+r\cos\theta) = 2\pi\Big(rR\cdot 2\pi + \underbrace{r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_0^{2\pi}}_{=0}\Big)=\boxed{4\pi^2 rR}$$

(b) TROVARE l'area usando il teorema di PAPPO



$$\rho(\theta) = R + r\cos\theta \qquad \boxed{\theta = \frac{s}{r}}$$

$$2\pi \int_0^{2\pi r} (R + r\cos\theta)\, d\theta = 2\pi R \cdot 2\pi r + \underbrace{2\pi r \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{2\pi r}}_{0}$$

$$= 4\pi^2 R r$$

$\boxed{\text{ES6}}$ PROVARE CHE LA RETROIMMAGINE DI UN VALORE REGOLARE DI $f: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ È UNA SUPERFICIE ORIENTABILE

– per il teorema della volta scorsa che dimostreremo tra poco – [se facciamo in tempo!] e' sufficiente trovare che $\exists$ un campo normale C^∞ $\forall\, p \in f^{-1}(a)$ con a regolare

Sia $(x(t), y(t), z(t)) \in f^{-1}(a)$

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a$$

$$f_x \dot{x} + f_y \dot{y} + f_z \dot{z} = 0 \implies N_p = \frac{f_x, f_y, f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}} \quad \forall\, p \in f^{-1}(a)$$

ES: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ e' orientabile

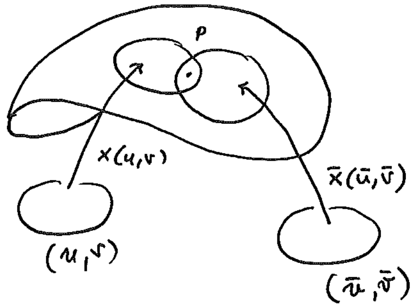
$$\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2}\right) = (0, 0, 0) \iff x = y = z = 0 \notin f^{-1}(1)$$

$$N(p) = \frac{\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2}\right)}{\sqrt{4\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)}}$$

TEOREMA Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ e' ORIENTABILE $\iff$ su di essa $\exists$ un campo differenziabile di VERSORI normali $N: S \to \mathbb{R}^3$ C^∞.

$\Longrightarrow$ Se S e' orientabile - per la definizione data la volta scorsa - e' possibile ricoprirla con una famiglia di intorni coordinati tc il cambiamento di coordinate ha Jacobiano positivo.

definiamo $\forall p \in S$ $\quad N(p) = \dfrac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|}$



se considero un'altra parametrizzazione di un intorno di p

$\bar{x}(\bar{u},\bar{v})$ $\qquad \bar{x}_{\bar{u}}, \bar{x}_{\bar{v}}$

$$\bar{x}_{\bar{u}} = x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}$$

$$\bar{x}_{\bar{v}} = x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}$$

$$\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}} = \left(x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\right) \wedge \left(x_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + x_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\right) =$$

$$= x_u \wedge x_v \frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - x_v \wedge x_u \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}} =$$

$$= x_u \wedge x_v \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}}\frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\right) = x_u \wedge x_v \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix}}_{\det J_p \, \neq 0}$$

devo far vedere che NON dipende dalla parametrizzazione

Se S e' orientabile $\det J_p > 0$

$\Rightarrow N(\bar{u},\bar{v})$ e $N(u,v)$ coincidono — poiché $\det J_p > 0$ — quindi N e' ben definito ed e' C^∞

$\Longleftarrow$ VICEVERSA supponiamo che su S sia definito un campo $N: S \to \mathbb{R}^3$ C^∞ e consideriamo una famiglia di intorni coordinati connessi che ricoprono S

$\forall p \in S$ $\quad p = \underline{x}(u,v)$ possiamo assumere che

$\underline{x}(U)$ $\quad N(p) = \dfrac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|}$ a meno di scambiare u e v

Infatti il prodotto scalare $\left\langle N(p), \dfrac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} \right\rangle = f(p) = \pm 1$

$f(p)$ e' una funzione continua su $\underbrace{\underline{x}(U)}_{\text{connesso}}$ = connesso $\Rightarrow f(p)$ ha segno costante

se $f = -1$ scambiamo il ruolo di u e v

dando questa definizione su tutti gli intorni abbiamo che

$\det J_p = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} > 0$ altrimenti $\dfrac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = N(p) = \underbrace{-}_{\det J_p} \dfrac{\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}}{\|\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}\|} = -N(p)$ assurdo