Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ l'insieme ottenuto ruotando una curva regolare piana attorno ad un'asse che <u>non</u> interseca la curva.

Prendiamo xz il piano che contiene $\mathcal{C}$ e z l'asse di ROTAZIONE

Sia $\begin{matrix} x = f(v) \\ z = g(v) \end{matrix}$ $\quad a < v < b \quad$ $f(v) > 0$ cioè la curva NON INTERSECA L'ASSE z.

$$\underline{x}(u,v) = \left(f(v)\cos u,\ f(v)\,\mathrm{sen}\,u,\ g(v)\right) \qquad \underbrace{\left\{ \begin{matrix} 0 < u < 2\pi \\ a < v < b \end{matrix} \right\}}_{} = U$$

INTORNO COORDINATO

PARAMETRIZZAZIONE della SUPERFICIE DI ROTAZIONE

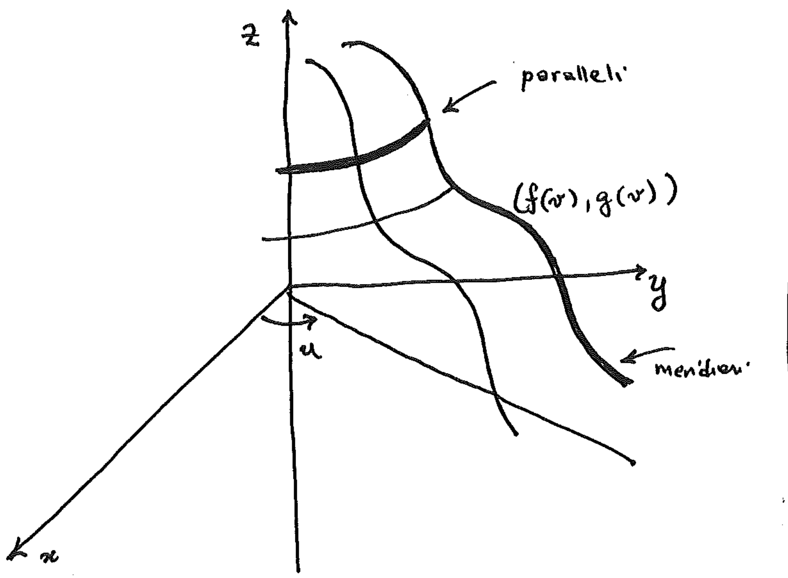
$\boxed{\text{E' UN FOGLIO SEMPLICE DI SUPERFICIE}}$

$\mathcal{C}$ e' detta <u>GENERATRICE</u>

z e' detta <u>ASSE DI ROTAZIONE</u>

I cerchi descritti da $\mathcal{C}$ sono detti <u>PARALLELI</u> $\{v = \text{cost}\}$

Le varie posizioni di $\mathcal{C}$ sono detti MERIDIANI $\{u = \text{cost}\}$



DIRE che rg e' max equivale a chiedere $\underline{P}_u$ e $\underline{P}_v$ l. in. i.e. $\underline{P_u \wedge P_v \neq 0}$

TROVIAMO

$\underline{x}_u = \left(-f(v)\,\mathrm{sen}\,u,\ f(v)\cos u,\ 0\right)$

$\underline{x}_v = \left(f'(v)\cos u,\ f'(v)\,\mathrm{sen}\,u,\ g'(v)\right)$

$$J(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -f(v)\,\mathrm{sen}\,u & f'(v)\cos u \\ f(v)\cos u & f'(v)\,\mathrm{sen}\,u \\ 0 & g'(v) \end{pmatrix}$$

Se la CURVA e' REGOLARE $(f'(v), g'(v)) \neq (0,0)$

$$-f(v)f'(v)\left(\mathrm{sen}^2 u + \cos^2 u\right) = -f(v)f'(v) \neq 0 \iff \boxed{f(v) \neq 0}$$

ma noi abbiamo supposto che $f(v) > 0$

$\Rightarrow$ ha rango max

TROVIAMO AD ESEMPIO il VERSORE NORMALE

$$\underline{N} = \frac{\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \wedge \underline{x}_v\|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -f(v)\operatorname{sen}u & f(v)\cos u & 0 \\ f'(v)\cos u & f'(v)\operatorname{sen}u & g'(v) \end{vmatrix}}{\| \dots\dots \|} = \underline{i}\, f(v) g'(v) \cos u + \underline{j}\, f(v) \operatorname{sen}u\, g'(v) + k\, f f'$$

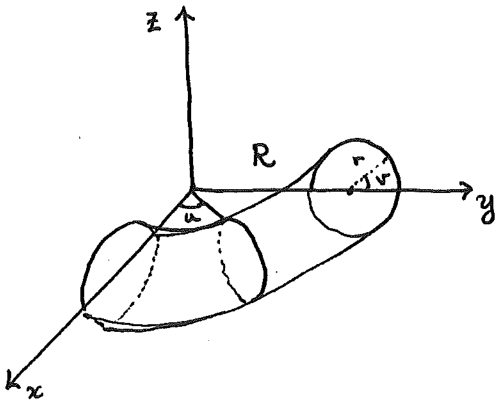
$$= \frac{(g'f\cos u,\ g'f\operatorname{sen}u,\ -ff')}{\sqrt{g'^2 f^2 + f^2 f'^2}} = \frac{g'f\cos u,\ g'f\operatorname{sen}u,\ -ff'}{f\sqrt{g'^2 + f'^2}}$$

Se assumiamo che la curva $\mathcal{C}$ sia parametrizzata mediante ascissa curvilinea

$$\Rightarrow \sqrt{g'^2 + f'^2} = 1 \quad \Rightarrow \underline{N}_{(u_0,v_0)} = \frac{(g'\cos u,\ g'\operatorname{sen}u,\ -f')\cdot \cancel{f}}{\cancel{f}}$$

ESEMPI PARTICOLARI

■ IL TORO



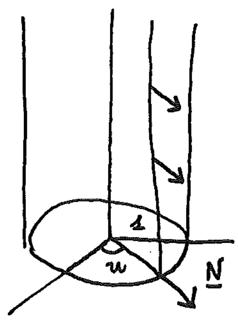
$$\begin{cases} x(u,v) = (R + r\cos v)\cos u \\ y(u,v) = (R + r\cos v)\operatorname{sen}u \\ z(u,v) = r\operatorname{sen}v \end{cases}$$

TROVIAMO $\underline{x}_u = \left(-(R + r\cos v)\operatorname{sen}u,\ (R + r\cos v)\cos u,\ 0\right)$

$\underline{x}_v = (-r\cos u\operatorname{sen}v,\ -r\operatorname{sen}v\operatorname{sen}u,\ r\cos v)$

TUTTI I PUNTI SONO REGOLARI

■ IL CILINDRO



$$\begin{cases} x(u,v) = \cos u \\ y(u,v) = \operatorname{sen}u \\ z(u,v) = v \end{cases} \qquad v \in \mathbb{R}, \quad 0 < u < 2\pi$$

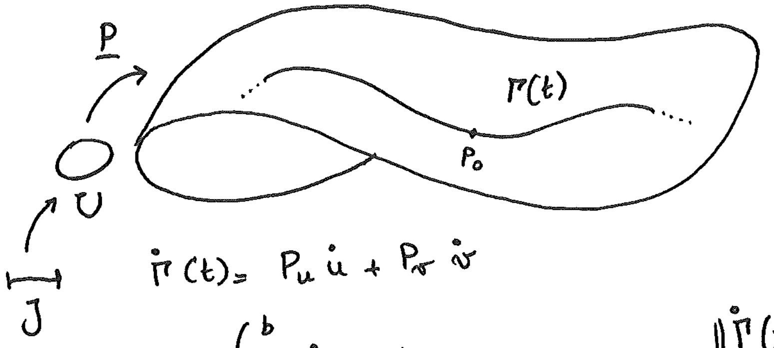
$\underline{x}_u = (-\operatorname{sen}u,\ \cos u,\ 0)$

$\underline{x}_v = (0,\ 0,\ 1)$

$$\underline{N}_{u,v} = \frac{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\operatorname{sen}u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \underline{i}\cos u + \underline{j}\operatorname{sen}u = (\cos u, \operatorname{sen}u)$$

■ IL CONO ha un punto NON REGOLARE dove la retta interseca l'asse di ROTAZIONE consideriamo una curva sulla superficie

— LUNGHEZZA DI UNA CURVA SU DI UNA SUPERFICIE —



$S = P(U)$

$\Gamma(t) = \underline{P}(u(t), v(t))$

$\dot{\Gamma}(t) = P_u \dot{u} + P_v \dot{v}$

$\ell(t) = \int_a^b \| \dot{\Gamma}(t) \| \, dt$

$\|\dot{\Gamma}(t)\|^2 = \langle \underline{P}_u \dot{u} + \underline{P}_v \dot{v}, \underline{P}_u \dot{u} + \underline{P}_v \dot{v} \rangle =$

$= \langle \underline{P}_u, \underline{P}_u \rangle \dot{u}^2 + 2 \langle \underline{P}_u, \underline{P}_v \rangle \dot{u}\dot{v} + \langle \underline{P}_v, \underline{P}_v \rangle \dot{v}^2$

<u>OSS</u> : $\underline{P}_u, \underline{P}_v$ <u>dipendono solo dalla superficie</u> e così i loro prodotti scalari $\langle \; , \; \rangle$ p.scalare in $\mathbb{R}^3$

Indichiamo con
$E = \langle \underline{P}_u, \underline{P}_u \rangle$
$F = \langle \underline{P}_u, \underline{P}_v \rangle$
$G = \langle \underline{P}_v, \underline{P}_v \rangle$

sono detti <u>COEFFICIENTI</u> della <u>1° FORMA FONDAMENTALE</u>

$$\boxed{\ell(t) = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} \, dt}$$

calcoliamoli per una superficie di ROTAZIONE.

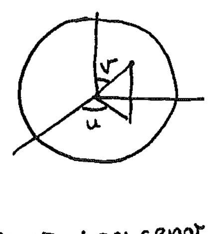
$E = \langle \underline{P}_u, \underline{P}_u \rangle = \langle (-f(v)\,\mathrm{sen}\,u, f(v)\cos u, 0), (-f(v)\,\mathrm{sen}\,u, f(v)\cos u, 0) \rangle = f^2$

$G = \langle \underline{P}_v, \underline{P}_v \rangle = \langle (f'(v)\cos u, f'(v)\,\mathrm{sen}\,u, g'(v)), f'(v)\cos u, f'(v)\,\mathrm{sen}\,u, g'(v) \rangle =$

$= f'^2 + g'^2$ — SE LA CURVA è PARAMETRIZZATA mediante ascissa curvilinea $= 1$ —

ES. $F = \langle \underline{P}_u, \underline{P}_v \rangle = -ff'\,\mathrm{sen}\,u\cos u + ff'\,\mathrm{sen}\,u\cos u + 0 = 0$ $\boxed{F=0}$ le linee coordinate sono $\perp$

il vettore tangente a $P(u=u_0, v)$ è $\underline{P}_v$
il vettore tangente a $P(u, v=v_0)$ è $\underline{P}_u$



ES. <u>TROVIAMO E, F, G per la SFERA</u>

$\begin{cases} x = \cos u\,\mathrm{sen}\,v \\ y = \mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v \\ z = \cos v \end{cases}$

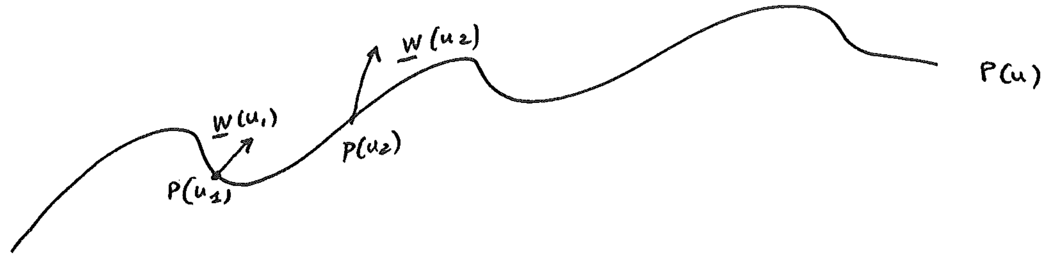
$\underline{x}_u = (-\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v, \cos u\,\mathrm{sen}\,v, 0)$
$\underline{x}_v = (\cos u\cos v, \mathrm{sen}\,u\cos v, -\mathrm{sen}\,v)$

$E = \mathrm{sen}^2 v$
$F = 0$
$G = \underbrace{\cos^2 u\cos^2 v + \mathrm{sen}^2 u\cos^2 v}_{\cos^2 v} + \mathrm{sen}^2 v = 1$

SUPERFICIE RIGATA

Sia $P(u)$ curva regolare di $\mathbb{R}^3$ $\quad \forall u \in I \quad (P: I \to \mathbb{R}^3)$

assegnamo un vettore $\underline{w}(u)$



$$\underline{w} : \underset{\substack{\| \\ I}}{(a,b)} \to \mathbb{R}^3$$

UNA SUPERFICIE RIGATA di direttrice $P(u)$ e' la superficie data dall' unione di tutte le rette passanti per $P(u)$ e che hanno come direzione quella di $\underline{w}(u)$ in u

$$\Sigma = \{ Q \in \mathbb{R}^3 \ \text{tc} \ \exists\, u \in (a,b) \ \text{tc} \ Q \text{ sta tutto sulla retta per } P(u) \text{ e } /\!/ \underline{w}(u) \}$$

ESEMPIO

- Il CILINDRO $\quad \gamma(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$

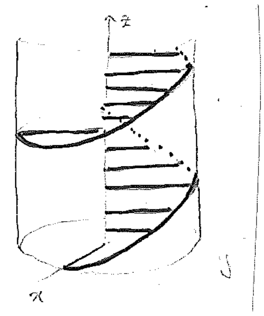
  $\underline{w}(u) = (0, 0, 1)$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{P}(u,v) &= (\cos u, \operatorname{sen} u, 0) + v(0,0,1) = \\ &= (\cos u, \operatorname{sen} u, v) \end{aligned}}$$

- ELICOIDE $\quad P(u) = (0, 0, \beta u)$

  $W(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$

  $P(u,v) = (v\cos u, v \operatorname{sen} u, \beta u)$



UNA PARAMETRIZZAZIONE di Σ

si chiede che $Q \in \Sigma \iff Q - P(u) /\!/ \underline{w}(u)$

cioe' $\exists\, v \in \mathbb{R}$ tc

$$\boxed{\underline{P}(u,v) = Q = P(u) + v\,\underline{w}(u)}$$

ci chiediamo se e' regolare

$\underline{P}_u = P'(u) + v\,\underline{w}'(u)$

$\underline{P}_v = \underline{w}(u)$

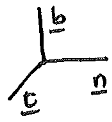
per essere regolare $\underline{P}_u$ e $\underline{P}_v$ devono essere l. ind.

$$0 \neq \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = \underline{P'(u) \wedge \underline{w}(u) + v\, \underline{w}'(u) \wedge \underline{w}(u)}$$

ES : SUPERFICIE RIGATA delle TANGENTI

fissiamo una curva $\gamma(u)$ [assumiamo che sia parametrizzata mediante s]

e come campo $\underline{W}(u) = \underline{t}(u)$ Tangente



$$\underline{P}(u,v) = \gamma(u) + v\,\underline{t}(u)$$

$$\underline{P}_u = \dot{\gamma}(u) + v\frac{dt}{du} = \underline{t}(u) + v\,K(u)\,\underline{n}(u)$$

$$\underline{P}_v = \underline{t}(u)$$

$$\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = v\,K(u)\,\underline{n}(u) \wedge \underline{t}(u) = -v\,\overset{\neq 0}{K(u)}\,\underset{\neq 0}{\underline{b}(u)}$$

LA SUPERFICIE e' REGOLARE $\Longleftrightarrow v \neq 0$

se $v = 0$ ho la curva

$\Longrightarrow$ e' Regolare in tutti i punti meno i punti della curva

[e' sconnessa, prendo una sua comp. connessa $v > 0$]

TROVIAMO IL piano tangente alla curva

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

VISTO che il VERSORE NORMALE

$$\underline{N} = \frac{-v\,K(u)\,\underline{b}(u)}{\|v\,K(u)\,b(u)\|} = -\frac{v}{\|v\|}\,\underline{b}(u)$$

$\|K(u)\| = K(u)$, $\|b(u)\| = 1$

IL piano tangente e' diretto come $\underline{t}$ e $\underline{n}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{e' IL PIANO OSCULATORE della CURVA}}$

- $E = \langle \underline{P}_u, \underline{P}_u \rangle = \langle \underline{t} + v K(u)\underline{n}, \underline{t} + v K(u)\underline{n} \rangle = 1 + v^2 K^2(u)$
- $G = \langle \underline{P}_v, \underline{P}_v \rangle = 1$
- $F = 1$

ES STESSO ESERCIZIO CON LE BINORMALI, Trovate punti regolari, NORMALE, piano tangente e coefficienti della 1° FORMA FONDAMENTALE.

$\gamma(u)$

$\underline{w}(u) = \underline{b}(u)$

$$P(u,v) = \gamma(u) + v\,\underline{b}(u)$$

$$\underline{P}_u = \gamma' + v b' = \underbrace{\gamma'(u)}_{\underline{t}(u)} + v\,\tau(u)\,\underline{n}(u)$$

$$\underline{P}_v = \underline{b}$$

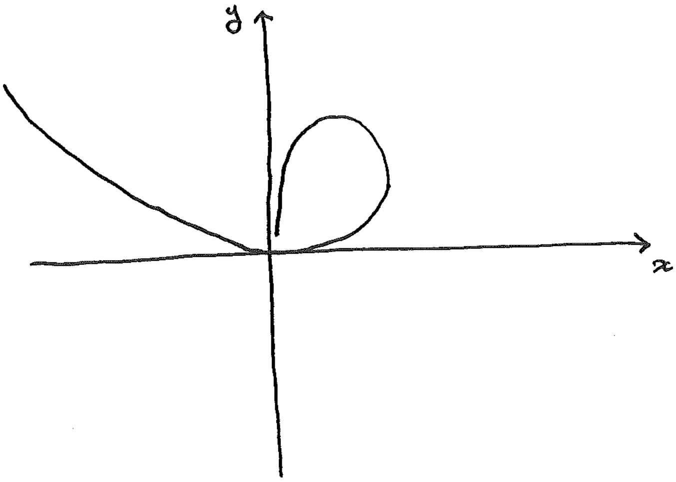
$$\underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = (\underline{t} - v\tau\underline{n}) \wedge \underline{b} = -\underline{n} - v\tau\underline{t} \neq 0 \quad \forall u,v$$

tutti i punti sono REGOLARI

FOLIUM DI CARTESIO

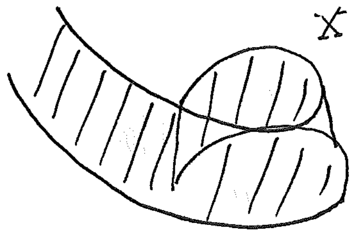
ESEMPIO di FOGLIO che <u>NON</u> e' SUP. REGOLARE

$$x = \frac{3u}{1+u^3} \qquad y = \frac{3u^2}{1+u^3} \qquad z = 0 \qquad \gamma(u)$$ FOGLIO DI CARTESIO

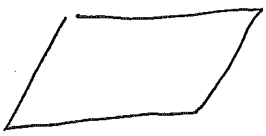


SE CONSIDERO LA SUPERFICIE RIGATA con $\gamma(u) + v\,(0,0,1)$

$$\underline{x}(u,v) = \left(\frac{3u}{1+u^3} , \frac{3u^2}{1+u^3} , v \right)$$

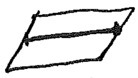


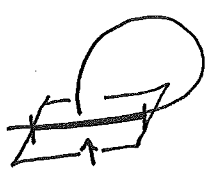
NON e' UNA SUPERFICIE REGOLARE poiche'



A

$\to P(\underbrace{A}_{0})$ NON e' <u>OMEOMORFO</u> AD A





NON e' UN APERTO NELLA TOPOLOGIA di X indotta da $\mathbb{R}^3$