INTERPRETAZIONE GEOMETRICA della CURVATURA di GAUSS

Ricordiamo questa interpretazione della curvatura K di Gauss di una superficie Σ in un punto p, che e' poi il modo in cui Gauss l'ha originariamente introdotta.

Per farlo abbiamo bisogno di una definizione.

Siano Σ e $\bar{\Sigma}$ due SUPERFICI <u>ORIENTATE</u>

Sia $\varphi : \Sigma \longrightarrow \bar{\Sigma}$ UN' Applicazione DIFFERENZIABILE

Sia $p \in \Sigma$ e $d\varphi_p$ il differenziale (che assumiamo sia non singolare in p)

- diciamo che φ <u>PRESERVA L'ORIENTAZIONE</u> in p $\Longleftrightarrow$ data una base positiva $\{w_1, w_2\}$ di $T_p\Sigma$ $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ E' UNA BASE POSITIVA di $T_{\varphi(p)}\bar{\Sigma}$

- Se $\{d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2)\}$ NON e' positiva allora si dice che φ INVERTE ORIENTAZIONE

Se consideriamo $\underline{N}: \Sigma \longrightarrow S^2$, Σ e $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ un'orientazione su Σ, $\underline{N}$ induce un'orientazione su S^2 ancora data da $\underline{N}$.

Sia p un punto di Σ in cui $d\underline{N}_p$ e' NON SINGOLARE

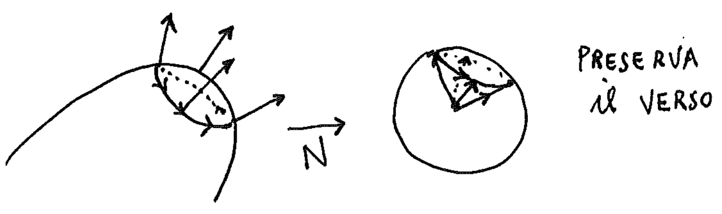
Sia $\{w_1, w_2\}$ base di $T_p\Sigma$

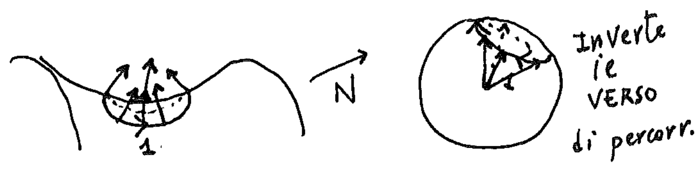
$$
\begin{aligned}
d\underline{N}_p(w_1) \wedge d\underline{N}_p(w_2) &= d\underline{N}_p(P_u \dot{u}_1 + P_v \dot{v}_1) \wedge d\underline{N}_p(P_u \dot{u}_2 + P_v \dot{v}_2) = \\
&= \left(d\underline{N}_p(P_u)\dot{u}_1 + d\underline{N}_p(P_v)\dot{v}_1\right) \wedge d\underline{N}_p(P_u)\dot{u}_2 + d\underline{N}_p(P_v)\dot{v}_2 = \\
&= \left((a_{11} P_u + a_{21} P_v)\dot{u}_1 + (a_{21} P_u + a_{22} P_v)\dot{v}_1\right) \wedge (a_{11} P_u + a_{21} P_v)\dot{u}_2 + (a_{21} P_u + a_{21} P_v)\dot{v}_2) \\
&= \det \underline{N}_p \cdot w_1 \wedge w_2 = K\, w_1 \wedge w_2
\end{aligned}
$$

= per $w_1 = \underline{P}_u$ $w_2 = \underline{P}_v$

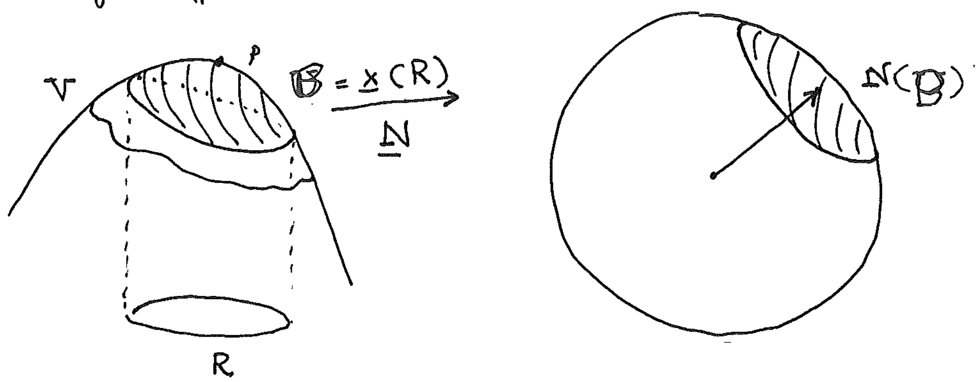
$$
\begin{aligned}
\underline{N}_u \wedge \underline{N}_v &= (a_{11} \underline{P}_u + a_{21} \underline{P}_v) \wedge (a_{12} \underline{P}_u + a_{22} \underline{P}_v) = \\
&= (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})\, \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v = K\, \underline{P}_u \wedge \underline{P}_v
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ LA MAPPA di GAUSS preserva l'orientazione in p se $K(p) > 0$
LA MAPPA di Gauss Inverte l'orientazione in p se $K(p) < 0$





Per tener conto di questo fatto, fissiamo come convenzione che L'AREA di una REGIONE contenuta in un intorno coordinato V, ove $K \neq 0$ e l'area della sua immagine tramite $\underline{N}$ hanno lo stesso segno se $K > 0$ o segno opposto se $K < 0$



PROPOSIZIONE Sia $p \in \Sigma$ in cui $K \neq 0$ e sia V un intorno coordinato connesso di p dove K NON CAMBIA SEGNO.

Allora
$$K(p) = \lim_{A \to 0} \frac{A'}{A}$$

dove A e' l'area della regione $B \subseteq V$ che contiene p e A' e' l'area della sua immagine tramite la mappa di Gauss, $\underline{N}(B)$ e il limite viene preso su di una serie di regioni $B_n \to p$, nel senso che ogni sfera intorno a p contiene tutti i B_n per n sufficientemente grande.

dim $\displaystyle A = \int_R |P_u \wedge P_v| \, du\,dv$ e' l'area di B

A' area di $N(B)$ e' $\displaystyle \int_R |N_u \wedge N_v| \, du\,dv$

usando la convenzione sull'area e $N_u \wedge N_v = K(P_u \wedge P_v)$

$$A' = \int_R K |P_u \wedge P_v| \, du\,dv = \boxed{\text{Area con segno di } N(B)}$$

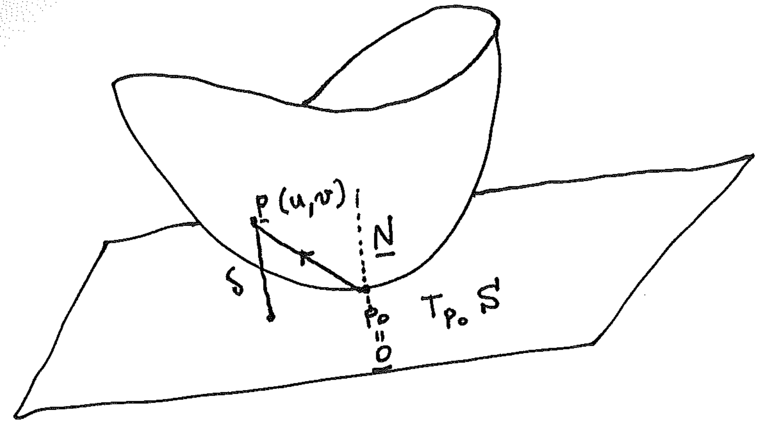
Teorema della media integrale se f continua e limitata su D connesso
$f: D \to \mathbb{R}$ $\displaystyle \int_D f(u,v)\,du\,dv = f(P_0)\,\text{Area}(D)$ per un $P_0 \in D$

$\Longrightarrow$ $A' = K(P')|P_u \wedge P_v|(P'')\,\text{Area } R$

$A = |P_u \wedge P_v|(P'')\,\text{Area } R$

$$\boxed{\lim_{B \to P} \frac{\text{Area } R \; K(P')|P_u \wedge P_v|(P')}{\text{Area } R \; |P_u \wedge P_v|(P'')} = K(P)}$$

VALUTAZIONE della distanza con segno dei punti della superficie dal piano tangente alla superficie nel punto $P_0 = \underline{0}$



$$\delta = \langle \underline{P}, \underline{N} \rangle$$

$\underline{P}(u,v)$ e' C^∞ in un intorno di $P_0 = \underline{0}$ posso svilupparlo in serie

$$P(u,v) - P_0 = \vec{PO}$$

$$\underline{P}(u,v) = P_0 + \underline{P_u}\Big|_{\underline{0}} u + \underline{P_v}\Big|_{\underline{0}} v + \frac{1}{2}\left(P_{uu}\Big|_{\underline{0}} u^2 + 2 P_{uv}\Big|_{\underline{0}} uv + P_{vv}\Big|_{\underline{0}} v^2 \right)$$

$$+ \underline{o}(u^2+v^2) \qquad \lim_{u,v \to 0} \frac{o(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 0$$

δ distanza con segno da $\underline{P}$ al piano $T_{P_0} S$, $P_0 = \underline{0}$

$$\underline{\delta} = \langle \underline{P}^{\,P_0}, \underline{N} \rangle = \frac{1}{2} \langle \underbrace{P_{uu}, N}_{= e} \rangle u^2 + \frac{1}{2} 2 \langle \underbrace{P_{uv}, N}_{= f} \rangle uv + \frac{1}{2} \langle \underbrace{P_{vv}, N}_{= g} \rangle v^2$$

$P_u \perp \underline{N}$
$P_v \perp \underline{N}$

$$\underline{\delta} = \frac{1}{2} \quad e u^2 + 2 f uv + g v^2 = \frac{1}{2} \mathrm{II}^{\circ} \left(u \underline{P_u}\Big|_{\underline{0}} + v P_v\Big|_{\underline{0}} \right)$$

CONSEGUENZA

- Se p_0 e' UN PUNTO ELLITTICO K_1, K_2 sono concordi $\Rightarrow$ K_n ha segno costante $\Rightarrow$ II° ha segno costante

  δ ha segno costante

  LA SUPERFICIE vicino a p_0 sta tutta da una parte rispetto al piano tangente

- Se p_0 e' UN PUNTO IPERBOLICO K_1, K_2 discordi $\Rightarrow$ II° cambia segno

  in un intorno di p_0 Σ sta da parti opposte rispetto allo stesso piano.

⊙ I un punto parabolico ed anche in un punto piatto la superficie può stare dalle stesse parti o da parti opposte

• ES: Monkey's Saddle $z = x^3 - 3xy^2$ $\boxed{P_0 \text{ E' PIATTO}}$

sta da entrambe le parti (fig 2)

• ES: Cilindro sta tutto da una parte

(fig 1)

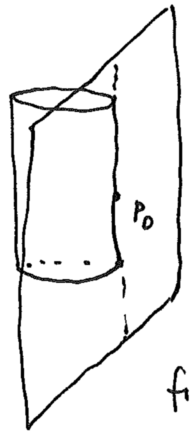
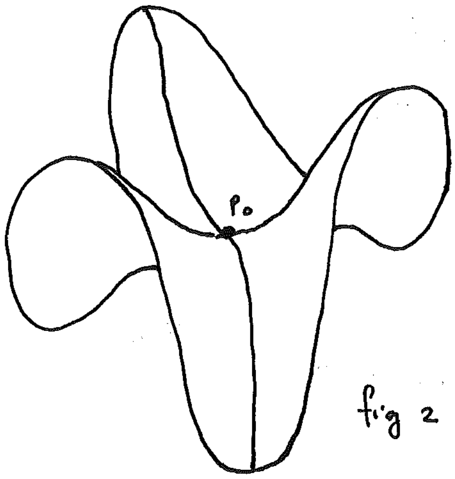


fig 1



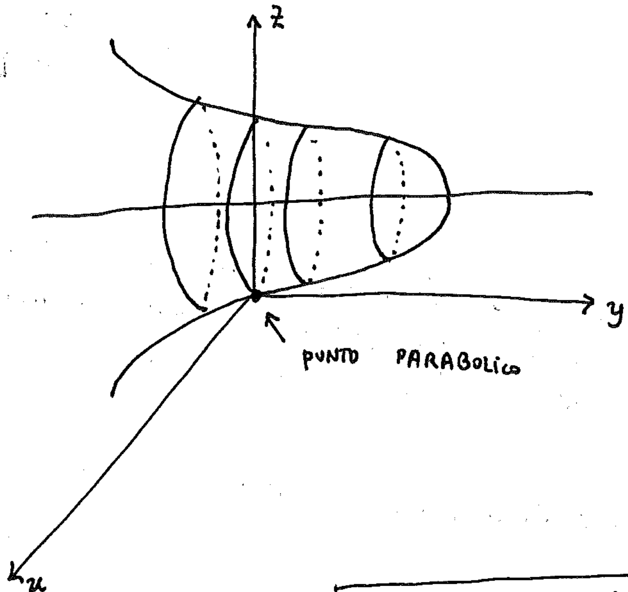
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 - 3v^2 u \end{cases}$$

$\underline{0} = (0,0,0)$ e' un punto <u>PIATTO</u>

fig 2

• <u>ES</u>: La superficie ottenuta ruotando la curva $z = y^3$ $-1 < z < 1$ intorno all'asse $z = 1$ ha un punto parabolico in $\underline{0} = (0,0,0)$

ma in un intorno di quel punto ci sono punti che stanno da parti opposte



VISTO come <u>esercizio</u>:

- Dimostrare che in un punto ellittico $p \in \Sigma$ il piano tangente $T_p\Sigma$ lascia la sup tutta da una parte
- Dimostrare che in un punto iperbolico questo non accade
- Cosa succede nei punti parabolici e piatti?

$a_{12} =$

$$\Leftrightarrow \quad a_{12} = 0 = \frac{eF - fE}{EG - F^2} = \begin{cases} f = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

$$a_{21} = 0 \; = \; \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

supponiamo che la param sia ortogonale $F=0$

$$fG = 0 \begin{cases} G = 0 \\ f = 0 \end{cases}$$

se $f \neq 0$ $\quad E = G = 0 = F$

$\Rightarrow \mathrm{I} = 0$ impossibile

$$\Rightarrow \boxed{f = 0}$$

[In una parametrizzazione ortogonale $(F=0)$ cond. nec. e suff perche' le linee coordinate siano di curvatura e' che $f = F = 0$]

Es: Nelle superfici di rotazione $F=0$ e $f=0$

PARALLELI e MERIDIANI SONO LINEE DI CURVATURA

LINEE DI CURVATURA e LINEE ASINTOTICHE

Come ES: Dimostrare che $\alpha(t) = \underline{X}(u(t), v(t))$ e' ~~asintotica~~ curv. $\Leftrightarrow$ vale (✱)

Una curva regolare $\Gamma \subseteq S$ si dice <u>Linea di Curvatura</u> $\Leftrightarrow$ $\forall p \in \Gamma$ la retta tangente e' una direzione principale in p.

> <u>**TEOREMA**</u> (Olinde Rodriguez) $\alpha(t)$ e' una Linea di curvatura
>
> $$\Leftrightarrow \quad d\mathcal{N}(\dot\alpha(t)) = \lambda(t)\,\dot\alpha(t)$$

<u>dim</u>: perche' sia una linea di curvatura $\dot\alpha(t)$ deve essere una direzione principale i.e un autovettore di $d\mathcal{N}$ e questo accade $\Leftrightarrow$ $d\mathcal{N}(\dot\alpha(t)) = \lambda(t)\,\dot\alpha(t)$

<u>OSS</u> $\dot\alpha(t) = \underline{P}_u \dot u + \underline{P}_v \dot v$ e' una Linea di curvatura $\Leftrightarrow$

$$d\mathcal{N}(\underline{P}_u \dot u + \underline{P}_v \dot v) = \lambda(t)(P_u \dot u + P_v \dot v)$$

$$N_u \dot u + N_v \dot v = \lambda(t) \underline{P}_u \dot u + \lambda(t) P_v \dot v$$

$$(a_{11} P_u + a_{21} P_v)\dot u + (a_{12}\underline{P}_u + a_{22}\underline{P}_v)\dot v = \lambda(t) P_u \dot u + \lambda(t) P_v \dot v$$

$$a_{11}\dot u + a_{12}\dot v = \lambda(t)\dot u$$
$$a_{21}\dot u + a_{22}\dot v = \lambda(t)\dot v$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \lambda(t)\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} \dot u & a_{11}\dot u + a_{12}\dot v \\ \dot v & a_{21}\dot u + a_{22}\dot v \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{21}\dot u^2 + a_{22}\dot v\dot u - a_{11}\dot u\dot v - a_{12}\dot v^2 = 0 \qquad (✱)$$

$$\boxed{a_{21}\dot u^2 + (a_{22} - a_{11})\dot u\dot v - a_{12}\dot v^2 = 0}$$

$\underline{X}(u(t), v(t)) = \alpha(t)$ e' di CURVATURA $\Leftrightarrow$ soddisfa alla eq. diff.

<u>COROLLARIO</u> Una Linea coordinata

$\underline{X}(u, v_0)$ — $u = u$, $v = \text{cost}$ $\rightarrow$ $\dot u = 1$, $\dot v = 0$

$\underline{X}(u_0, v)$ — $v = v$, $u = \text{cost}$ $\rightarrow$ $\dot u = 0$, $\dot v = 1$

e' di curvatura

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{a_{12} = a_{21} = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$f = F = 0$ param. ortogonale

$\underline{v}$ e' asintotica

$\parallel$

$P_u \dot{u} + P_v \dot{v}$

$\mathrm{II}^\circ(v) = e\dot{u}^2 + 2f\dot{u}\dot{v} + g\dot{v}^2 = 0$ $\underbrace{\qquad}_{\text{se } \dot{v} \neq 0}$ $e\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right)^2 + 2f\left(\frac{\dot{u}}{\dot{v}}\right) + g = 0$ $\qquad \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \alpha$

se il punto e' piatto $\equiv 0$ tutte le direzioni sono asintotiche

perche' ci sia soluzione $\dot{u}$

$$\frac{\Delta}{4} = (f)^2 - ge = (f^2 - ge) = (-\det \mathrm{II}^\circ)$$

$=0 \quad \exists!$ soluzione $\dot{u}_1/\dot{v}_1 = \alpha_1$

$\frac{\Delta}{4} \geq 0 \iff \det \mathrm{II}^\circ \leq 0 \iff K \leq 0$

$< 0 \quad \exists$ 2 soluzioni $\frac{\dot{u}_1}{\dot{v}_1}, \frac{\dot{u}_2}{\dot{v}_2} \quad \alpha_1, \alpha_2$

Se ho una linea coordinate $\begin{matrix}\dot{u}=1\\ \dot{v}=0\end{matrix}$ u-curva $\boxed{e=0}$

$\begin{matrix}\dot{v}=1\\ \dot{u}=0\end{matrix}$ v-curva $\boxed{g=0}$

cond. nec. e suff perche' le linee ~~di~~ coordinate siano asintotiche e' che $e=g=0$

$$\left[\ \underline{v} \in T_pS \text{ e' detta } \underline{\text{DIREZIONE ASINTOTICA}} \iff K_n(\underline{v}) = 0 \ \right]$$

Def Una curva $\alpha(t)$ su Σ e' <u>asintotica</u> $\Leftrightarrow$ se $\forall t$ $\dot\alpha(t)$ tc $K_n(\dot\alpha(t))=0$

ESEMPI

p <u>ellittico</u> $\Rightarrow$ K_1, K_2 concordi $\Rightarrow$ <u>non esistono linee asintotiche per p</u>

p <u>Iperbolico</u> $\Rightarrow$ $\exists$ almeno una direzione asintotica (<u>ne esistono esattamente 2</u>)

p <u>parabolico</u> $\Rightarrow$ $\exists!$ una linea asintotica

p piatto $\Rightarrow$ <u>tutte le linee sono asintotiche</u>

perche' sia asintotica la $\mathrm{II}^\circ(\dot\alpha(t))=0$ $\longrightarrow$ $(dN(\dot\alpha(t)),\dot\alpha(t))=0$

$$\dot\alpha(t) = P_u\dot u + P_v\dot v = P_u a + P_v b$$

$$\dot\alpha(t) = a\underline{P_u} + b\underline{P_v}$$

$$\mathrm{II}^\circ \quad \begin{pmatrix} a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e\dot u^2 + 2f\dot u\dot v + g\dot v^2 = 0 \quad \text{se } \dot v \neq 0 \\ e\left(\frac{\dot u}{\dot v}\right)^2 + 2f\left(\frac{\dot u}{\dot v}\right) + g = 0 \\ \text{ha soluzione} \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4} = f^2 - gf = -\det \mathrm{II} \\ \Leftrightarrow \det \mathrm{II}^\circ_p \leq 0 \quad \left| \begin{array}{l}\text{PUNTI IPERB.} \\ \text{punti parab.}\end{array}\right. \end{array}}$$

$$a^2 e + 2abf + b^2 g = 0 \qquad (*)$$

- se il punto e' piatto $(*)$ e' identicamente nulle

Troviamo a

$$\frac{\Delta}{4} = b^2f^2 - b^2eg = b^2\, f^2 - eg = b^2(-\det \mathrm{II}^\circ)$$

ho soluzioni $\Leftrightarrow$ $-\det \mathrm{II}^\circ \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\det \mathrm{II}^\circ \leq 0$

$\Updownarrow$

punti iperbolici o parabolici

- se p parabolico ho ! soluzione per a
- se p iperbolico ho 2 soluzioni per a

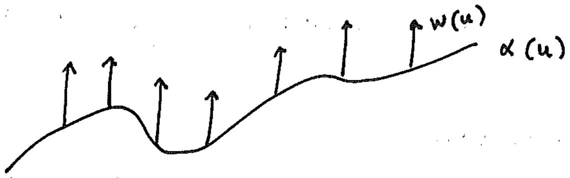
$a^2+b^2=1 \Rightarrow b^2 = 1-a^2$
$b=\pm\sqrt{1-a^2}$

$\boxed{ES}$ (0).

- dimostrare che Σ superficie RIGATA non ha mai punti ellittici -

Se Σ e' una superficie rigata

do una curva



e un campo lungo la curva $w(u)$

$P(u, v) = \alpha(u) + v\,\underline{w}(u)$ $\qquad u \in I$

$P_u = \dot{\alpha}(u) + v\,\dot{w}(u)$ $\qquad v \in \mathbb{R}$

$P_v = \underline{w}(u)$

In un generico punto p della superficie rigata la retta $\pi_p // \underline{w}_p$ e' tutta contenuta in Σ

$K_n(\underline{w}_p) = 0$

$\Rightarrow$ ha una direzione asintotica (una curva asintotica)

$\Rightarrow$ <u>non ha punti ellittici</u>

<u>Def</u>: Dico che $p \in \Sigma$ e' ombelicale $\Leftrightarrow$ $K_1(p) = K_2(p)$

- **Teorema 1** Se Σ ha tutti punti ombelicali (i.e $K_1 = K_2 \ \forall p \in \Sigma$) allora Σ e' un pezzo di piano o un pezzo di sfera

[ESERCIZIO 1]

- **teorema 2** Provare che Σ compatta ha almeno un punto ellittico.

(ESERCIZIO)

[ESERCIZIO 2]

DIMOSTRIAMO il teorema 1 (solo localmente) $p \in V$ intorno coordinato

p e' ombelicale $\Leftrightarrow$ K_{M_p} e' costante in tutte le direzioni $K_1 = K_2$

$$\forall \alpha(t) \qquad dN(\dot\alpha(t)) = \lambda(t)\dot\alpha(t)$$

voglio dimostrare innanzi tutto che $\lambda(t)$ e' costante

$$\dot\alpha(t) = P_u \dot u + P_v \dot v$$

$$dN(P_u \dot u + P_v \dot v) = \lambda(t) \ P_u \dot u + P_v \dot v$$

$$N_u = dN(P_u)\cancel{\dot u} = \lambda(t) P_u \cancel{\dot u}$$

$$N_v = dN(P_v) = \lambda(t) P_v$$

derivo rispetto a v

$$N_{uv} = \lambda_v P_u + \lambda P_{uv} \Rightarrow \lambda_v P_u + \lambda_u P_v = 0$$
$$N_{uv} = \lambda_u P_v + \lambda P_{uv}$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_v = \lambda_u = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \text{cost} \text{ in } V$$

$\boxed{\lambda = 0}$ $\quad N_u = N_v = 0$ in V $\Rightarrow N = N_0$ $\quad \langle N_0, (P(u,v) - \underset{p_0}{P(u_0,v_0)})\rangle = 0$

$dN \equiv 0$ e' contenuto in un piano ortogonale a N

$$\langle N_0, P(u,v)\rangle_u = \langle N_0, P(u,v)\rangle_v = 0$$

$\boxed{\lambda \neq 0}$ Noi consideriamo $P(u,v) - \frac{1}{\lambda} N(u,v) = y(u,v)$ $\quad (*)$

$$P_u - \frac{1}{\lambda} N_u = y_u = 0$$
$$P_v - \frac{1}{\lambda} N_v = y_v = 0$$

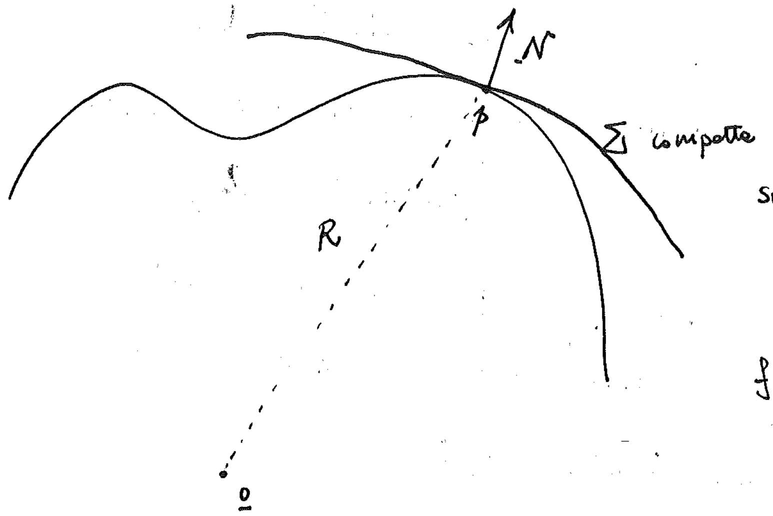
y e' cost $= y_0$

$$P(u,v) - y_0 = \frac{1}{\lambda} N(u,v)$$

$$|P(u,v) - y_0|^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

tutti i punti di V sono contenuti in una sfera di raggio $\frac{1}{\lambda}$ e centro y_0

Per dimostrarlo globalmente e' sufficiente osservare che Σ e' connessa $\Rightarrow \forall r \in \Sigma$ $\exists \ \alpha(t)$ tc $\alpha : I = [0,1] \to \Sigma$ $\alpha(0) = p$ $\alpha(1) = r$ $\forall$ punto di $\alpha(t)$ faccio il ragionamento $\Rightarrow$ Ricopro $\alpha(t)$ tramite V_t intorni in cui e' un pezzo di sfera o di piano -ne estraggo un ricoprimento finito da $\alpha^{-1}(\cup V_t)$ che ricopre $[0,1] = I$ e ho la Tesi.



Sia f funzione definita su Σ: distanza da o

f è continua su di un compatto
Sia p il punto di max

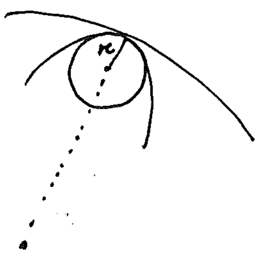
$f(p) = R$

consideriamo la sfera S_R di centro o e raggio R

$\Sigma \subseteq S_R$

ed è tangente in p a S_R

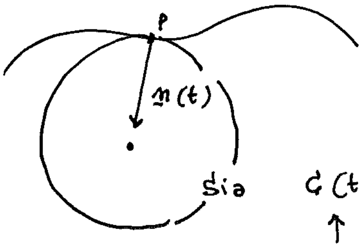
∀ SEZIONE NORMALE trovo una curva che ha CURVATURA $= \dfrac{1}{\text{raggio della } \cancel{\text{cerchietto}} \text{ circ. che approssima la curva in } p}$ | CIRCONFERENZA OSCULATRICE



$k = \frac{1}{r} > \frac{1}{R}$

$\Longrightarrow K(p) = k_1 \cdot k_2 > \frac{1}{R^2}$

PARENTESI:



$\alpha(t)$ CURVA

$k(t)$ curvatura in $\alpha(t)$

$\frac{1}{k(t)} = \rho(t)$

Sia $C(t)$ t.c. $\alpha(t) - C(t) = \rho(t)\, \underline{n}(t)$

↑ centro di curvatura

Si chiama circonferenza osculatrice la circonferenza tg in $\alpha(t)$ e con centro $C(t)$