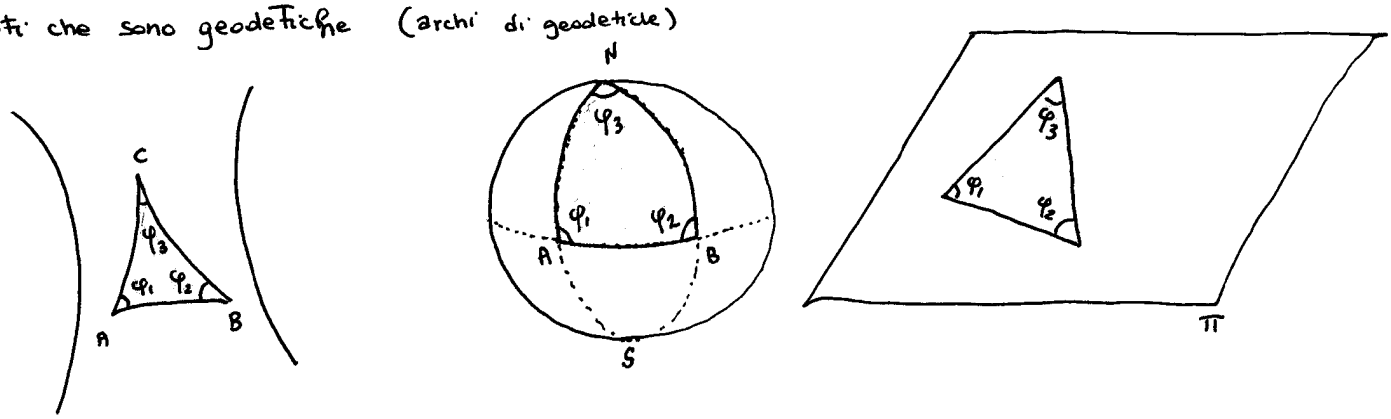
IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET (9 LEZIONE)

– 22 Maggio –

La prima formulazione di questo teorema e' dovuta a Gauss ed e' relativa alla somma degli angoli interni di un triangolo.

Gauss considera **TRIANGOLI GEODETICI** ovvero triangoli su SUPERFICI CHE hanno lati che sono geodetiche (archi di geodetiche)



Se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono GLI ANGOLI INTERNI DEL TRIANGOLO, K LA CURVATURA di GAUSS Σ

$T_{\text{TRIANGOLO}}$ su Σ

TEOREMA 1

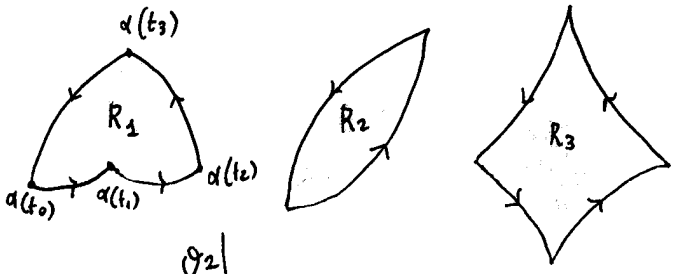
$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i - \pi = \iint_T K \, d\sigma$$

- Se $K > 0$ la somma degli angoli interni $> \pi$
- se $K < 0$ la somma degli angoli interni $< \pi$
- se $K = 0$ la somma degli angoli interni $= \pi$

La VERSIONE LOCALE DEL TEOREMA DI GAUSS BONNET ha come conseguenza il TEOREMA 1

Sia $\underline{x}(u,v)$ una parametrizzazione di una superficie regolare Σ, sia $S = \underline{x}(U)$ $U \subseteq \mathbb{R}^2$

Def $R \subseteq \underline{x}(U) = S$ e' UNA <u>REGIONE SEMPLICE</u> $\Longleftrightarrow$ R e' OMEOMORFA AD UN DISCO $\subseteq \mathbb{R}^2$
IL SUO BORDO e' <u>UNA CURVA REGOLARE A TRATTI</u>, <u>CHIUSA</u>



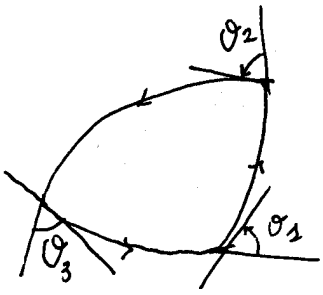
sono REGIONI SEMPLICI

$\alpha(t)$ e' il bordo ed e' una curva <u>REGOLARE A TRATTI</u>, CHIUSA

$\widehat{\alpha(t_0), \alpha(t_1)}$ REGOLARE

$\widehat{\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})}$ REGOLARE

$\alpha(t_i)$ sono I <u>VERTICI</u>



ϑ_i angoli esterni <u>con segno</u> dato dall'orientazione positiva della curva

Se $K_g(s)$ indica la curvatura geodetica della curva (POSITIVAMENTE ORIENTATA)

assumiamo inoltre che la curva bordo sia parametrizzata mediante ascissa curvilinea

Siano $\alpha(s_0), \alpha(s_1), \dots \alpha(s_k)$ I VERTICI della Regione, $\theta_1, \dots \theta_k$ gli angoli esterni. $\alpha(s_{k+1}) = \alpha(s_0)$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} K_g(s) + \iint_R K \, d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi}$$

VERSIONE LOCALE del TEOREMA di GAUSS BONNET.

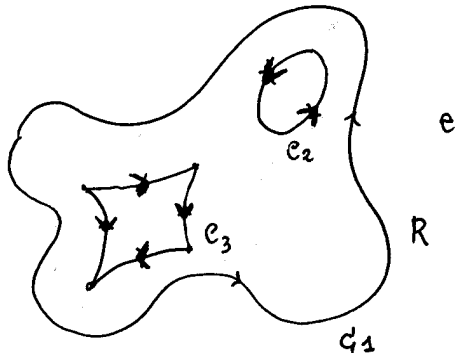
- C'e' un teorema che lega θ_i e φ_i che si chiama TEOREM of TURNING TANGENTS – che non dimostriamo – ma che $\Rightarrow$ $2\pi - \sum \theta_i$ su di un triangolo $= -\pi + \sum_{i=0}^{3} \varphi_i$

se considero un Triangolo GEODETICO $K_g = 0$ sul bordo

$$\Rightarrow \iint_R K \, d\sigma = 2\pi - \sum_{i=0}^{3} \theta_i = -\pi + \sum \varphi_i = \sum_{i=0}^{3} \varphi_i - \pi$$

$\boxed{\text{RITROVIAMO IL TEOREMA 1}}$

SE CONSIDERIAMO UNA <u>REGIONE REGOLARE</u> (e' una regione il cui bordo e' unione finita di curve semplici regolari a tratti che non si intersecano).



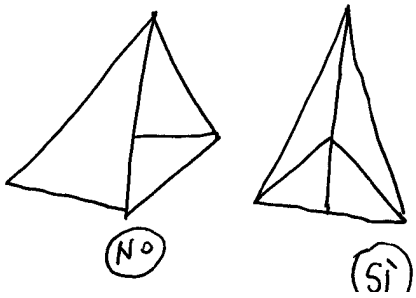
e' una <u>regione regolare</u>, con il bordo $\boxed{\partial R = C_1 \cup C_2 \cup C_3}$

Diciamo che abbiamo una TRIANGOLAZIONE su R sse e' possibile scrivere

- $R = \bigcup T_i$ $\quad T_i \simeq \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ Triangoli
- $T_i \cap T_j = \emptyset$ o se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ l'intersezione e' data da un vertice o da un lato.

data una REGIONE REGOLARE vale il SEGUENTE:

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ OGNI REGIONE REGOLARE e' TRIANGOLABILE



se indichiamo con V : numero di VERTICI
F : numero delle facce
L : numero dei lati

per una triangolazione di $R \subseteq S$

$$\chi(R) = F + V - L$$

è detta <u>CARATTERISTICA di Eulero Poincaré</u>

(non dipende dalla triangolazione) — E' UN Invariante TOPOLOGICO —

⊙ Se Σ è una superficie compatta connessa — con g indichiamo il genere della superficie —

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g$$

$\uparrow$ numero di BUCHI

SFERA $\chi(\Sigma) = 2$

TORO $\chi(\Sigma) = 0$

IL TEOREMA di GAUSS-BONNET GLOBALE mette in relazione l'<u>invariante ISOMETRICO CURVATURA</u> e <u>l'invariante topologico</u> χ <u>CARATTERISTICA DI EULERO</u>

se C_i sono le curve semplici che costituiscono il bordo di R

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{l=1}^{p} \theta_l = 2\pi \chi(R)}$$

TEOREMA di GAUSS BONNET GLOBALE

se Σ è una superficie compatta $R = \Sigma$ $\partial R = \phi$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_\Sigma K\, d\sigma = 2\pi \chi(\Sigma) = 2\pi(2 - 2g)}$$

<u>APPLICAZIONI</u>

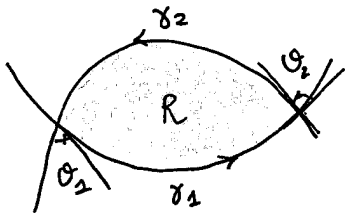
1. UNA SUPERFICIE COMPATTA CON CURVATURA POSITIVA è OMEOMORFA AD UNA SFERA.

Infatti se $K>0 \Rightarrow \iint_R K\,d\sigma > 0 \Rightarrow 2\pi(2-2g)>0$

pertanto $g=0 \Rightarrow \Sigma \simeq S^2$.

2. Sia S una superficie con curvatura $K<0$ allora due geodetiche non possono intersecarsi formando una regione semplice R.

Siano γ_1, γ_2 due geodetiche



se si intersecassero $\quad k_g(\gamma_1) = k_g(\gamma_2) = 0$

$$\iint_R K\,d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi \qquad \left(\theta_1, \theta_2 < \pi \;\; \underset{0}{\vee}\right.$$

$$\iint_R \underset{\overset{\wedge}{0}}{K}\,d\sigma = 2\pi - \theta_1 - \theta_2 > 0$$

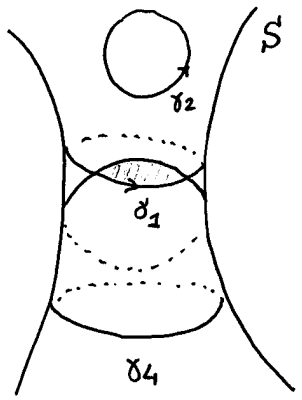
ma $K<0$ (assurdo)

- se $\theta_1, \theta_2 = 0$ i.e le due curve formano un'unica curva chiusa

$$0 > \iint_R K = 2\pi > 0 \qquad \text{(assurdo)}$$

$\Rightarrow \nexists$ CURVE GEODETICHE CHIUSE SEMPLICI su Σ con $\chi(\Sigma)<0$ (*)

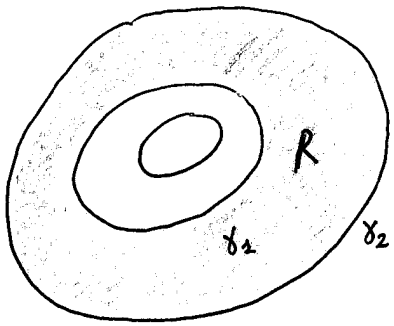
3. Sia S OMEOMORFA al cilindro con $K<0$; allora S ammette al massimo una geodetica semplice chiusa.



⊙ γ_2 $\nexists$ per quanto provato (*)

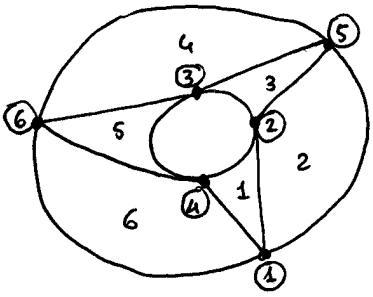
⊙ γ_3 $\nexists$ per quanto provato in **2**.

se $\exists$ γ_4 rivista sul piano



$$2\pi\chi(R) = 0 = \iint_R K\,d\sigma \qquad K<0$$

CONTRADDIZIONE.



$F=6$
$V=6$
$L=12$

$\chi(R)=0$