FOGLIO DI ESERCIZI 1

— ESERCIZI VARI SULLA PARTE DELLE CURVE PARAMETRIZZATE IN $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ —

1. • TROVARE CURVATURA E TORSIONE della curva

$$\alpha(t) = \left(t;\ \frac{1+t}{t},\ \frac{1-t^2}{t} \right) \qquad t \in [1, 10]$$

• VERIFICARE CHE LA CURVA E' PIANA E SCRIVERE L'EQUAZIONE DI TALE PIANO

2. • TROVARE CURVATURA E TORSIONE delle curva

$$\beta(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ t) \qquad t \in [0, 5]$$

3. • DATA LA CURVA NELLO SPAZIO $\alpha(t) = (3t^2, 1+3t, a t^3)$ $\quad t \in [-5, 5]$

• Stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva e' contenuta in un piano.

• posto $a = 2$ calcolare la terna di Frenet, curvatura e torsione

• posto $a = 2$ calcolare la lunghezza d'arco di curva compreso fra $A = (0, 1, 0)$ e $B = (3, -2, -2)$

4. • Sia $\alpha(t)$ una curva parametrizzata non passante per l'origine. Sia $\alpha(t_0)$ il punto piu' vicino all'origine e $\alpha'(t_0) \neq 0$. Provare che $\alpha(t_0) \perp \alpha'(t_0)$.

5. Sia $\alpha(t)$ una curva t.c. la sua derivata seconda $\alpha''(t) \equiv 0$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$ provare che $\alpha(t)$ e' una retta.

6. Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata e sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ un vettore fissato. Se

① $\alpha'(t) \perp \underline{v}$ $\quad \forall\, t \in I$

② $\alpha(0) \perp \underline{v}$

$\Longrightarrow \alpha(t) \perp v \quad \forall\, t \in I$

PROVARE

7. Sia $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata t.c. $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall\, t \in I$ provare che $|\alpha(t)| = \text{cost} \iff \alpha(t)\,\dot\alpha(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$

(8) * Sia $p : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata differenziabile.
Sia p biregolare e κ e τ siano curvatura e torsione. Se $\forall t$ $\tau(t) \neq 0$ e $\kappa'(t) \neq 0$ Allora provare che $p(t)$ giace su di una sfera di raggio R

$$\Longleftrightarrow \forall t \in I \qquad \left(\frac{1}{\kappa(t)}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'(t)}{\kappa^2(t)\,\tau(t)}\right)^2 = R^2$$

(9) * Sia $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata differenziabile, biregolare con $\tau(u) \neq 0$ $\forall u \in I$. Sia r una retta orientata in $\mathbb{R}^3$

PROVARE che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(a) g e' un' ELICA CILINDRICA di asse r

(b) $\forall u \in I$, l' asse normale principale a g in u e' ortogonale a r.

(c) $\forall u \in I$, l'asse binormale principale a g forma un angolo di ampiezza costante con r.

(d) $\forall u \in I$ il rapporto $\dfrac{\kappa(u)}{\tau(u)}$ e' costante

(10) Si consideri la curva differenziabile parametrizzata $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$g(u) = \left(u,\ u^2,\ \frac{2}{3}u^3\right)$$

Si verifichi che g e' un 'elica cilindrica con asse la bisettrice del piano $y=0$. Si determinino tutti gli elementi di Frenet di g e torsione e curvatura.

(11) TROVARE LA CURVATURA DELLA CURVA DATA IN FORMA CARTESIANA $5x^2 - 6xy + 4y^2 + 2y = 0$ IN UN SUO GENERICO PUNTO.