SOLUZIONI di alcuni esercizi del foglio 5

ESERCITAZIONI 6

ES 1 – SOLUZIONE nella Lez 6 –

ES 2 $\underline{x}(x,y) = (x, y, axy) = (u, v, f(u,v))$

$\underline{x}_u = (1, 0, f_u) = (1, 0, ay)$

$\underline{x}_v = (0, 1, f_v) = (0, 1, ax)$

$$K(p) = \frac{|H(\varphi)|}{(1+f_u^2+f_v^2)^2}$$

$$N = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{(1+f_u^2+f_v^2)^{1/2}} = \frac{(-ay, -ax, 1)}{\sqrt{1+(ax)^2+(ay)^2}}$$

$$K(p) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix}}{(1+(ay)^2+(ax)^2)^2} = \frac{-a^2}{(1+a^2y^2+a^2x^2)^2} < 0$$

$f_{uu} = 0$

$f_{uv} = a$

$f_{vv} = 0$

$F \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{\text{COORDINATE NON ORTOGONALI}}$

$e = g = 0 \quad f = a$

$$H(p) = \frac{\frac{1}{2}\left[(1+(ay)^2)\cdot 0 - 2\,axay\cdot a + (1+(ax)^2)\cdot 0\right]}{(1+a^2x^2+a^2y^2)^{3/2}} = \frac{a^3xy}{(\quad)^{3/2}}$$

per $p = (0,0,0)$ $\quad K(\underline{0}) = \frac{-a^2}{(\quad)^2} \qquad H(0) = 0$

$H(\underline{0}) = 0 \Rightarrow k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = -k_2}$ CURVATURE PRINCIPALI OPPOSTE.

- Il fatto che $e = g = 0 \Rightarrow$ LE CURVE ASINTOTICHE SONO LE LINEE COORDINATE. (SONO 2 PERCHE' IL PUNTO E' IPERBOLICO)

- Le linee di curvatura sono $u(t), v(t)$ che soddisfano

$$a_{21}\dot{u}^2 + (a_{22}-a_{11})\dot{u}\dot{v} - a_{12}\dot{v}^2 = 0$$

$E = 1+(ay)^2$

$F = a^2xy$

$G = 1+(ax)^2$

$e = g = 0$

$f = N\cdot \underline{x}_{uv} = \frac{a}{\sqrt{(ax)^2+(ay)^2+1}}$

$a_{12} = \dots\dots$ $\qquad a_{22} = \dots\dots$

$a_{21} = \dots\dots$ $\qquad a_{11} = \dots\dots$

– un po' più complicato –

ES 3 Determinare le curve asintotiche e le linee di curvatura dell'elicoide

$x = v\cos u$
$y = v\sin u$
$z = cu$

e dimostrare che ha curvatura media NULLA.

$\underline{x}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, cu)$

$\underline{x}_u = (-v\,\mathrm{sen}\,u, v\cos u, c)$

$\underline{x}_v = (\cos u, \sin u, 0)$

$$\underline{N} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ -v\,\mathrm{sen}\,u & v\cos u & c \\ \cos u & \sin u & 0 \end{vmatrix}}{(\quad)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(-c\sin u, c\cos u, -v)}{\sqrt{v^2+c^2}}$$

$E = v^2 + c^2$
$F = 0$
$G = 1$

$\boxed{\text{PARAMETRIZZ. ORTOGONALE}}$

$a_{11} = 0 = \dfrac{fF - eG}{EG - F^2}$
$a_{12} = \dfrac{gF - fG}{}$
$a_{21} = \dfrac{eF - fE}{}$
$a_{22} = 0 = \dfrac{fF - gE}{EG - F^2}$

$e = N \cdot x_{uu} = 0$
$f = c$
$g = 0$

$\underline{x}_{uu} = (-v\cos u, -v\,\mathrm{sen}\,u, 0)$
$\underline{x}_{uv} = (-\mathrm{sen}\,u, \cos u, 0)$
$x_{vv} = (0, 0, 0)$

$$K = \frac{\overset{0}{eg} - f^2}{EG - F^2} = \frac{-c^2}{v^2 + c^2} < 0$$

tutti i punti sono iperbolici

$$H = \frac{-2f\cancel{F}^{=0}}{EG} = 0$$ ha curvatura media nulla. $= \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$

$a_{11} = -a_{22}$

dal momento che $e = g = 0 \Rightarrow$ LE LINEE ASINTOTICHE sono le linee coordinate

TROVIAMO LE LINEE di CURVATURA $u(t), v(t)$ t.c. soddisfano all'equazione

$$a_{21}\dot{u}^2 + (a_{22} - a_{11})\dot{u}\dot{v} - a_{12}\dot{v}^2 = 0$$

$a_{11} = 0 = a_{22}$

$a_{12} = \dfrac{-c\cancel{G}}{E\cancel{G} - \cancel{F^2}} = \dfrac{-c}{v^2 + c^2}$

$a_{21} = \dfrac{-f\cancel{E}}{\cancel{E}G} = -\dfrac{c}{G} = -\dfrac{c}{1}$

$-c\dot{u}^2 + \dfrac{c}{v^2 + c^2}\dot{v}^2 = 0$

$\dot{u}^2 = -\dfrac{\dot{v}^2}{v^2 + c^2}$

$\left[\ \dot{u} = \dfrac{+\dot{v}}{\sqrt{v^2 + c^2}} \qquad \dot{u} = \dfrac{-\dot{v}}{\sqrt{v^2 + c^2}}\ \right]$

$u = \pm\log\left(v + \sqrt{v^2 + c^2}\right) + c$

ES 4 $\varphi(u,v) = (u, v, u^4+v^4)$

$\varphi_u = (1, 0, 4u^3)$ $\qquad \varphi_{uu} = (0, 0, 12u^2)$

$\varphi_v = (0, 1, 4v^3)$ $\qquad \varphi_{uv} = (0, 0, 0)$

$\qquad \varphi_{vv} = (0, 0, 12v^2)$

$$N = \frac{(-4u^3, -4v^3, 1)}{\left(1+(4u^3)^2+(4v^3)^2\right)^{1/2}}$$

$E = 1 + (4u^3)^2$ $\qquad e = \dfrac{12u^2}{(\quad)^{1/2}}$ $\qquad f = 0$ $\qquad g = \dfrac{12v^2}{(\quad)^{1/2}}$

$F = 16u^3v^3$

$G = 1 + 16v^6$

$$K = \frac{\begin{vmatrix} 12u^2 & 0 \\ 0 & 12v^2 \end{vmatrix}}{\left(1+(f_u)^2+(f_v)^2\right)^2} \qquad H = \frac{(1+f_u)^2 f_{vv} + (1+f_v^2)f_{uu} - 2f_uf_vf_{uv}}{2\left(1+f_u^2+f_v^2\right)^{3/2}}$$

$$K(p) = \frac{144u^2v^2}{(1+16u^6+16v^6)^2} \qquad H(p) = \frac{(1+16u^6)12v^2 + (1+16v^6)12u^2}{2\left(1+16u^6+16v^6\right)^{3/2}}$$

per trovare le curvature principali dovrei:

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 = p_s(\lambda) \qquad \text{(CONTO MOLTO LUNGO)}$$

In $p = (0,0,0)$ $\qquad e = f = g = 0$ $\qquad E = 1$ $\qquad F = 0$ $\qquad G = 1$

<u>Il punto e' piatto</u> $\Rightarrow$ tutte le curve sono asintotiche e di curvatura

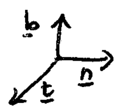
$K_1 = K_2 = 0$

ES 5 $\sigma(s): I \to \mathbb{R}^3$ $\qquad \tau(s) = 0$ poiche' e' piana $\qquad \dfrac{db}{ds} = 0$

$\dfrac{dn}{ds} = -k(s)\underline{t}(s)$

$\varphi_s = \dot\sigma + \cos v\,\dot n + \dot b = \underline{t}(s) - \cos v\, K(s)\,\underline{t}$

$\varphi_v = -\operatorname{sen} v\, \underline{n}$



$\underline{N} = \underline{t}(s)(1-\cos v K(s)) \wedge (-\operatorname{sen} v)\underline{n} = -(1-\cos v)\operatorname{sen} v\, \underline{b}$ $\qquad N \parallel \underline{b}$ $\qquad e = f = g = 0$

$\varphi_{ss} = \dfrac{dt}{ds} - \cos v\, K'\,\underline{t} - \cos v\, K \dfrac{dt}{ds} = -\cos v\, K'\underline{t} + (1-\cos v K)K(s)\underline{n}(s)$ $\qquad$ poiche' $\underline{N} \perp \varphi_{ss}, \varphi_{vv}$

$\varphi_{vv} = -\cos v\, n$ $\qquad \Rightarrow K = H = 0$

ES 6 se $H(p)=0 \quad \forall p \Rightarrow K_1+K_2=0 \quad \forall p \quad K_1=-K_2$

$\Rightarrow$ o <u>i punti sono piatti</u> $K_1=-K_2=0$

$\Rightarrow$ o <u>i punti sono iperbolici</u>

$\nexists$ punti ellittici.

ma dall' $\boxed{\text{ES 1}}$ ogni sup. compatta ha almeno un punto ellittico.

ES 7 $\Rightarrow$ se $\forall p \ \exists$ 3 rette $\subseteq \Sigma \Rightarrow \forall p \ \exists$ 3 DIREZIONI ASINTOTICHE

$\Rightarrow \forall p$ e' PIATTO $\Rightarrow \Sigma$ e' un pezzo di piano.

Superficie con tutti i punti ombelicali

$\Leftarrow$ se e' un piano (ovvio)

ES 9 fatelo voi...

ES 10 Sia $(\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)) = \underline{x}(u,v)$ una parametrizzazione di una superficie di rotazione con CURVATURA di Gauss costante K

◎ supponiamo che $\psi'(v)^2 + \varphi'^2(v) = 1$

$$\Rightarrow K = -\frac{\varphi''}{\varphi} \qquad \varphi'' + K\varphi = 0$$

se trovo $\varphi(v) \rightsquigarrow \psi(v)$ t.c.

$$\psi'(v) = \sqrt{1-\varphi'^2(v)}$$

$$\psi(v) = \int \sqrt{1-\varphi'^2(v)}\, dv$$

$\boxed{1}$ $K=0 \Rightarrow \varphi''(v)=0$

$$\varphi'(v) = K_1 \Rightarrow \boxed{\varphi(v) = K_1 v + K_2}$$

$$\psi'(v) = \sqrt{1-K_1^2} = K_3 \Rightarrow \psi(v) = K_3 v + K_4$$

$$\varphi(v) = K_1 v + K_2$$
$$\psi(v) = K_3 v + K_4$$

ES: $K_1=0 \quad K_2=1 \quad K_3=1 \quad K_4=0$ $\boxed{\text{CILINDRO}}$

ES $K_1=1 \quad K_2=0 \quad K_3=1 \quad K_4=0$ $\boxed{\text{CONO}}$

$\boxed{2}$ $K=1$

$$\varphi'' + \varphi = 0$$
$$\varphi(v) = G\cos v \qquad \psi(v) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1-G^2\cos^2 v}$$

per $G=1$ <u>TROVO LA SFERA</u>

$\boxed{3}$ $K=-1 \qquad \varphi'' - \varphi = 0$